Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Зарубин, Нелокальная краевая задача Трикоми для дифференциально-разностного уравнения смешанного типа, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021, номер 1, 35–50

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1835>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 18:12:55

УДК 517.956.6

Нелокальная краевая задача Трикоми для дифференциально-разностного уравнения смешанного типа

© А. Н. Зарубин

Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева,
Россия, 302026, Орел, Улица Комсомольская, 95.

Аннотация

Исследуется краевая задача Трикоми для дифференциально-разностного опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа с некарлемановскими отклонениями по всем аргументам искомой функции. Применена редукция к уравнению смешанного типа без отклонений. Используются симметричные попарно коммутативные матрицы коэффициентов уравнения. Доказаны теоремы единственности и существования. Задача однозначно разрешима.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, дифференциально-разностное уравнение, интегральное уравнение, сингулярное интегральное уравнение, сосредоточенное запаздывание и опережение.

Получение: 5 ноября 2020 г. / Исправление: 13 февраля 2021 г. /

Принятие: 22 февраля 2021 г. / Публикация онлайн: 10 марта 2021 г.

Введение. Дифференциально-разностные уравнения (как обыкновенные, так и с частными производными, с сосредоточенным карлемановским или некарлемановским запаздыванием и опережением) служат математическими моделями для многих прикладных задач таких как, вихреобразование, перемежаемость, формирование сложных когерентных пятен [1]; многослойные оболочки и пластины [2]; плазма [3]; колебания кристаллической решетки [4]; проблема оптимизации лечения онкологических заболеваний [5].

Данная работа посвящена изучению краевой задачи Трикоми для нелокального уравнения смешанного типа Лаврентьева—Бицадзе с сосредоточенным запаздыванием и опережением по всем аргументам искомой функции вида

Научная статья

Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Зарубин А. Н. Нелокальная краевая задача Трикоми для дифференциально-разностного уравнения смешанного типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 1. С. 35–50. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1835>.

Сведения об авторе

Александр Николаевич Зарубин <https://orcid.org/0000-0002-0611-5752>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. математического анализа и дифференциальных уравнений; e-mail: aleks_zarubin@mail.ru; matdiff@yandex.ru

$$\sum_{k=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 H((-1)^{(k-1)/2} k(y + (k-1)h/2)) \times \\ \times [(\operatorname{sgn} y) b_{n+1,k+1} U_{yy}(x + n\tau, y + kh) + a_{n+1,k+1} U_{xx}(x - n\tau, y + kh)] = 0 \quad (1)$$

в области $D = D^+ \cup D^- \cup I^0$, где

$$D^+ = \{(x, y) : 0 < x < 3\tau, 0 < y < 2h\} = \bigcup_{k=0}^2 \left(\bigcup_{j=0}^1 D_{kj}^+ \right),$$

и

$$D^- = \bigcup_{k=0}^2 D_{k0}^- = \bigcup_{k=0}^2 \left(\bigcup_{j=0}^1 D_{k0}^{\gamma_{j0}} \right)$$

— эллиптическая и гиперболическая части области D , причем

$$D_{kj}^+ = \{(x, y) : k\tau < x < (k+1)\tau, jh < y < (j+1)h\}, \quad k = \overline{1, 3}, \quad j = 0, 1, 2;$$

$0 < \tau, h, a_{n+1,k+1}, b_{n+1,k+1} \equiv \text{const}$; $H(\zeta)$ — функция Хевисайда; $D_{k0}^{\gamma_{j0}} = \{(x, y) : -y\gamma_{j0} + k\tau < x < y\gamma_{j0} + (k+1)\tau; -\tau/2\gamma_{j0} < y < 0\}$, $k = \overline{1, 3}$, $j = 0, 1$; γ_{jk}^2 — собственные значения матрицы коэффициентов уравнения (1).

Пусть $D_k = D_{k0}^- \bigcup_{j=0}^1 D_{kj}^+ \bigcup_{l=0}^1 I_k^l$, $k = \overline{1, 3}$, где

$$I^l = \bigcup_{k=0}^2 I_k^l, \quad I_k^l = \{(x, y) : k\tau < x < (k+1)\tau, y = lh\}, \quad l = 0, 1,$$

а

$$J = \bigcup_{k=0}^1 J_k, \quad J_k = \{(x, y) : x = (k+1)\tau, 0 < y < 2h\}.$$

Тогда $D = \bigcup_{k=0}^2 D_k \bigcup_{j=0}^1 J_j$.

1. Постановка задачи. Редукция. Дифференциально-разностное уравнение смешанного типа (1) запишем в виде

$$\sum_{k=-1}^1 H((-1)^{(k-1)/2} k(y + (k-1)h/2)) \times \\ \times \{(\operatorname{sgn} y) [b_{0(k+1)} U_{yy}(x - \tau, y + kh) + b_{1(k+1)} U_{yy}(x, y + kh) + \\ + b_{2(k+1)} U_{yy}(x + \tau, y + kh)] + \\ + [a_{0(k+1)} U_{xx}(x + \tau, y + kh) + a_{1(k+1)} U_{xx}(x, y + kh) + \\ + a_{2(k+1)} U_{xx}(x - \tau, y + kh)]\} = 0, \quad (x, y) \in D. \quad (2)$$

ЗАДАЧА Т. В области $D = \bigcup_{k=0}^2 D_k \bigcup J$ найти решение $U(x, y) \in C(\overline{D}) \cap$

$\cap C^2\left(D \setminus \left(J \bigcup_{l=0}^1 I^l\right)\right)$ уравнения (2), удовлетворяющее следующим условиям:

$$U(x, y) = r(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}_{-1}; \quad (3)$$

$$U(x, y) = \rho(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}_3; \quad (4)$$

$$U(x, y) = \delta(x, y), \quad (x, y) \in \overline{\bigcup_{k=0}^2 D_{k2}^+}; \quad (5)$$

$$U(x, (k\tau - x)/\gamma_{j0}) = \psi_{kj}(x), \quad k\tau \leq x \leq (2k+1)\tau/2, \quad j = 0, 1, \quad k = 0, 1, 2, \quad (6)$$

и условиям сопряжения

$$\begin{aligned} U(x, 0-) &= U(x, 0+) = \omega(x), \quad 0 \leq x \leq 3\tau; \\ U_y(x, 0-) &= U_y(x, 0+) = \nu(x), \quad 0 < x < 3\tau, \quad x \neq \tau, 2\tau. \end{aligned}$$

Причем

$$\begin{aligned} \psi_{0j}(0) &= r(0, 0), \quad r(0, 2h) = \delta(0, 2h), \quad \rho(3\tau, 2h) = \delta(3\tau, 2h), \\ r(0, y) &= \rho(3\tau, y), \quad 0 \leq y \leq 2h; \end{aligned}$$

γ_{jk}^2 — собственные значения матрицы коэффициентов уравнения (2), $j = 0, 1$, $k = 0, 1, 2$; $r(x, y)$, $\rho(x, y)$, $\delta(x, y)$, $\psi_{kj}(x)$ — заданные непрерывные достаточно гладкие функции; $\omega(x)$, $\nu(x)$ — функции, подлежащие определению в процессе решения задачи T.

ТЕОРЕМА 1. Если

$$r(x, y) \in C(\overline{D}_{-1}) \cap C^4(D_{-1}); \quad \rho(x, y) \in C(\overline{D}_2) \cap C^4(D_2);$$

$$\delta(x, y) \in C\left(\overline{\bigcup_{k=0}^2 D_{k2}^+}\right) \cap C^4\left(\bigcup_{k=0}^2 D_{k2}^+\right);$$

$$\psi_{kj}(x) \in C[k\tau, (2k+1)\tau/2] \cap C^2(k\tau, (2k+1)\tau/2), \quad k = 0, 1, 2, \quad j = 0, 1;$$

$r(0, y) = \rho(3\tau, y)$, $0 \leq y \leq 2h$; $r(0, 0) = \psi_{0j}(0)$; $r(0, 2h) = \delta(0, 2h)$; $\rho(3\tau, 2h) = \delta(3\tau, 2h)$, то существует единственное решение задачи T.

Для доказательства теоремы произведем редукцию опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2) сначала к системе трех уравнений смешанного типа без отклонений по переменной x , а затем к системе шести уравнений смешанного типа без отклонений и по аргументу y .

В терминах функций

$$U_k(x, y) = U(x, y), \quad (x, y) \in D_k, \quad k = -1, 3, \quad (7)$$

учитывая (3), (4), переводя D_k заменой x на $x + k\tau$ ($k = 0, 1, 2$) в D_0 и используя вектор

$$\overline{U}(x, y) = (U_0(x, y), U_1(x + \tau, y), U_2(x + 2\tau, y))^T, \quad (x, y) \in D_0, \quad (8)$$

запишем уравнение (2) в областях D_k ($k = 0, 1, 2$) в форме

$$\begin{aligned} \sum_{k=-1}^1 H((-1)^{(k-1)/2} k(y + (k-1)h/2)) \times \\ \times \{(\operatorname{sgn} y) B_k \overline{U}_{yy}(x, y + kh) + A_k \overline{U}_{xx}(x, y + kh)\} = \end{aligned}$$

$$= - \sum_{k=-1}^1 H((-1)^{(k-1)/2} k(y + (k-1)h/2)) \times \\ \times \{(\operatorname{sgn} y) B_k^0 \overline{m}_{yy}(x, y + kh) + A_k^0 \overline{m}_{xx}(x, y + kh)\}, \quad (x, y) \in D_0, \quad (9)$$

где

$$B_k = \begin{pmatrix} b_{1(k+1)} & b_{2(k+1)} & 0 \\ b_{0(k+1)} & b_{1(k+1)} & b_{2(k+1)} \\ 0 & b_{0(k+1)} & b_{1(k+1)} \end{pmatrix}, \quad A_k = \begin{pmatrix} a_{1(k+1)} & a_{0(k+1)} & 0 \\ a_{2(k+1)} & a_{1(k+1)} & a_{0(k+1)} \\ 0 & a_{2(k+1)} & a_{1(k+1)} \end{pmatrix},$$

$$\overline{m}(x, y + kh) = (r(x - \tau, y + kh), 0, \rho(x + 3\tau, y + kh))^\top,$$

причем

$$B_k^0 = \begin{pmatrix} b_{0(k+1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{2(k+1)} \end{pmatrix}, \quad A_k^0 = \begin{pmatrix} a_{2(k+1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{0(k+1)} \end{pmatrix}.$$

Когда $b_{2(k+1)} = b_{0(k+1)}$, $b_{1(k+1)} > \sqrt{2}b_{0(k+1)} > 0$, $a_{2(k+1)} = a_{0(k+1)}$, $a_{1(k+1)} > \sqrt{2}a_{0(k+1)} > 0$, матрицы B_k , A_k симметричны и попарно коммутативны. Поэтому [6] существует невырожденная матрица T такая, что

$$T^{-1} B_k T = \Lambda_{B_k} = \begin{pmatrix} \alpha_{0(k+1)}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{1(k+1)}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{2(k+1)}^2 \end{pmatrix},$$

где $\alpha_{j(k+1)}^2 = b_{1(k+1)} - (-1)^j j \sqrt{2} b_{0(k+1)} 2^{1-j}$ ($j = \overline{0, 2}$; $k = \overline{-1, 1}$) — собственные значения матрицы B_k ;

$$T^{-1} A_k T = \Lambda_{A_k} = \begin{pmatrix} \beta_{0(k+1)}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{1(k+1)}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{2(k+1)}^2 \end{pmatrix},$$

где $\beta_{j(k+1)}^2 = a_{1(k+1)} - (-1)^j j \sqrt{2} a_{0(k+1)} 2^{1-j}$ ($j = \overline{0, 2}$; $k = \overline{-1, 1}$) — собственные значения матрицы A_k . При этом

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \overline{P}_0 \\ \overline{P}_1 \\ \overline{P}_2 \end{pmatrix}.$$

Умножая слева матричное уравнение (9) на T^{-1} и учитывая соотношения

$$T^{-1} B_k = \Lambda_{B_k} T^{-1}, \quad T^{-1} A_k = \Lambda_{A_k} T^{-1},$$

$$T^{-1} B_k^0 \overline{m} = b_{0(k+1)} T^{-1} \overline{m}, \quad T^{-1} A_k^0 \overline{m} = a_{0(k+1)} T^{-1} \overline{m},$$

после преобразований получим три отдельных опережающе-запаздывающих только по переменной y уравнения смешанного типа:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-1}^1 H((-1)^{(k-1)/2} k(y + (k-1)h/2)) \times \\ & \times \{(\operatorname{sgn} y) \alpha_{j(k+1)}^2 \langle \bar{P}_j, \bar{U}(x, y + kh) \rangle_{yy} + \beta_{j(k+1)}^2 \langle \bar{P}_j, \bar{U}(x, y + kh) \rangle_{xx} \} = \\ & = - \sum_{k=-1}^1 H((-1)^{(k-1)/2} k(y + (k-1)h/2)) \times \\ & \times \{(\operatorname{sgn} y) b_{0(k+1)} \langle \bar{P}_j, \bar{m}(x, y + kh) \rangle_{yy} + \\ & + a_{0(k+1)} \langle \bar{P}_j, \bar{m}(x, y + kh) \rangle_{xx} \}, \quad (x, y) \in D_0, \quad (10) \end{aligned}$$

где $\langle \bar{P}_j, \bar{U} \rangle$, $\langle \bar{P}_j, \bar{m} \rangle$ — скалярное произведение векторов, $j = 0, 1, 2$; область $D_0 = D_{00}^- \cup D_{00}^+ \cup D_{01}^+$.

Уравнение (10) в области D_{00}^- является гиперболическим без отклонений аргументов x и y :

$$\begin{aligned} & -\alpha_{j1}^2 \langle \bar{P}_j, \bar{U}(x, y) \rangle_{yy} + \beta_{j1}^2 \langle \bar{P}_j, \bar{U}(x, y) \rangle_{xx} = \\ & = b_{01} \langle \bar{P}_j, \bar{m}(x, y) \rangle_{yy} - a_{01} \langle \bar{P}_j, \bar{m}(x, y) \rangle_{xx}, \quad (x, y) \in D_{00}^-, \quad j = 0, 1, 2, \quad (11) \end{aligned}$$

причем, так же как в (8), (7), будем считать

$$\begin{aligned} \bar{U}(x, y) &= (U_{00}(x, y), U_{10}(x + \tau, y), U_{20}(x + 2\tau, y))^\top, \\ \bar{U}(x, y + h) &= (U_{01}(x, y + h), U_{11}(x + \tau, y + h), U_{21}(x + 2\tau, y + h))^\top \end{aligned} \quad (12)$$

при $(x, y) \in D_{00}$. Здесь

$$U_{kj}(x, y) = U_k(x, y) = U(x, y), \quad (x, y) \in D_{kj}, \quad k = 0, 1, 2, \quad j = 0, 1. \quad (13)$$

В терминах функций (13), (12), учитывая (5) и переводя D_{0k}^+ заменой y на $y + kh$ ($k = 0, 1$) в D_{00}^+ , запишем уравнение (10) в областях D_{0k}^+ ($k = 0, 1$) в виде системы

$$\begin{aligned} & M \left(\frac{\langle \bar{P}_j, \bar{U}(x, y) \rangle}{\langle \bar{P}_j, \bar{U}(x, y + h) \rangle} \right)_{yy} + N \left(\frac{\langle \bar{P}_j, \bar{U}(x, y) \rangle}{\langle \bar{P}_j, \bar{U}(x, y + h) \rangle} \right)_{xx} = \\ & = -M_0 \left(\frac{\langle \bar{P}_j, \bar{m}(x, y) \rangle}{\langle \bar{P}_j, \bar{m}(x, y + h) \rangle} \right)_{yy} + N_0 \left(\frac{\langle \bar{P}_j, \bar{m}(x, y) \rangle}{\langle \bar{P}_j, \bar{m}(x, y + h) \rangle} \right)_{xx} - \\ & - H(y) \alpha_{j2}^2 \left(\frac{0}{\langle \bar{P}_j, \bar{U}^\delta(x, y + 2h) \rangle} \right)_{yy} - H(y) \beta_{j2}^2 \left(\frac{0}{\langle \bar{P}_j, \bar{U}^\delta(x, y + 2h) \rangle} \right)_{xx} - \\ & - H(y) b_{02} \left(\frac{0}{\langle \bar{P}_j, \bar{m}(x, y + 2h) \rangle} \right)_{yy} - H(y) a_{02} \left(\frac{0}{\langle \bar{P}_j, \bar{m}(x, y + 2h) \rangle} \right)_{xx}, \\ & (x, y) \in D_{00}^+, \quad j = 0, 1, 2, \quad (14) \end{aligned}$$

где, согласно (12), (13), (5),

$$\bar{U}^\delta(x, y+2h) = (\delta(x, y+2h), \delta(x+\tau, y+2h), \delta(x+2\tau, y+2h))^\top, \quad (x, y) \in D_{00}^+,$$

причем

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_{j1}^2 & H(y)\alpha_{j2}^2 \\ H(y)\alpha_{j0}^2 & \alpha_{j1}^2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \beta_{j1}^2 & H(y)\beta_{j2}^2 \\ H(y)\beta_{j0}^2 & \beta_{j1}^2 \end{pmatrix},$$

а

$$M_0 = \begin{pmatrix} b_{01} & H(y)b_{02} \\ H(y)b_{00} & b_{01} \end{pmatrix}, \quad N_0 = \begin{pmatrix} a_{01} & H(y)a_{02} \\ H(y)a_{00} & a_{01} \end{pmatrix}.$$

При $\alpha_{j2}^2 = \alpha_{j0}^2$, $\beta_{j2}^2 = \beta_{j1}^2$ (в этом случае $b_{02} = b_{00}$, $a_{02} = a_{00}$) матрицы M и N (матрицы M_0 и N_0) симметричны и попарно коммутативны. Поэтому [6] существует невырожденная матрица Q такая, что

$$Q^{-1}MQ = \Lambda_M = \begin{pmatrix} \alpha_{j1}^2 + H(y)\alpha_{j0}^2 & 0 \\ 0 & \alpha_{j1}^2 - H(y)\alpha_{j0}^2 \end{pmatrix},$$

где $\alpha_{j1}^2 + (-1)^k \alpha_{j0}^2$ ($k = 0, 1$) — собственные значения матрицы M ;

$$Q^{-1}NQ = \Lambda_N = \begin{pmatrix} \beta_{j1}^2 + H(y)\beta_{j0}^2 & 0 \\ 0 & \beta_{j1}^2 - H(y)\beta_{j0}^2 \end{pmatrix},$$

где $\beta_{j1}^2 + (-1)^k \beta_{j0}^2$ ($k = 0, 1$) — собственные значения матрицы N ;

$$Q^{-1}M_0Q = \Lambda_{M_0} = \begin{pmatrix} b_{01} + H(y)b_{00} & 0 \\ 0 & b_{01} - H(y)b_{00} \end{pmatrix},$$

где $b_{01} + (-1)^k b_{00}$ ($k = 0, 1$) — собственные значения матрицы M_0 ;

$$Q^{-1}N_0Q = \Lambda_{N_0} = \begin{pmatrix} a_{01} + H(y)a_{00} & 0 \\ 0 & a_{01} - H(y)a_{00} \end{pmatrix},$$

где $a_{01} + (-1)^k a_{00}$ ($k = 0, 1$) — собственные значения матрицы N_0 . При этом

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \frac{1}{2}Q.$$

Умножая слева матричное уравнение (14) на Q^{-1} и учитывая соотношения

$$\begin{aligned} Q^{-1}M &= \Lambda_M Q^{-1}, & Q^{-1}N &= \Lambda_N Q^{-1}, \\ Q^{-1}M_0 &= \Lambda_{M_0} Q^{-1}, & Q^{-1}N_0 &= \Lambda_{N_0} Q^{-1}, \end{aligned}$$

после преобразований получим шесть отдельных уравнений эллиптического типа без отклонения аргументов:

$$\begin{aligned} &(\alpha_{j1}^2 + (-1)^k H(y)\alpha_{j0}^2)(\langle \bar{P}_j, \bar{U}(x, y) + (-1)^k \bar{U}(x, y+h) \rangle)_{yy} + \\ &+ (\beta_{j1}^2 + (-1)^k H(y)\beta_{j0}^2)(\langle \bar{P}_j, \bar{U}(x, y) + (-1)^k \bar{U}(x, y+h) \rangle)_{xx} = \\ &= -(b_{01} + (-1)^k H(y)b_{00})(\langle \bar{P}_j, \bar{m}(x, y) + (-1)^k \bar{m}(x, y+h) \rangle)_{yy} - \\ &- (a_{01} + (-1)^k H(y)a_{00})(\langle \bar{P}_j, \bar{m}(x, y) + (-1)^k \bar{m}(x, y+h) \rangle)_{xx} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -H(y)\alpha_{j2}^2(-1)^k(\langle \bar{P}_j, \bar{U}^\delta(x, y+2h) \rangle)_{yy} - H(y)\beta_{j2}^2(-1)^k(\langle \bar{P}_j, \bar{U}^\delta(x, y+2h) \rangle)_{xx} - \\
 & -H(y)b_{02}(-1)^k(\langle \bar{P}_j, \bar{m}(x, y+2h) \rangle)_{yy} - H(y)a_{02}(-1)^k(\langle \bar{P}_j, \bar{m}(x, y+2h) \rangle)_{xx}, \\
 & (x, y) \in D_{00}^+, \quad j = 0, 1, 2, \quad k = 0, 1. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Таким образом, опережающе-запаздывающее уравнение смешанного типа (2) в силу (11), (15) приведено к системе шести уравнений смешанного типа без отклонений аргументов:

$$(\operatorname{sgn} y)q_{jky}(x, y) + \gamma_{jk}^2 q_{jkxx}(x, y) = n_{jk}(x, y), \quad (x, y) \in D_{00}, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned}
 q_{jk}(x, y) &= \frac{1}{8} \langle \bar{P}_j, \bar{U}(x, y) + (-1)^k H(y) \bar{U}(x, y+h) \rangle, \\
 \gamma_{jk}^2 &= \frac{\beta_{j1}^2 + (-1)^k H(y) \beta_{j0}^2}{\alpha_{j1}^2 + (-1)^k H(y) \alpha_{j0}^2},
 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 n_{jk}(x, y) &= -\frac{1}{8[\alpha_{j1}^2 + (-1)^k H(y) \alpha_{j0}^2]} \left\{ \langle \bar{P}_j, \left[(\operatorname{sgn} y)(b_{01} + (-1)^k H(y)b_{00}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (a_{01} + (-1)^k H(y)a_{00}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] (\bar{m}(x, y) + (-1)^k H(y) \bar{m}(x, y+h)) \right\rangle + \\
 & + H(y)(-1)^k \langle \bar{P}_j, \left[(\operatorname{sgn} y) \alpha_{j2}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_{j2}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \bar{U}^\delta(x, y+2h) \rangle + \\
 & + H(y)(-1)^k \langle \bar{P}_j, \left[(\operatorname{sgn} y) b_{02} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{02} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \bar{m}(x, y+2h) \rangle \}.
 \end{aligned}$$

Множество решений $q_{jk}(x, y)$, $(x, y) \in D_{00}$ ($j = 0, 1, 2$, $k = 0, 1$) шести неоднородных уравнений смешанного типа Лаврентьева—Бицадзе (16) содержит все решения $U(x, y) = U_{jk}(x, y)$, $(x, y) \in D_{jk}$ ($j = 0, 1, 2$, $k = 0, 1$) опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2), которые в силу (12) можно выделить из системы (17) в виде

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} U_{0l}(x, y+lh) \\ U_{1l}(x+\tau, y+lh) \\ U_{2l}(x+2\tau, y+lh) \end{pmatrix} = \bar{U}(x, y+lh) = \\
 & = T \begin{pmatrix} q_{00}(x, y) + (-1)^l q_{01}(x, y) \\ q_{10}(x, y) + (-1)^l q_{11}(x, y) \\ q_{20}(x, y) + (-1)^l q_{21}(x, y) \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in D_{00}, \quad l = 0, 1. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Таким образом, поставленная задача Т для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2) в области $D = D^+ \cup D^- \cup I$ относительно искомой функции $U(x, y)$ редуцирована к шести задачам Трикоми для шести уравнений смешанного типа (16) без отклонений в области $D_{00} = D_{00}^+ \cup D_{00}^- \cup I_0$ относительно функций $q_{jk}(x, y)$ вида (17).

ЗАДАЧА T_{jk} . В области $D_{00} = D_{00}^+ \cup D_{00}^- \cup I_0$ найти решение $q_{jk}(x, y) \in C(\overline{D}_{00}) \cap C^2(D_{00} \setminus I_0)$ уравнения (16), удовлетворяющее условиям

$$q_{jk}(0, y) = q_{jk}(\tau, y) = \bar{r}_{jk}(y) \equiv \frac{1}{8} \langle \bar{P}_j, \bar{U}(0, y) + (-1)^k \bar{U}(0, y+h) \rangle, \quad 0 \leq y \leq h; \quad (19)$$

$$q_{jk}(x, h) = \bar{\delta}_{jk}(x) \equiv \frac{1}{8} \langle \bar{P}_j, \bar{U}(x, h) + (-1)^k \bar{U}(x, 2h) \rangle, \quad 0 \leq x \leq \tau; \quad (20)$$

$$q_{jk}(x, -x/\gamma_{jk}) = \bar{\psi}_{jk}(x) \equiv \frac{1}{8} \langle \bar{P}_j, \bar{U}(x, -x/\gamma_{jk}) \rangle, \quad 0 \leq x \leq \tau/2, \quad (21)$$

условиям сопряжения

$$q_{jk}(x, 0-) = q_{jk}(x, 0+) = \bar{\omega}_{jk}(x) \equiv \frac{1}{8} \langle \bar{P}_j, \bar{U}(x, 0) \rangle, \quad 0 \leq x \leq \tau; \quad (22)$$

$$q_{jky}(x, 0-) = q_{jky}(x, 0+) = \bar{\nu}_{jk}(x) \equiv \frac{1}{8} \langle \bar{P}_j, \bar{U}_y(x, 0) \rangle, \quad 0 < x < \tau; \quad (23)$$

причем

$$\bar{r}_{jk}(0) = \bar{\psi}_{jk}(0), \quad \bar{r}_{jk}(h) = \bar{\delta}_{jk}(0), \quad \bar{r}_{jk}(h) = \bar{\delta}_{jk}(\tau),$$

где $\bar{r}_{jk}(y)$, $\bar{\delta}_{jk}(x)$, $\bar{\psi}_{jk}(x)$ — заданные непрерывные достаточно гладкие функции; $\bar{\omega}_{jk}(x)$, $\bar{\nu}_{jk}(x)$ — функции, подлежащие определению в процессе решения задачи T_{jk} . Здесь и далее $j = 0, 1, 2$, $k = 0, 1$.

2. Однозначная разрешимость задачи T . Единственность решения задачи T для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2) в области $D = D^+ \cup D^- \cup I$ следует из того, что однородная задача T имеет тривиальное решение $U(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}$ в смысле ее эквивалентности, согласно (1), (18), тривиальному решению $q_{jk}(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}_{00} = \bar{D}_{00}^+ \cup \bar{D}_{00}^- \cup I_0$ однородной задачи T_{jk} для однородного уравнения (16) при однородных условиях (19)–(21).

Доказательство этого факта основано на установлении знакоопределенности интеграла

$$\beta_{jk} = \int_0^\tau \bar{\omega}_{jk}(x) \bar{\nu}_{jk}(x) dx.$$

ЛЕММА 1. Если $q_{jk}(x, y)$ — решение однородного уравнения (16) в области $\bar{D}_{00}^+$ из класса $C(\bar{D}_{00}^+) \cap C^2(D_{00}^+)$, обращающееся в нуль при $x = 0$, $x = \tau$ ($0 \leq y \leq h$) и $y = h$ ($0 \leq x \leq \tau$), то

$$\beta_{jk} \leq 0, \quad (24)$$

$$\beta_{jk} + \iint_{D_{00}^+} [q_{jky}^2(x, y) + \gamma_{jk}^2 q_{jkx}^2(x, y)] dx dy = 0. \quad (25)$$

ЛЕММА 2. Если $q_{jk}(x, y) \in C(\bar{D}_{00}^-) \cap C^2(D_{00}^-)$ — решение однородного уравнения (16) в области D_{00}^- , обращающееся в нуль на характеристике $x = -\gamma_{jk}y$ ($0 \leq x \leq \tau/2$), то

$$\beta_{jk} \geq 0. \quad (26)$$

Доказательство лемм 1, 2 можно провести аналогично [7, 8].

Из неравенств (24), (26) следует $\beta_{jk} = 0$, поэтому из равенства (25) получим положительно определенную форму, равную нулю, и, значит, $q_{jkx}(x, y) \equiv 0$, $q_{jky}(x, y) \equiv 0$, т. е. $q_{jk}(x, y) \equiv \text{const}$ в D_{00}^+ . Однородность граничных условий в D_{00}^+ и $q_{jk}(x, y) \in C(\overline{D_{00}^+})$ позволяют утверждать, что $q_{jk}(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D_{00}^+}$ и, в частности, $q_{jk}(x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq \tau$. Последнее равенство в совокупности с однородным условием (21) обеспечивает тривиальность решений $q_{jk}(x, y) \equiv 0$ первой задачи Дарбу в $\overline{D_{00}^-}$. Из полученной тривиальности решений $q_{jk}(x, y)$ в $\overline{D_{00}^+}$ и $\overline{D_{00}^-}$ следует тривиальность $q_{jk}(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D_{00}}$.

Таким образом, единственность решения задачи T_{jk} для уравнения (16) и граничных условий (19)–(21) в области $\overline{D_{00}}$ доказана.

Тривиальность решения однородной задачи T для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2) и однородных граничных условий (3)–(6) в области $\overline{D}$ следует из $q_{jk}(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D_{00}}$ и равенств (18), (12), (13): $U(x, y) = U_{jk}(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in \overline{D_{jk}}$. Это означает единственность решения задачи T для уравнения (2) при граничных условиях (3)–(6) в области $\overline{D}$.

Доказательство существования решения $U(x, y)$ задачи T в области $\overline{D}$ для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2) основано на решениях задач T_{jk} в области эллиптичности D_{00}^+ и гиперболичности D_{00}^- для уравнения (16).

ЗАДАЧА НЕЙМАНА—ДИРИХЛЕ. В области D_{00}^+ найти решение $q_{jk}^+(x, y) \in C(\overline{D_{00}^+}) \cap C^2(D_{00}^+)$ уравнения (16):

$$q_{jkyu}^+(x, y) + \gamma_{jk}^2 q_{jkxx}^+(x, y) = n_{jk}^+(x, y), \quad (x, y) \in D_{00}^+, \quad (27)$$

где $n^+(x, y) = n_{jk}(x)$, удовлетворяющее условиям (19), (20), (23).

ЗАДАЧА ДАРБУ. В области D_{00}^- найти решение $q_{jk}^-(x, y) \in C(\overline{D_{00}^-}) \cap C^2(D_{00}^-)$ уравнения (16):

$$q_{jkyu}^- - \gamma_{jk}^2 q_{jkxx}^-(x, y) = n_{jk}^-(x, y) \equiv \frac{1}{8\alpha_{j1}^2} \langle \overline{P}_j, (b_{01}\partial^2/\partial y^2 - a_{01}\partial^2/\partial x^2)\overline{m}(x, y) \rangle, \quad (x, y) \in D_{00}^-, \quad (28)$$

удовлетворяющее условиям (21), (23).

Вопрос существования решения $q_{jk}(x, y)$ задачи T_{jk} для уравнения (16) в области $D_{00} = D_{00}^+ \cup D_{00}^- \cup I_0$ связан с разрешимостью полного [9] сингулярного интегрального уравнения относительно $\overline{v}_{jk}(x)$, $0 < x < \tau$, которое будет получено из функциональных соотношений между $\overline{\omega}_{jk}(x)$ и $\overline{v}_{jk}(x)$, привнесенных на $y = 0$, $0 < x < \tau$ решениями задачи Неймана—Дирихле из D_{00}^+ и задачи Дарбу из D_{00}^- .

ЛЕММА 3. Если имеют место включения

$$\bar{r}_{jk}(y) \in C[0, h] \bigcap C^2(0, h), \quad \bar{\delta}_{jk}(x) \in C[0, \tau] \bigcap C^2(0, \tau), \quad \overline{v}_{jk}(x) \in C^1(0, \tau),$$

то существует единственное решение задачи [Неймана—Дирихле](#) $q_{jk}^+(x, y) \in C(\overline{D}_{00}^+) \cap C^2(D_{00}^+)$, которое имеет вид

$$\begin{aligned} q_{jk}^+(x, y) = & \int_0^\tau \bar{\delta}_{jk}(t) \frac{\partial}{\partial y} G_{jk}(x, t; 0, y) dt - \\ & - \int_0^\tau \bar{\nu}_{jk}(t) G_{jk}(x, t; 0, h - y) dt - \int_0^h d\zeta \int_0^\tau n_{jk}^+(t, \zeta) \Gamma_{jk}(x, t; \zeta, y) dt + \\ & + \int_0^h d\zeta \int_0^\tau \bar{r}_{jk}(\zeta) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Gamma_{jk}(x, t; \zeta, y) dt, \quad (29) \end{aligned}$$

где

$$\Gamma_{jk}(x, y; \zeta, y) = \begin{cases} G_{jk}(x, t; \zeta, h - y), & y > \zeta, \\ G_{jk}(x, t; y, h - \zeta), & \zeta > y; \end{cases}$$

причем

$$G_{jk}(x, t; r, z) = \frac{2}{\tau} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\text{sh}(\gamma_{jk} \lambda_m z) \text{ch}(\gamma_{jk} \lambda_m r)}{\gamma_{jk} \lambda_m \text{ch}(\gamma_{jk} \lambda_m h)} \sin(\lambda_m x) \sin(\lambda_m t).$$

Доказательство. Решение задачи [Неймана—Дирихле](#) для уравнения (27) в области D_{00}^+ будем искать в форме ряда

$$q_{jk}^+(x, y) = \bar{r}_{jk}(x, y) + \sum_{m=1}^{+\infty} R_{mjk}(y) \sin(\lambda_m x), \quad (x, y) \in \overline{D}_{00}^+, \quad \lambda_m = m\pi/\tau, \quad (30)$$

в котором функция $R_{mjk}(y)$, удовлетворяющая уравнению

$$\begin{aligned} R_{mjk}''(y) - \gamma_{jk}^2 \lambda_m^2 R_{mjk}(y) &= f_{mjk}(y) \equiv \\ &\equiv \frac{2}{\tau} \int_0^\tau [n_{jk}^+(\zeta, y) - \bar{r}_{jk}''(y)] \sin(\lambda_m \zeta) d\zeta, \quad 0 < y < h, \end{aligned}$$

и, в силу (20), (23), условиям

$$\begin{aligned} R_{mjk}(h) &= \frac{2}{\tau} \int_0^\tau [\bar{\delta}_{jk}(\zeta) - \bar{r}_{jk}(h)] \sin(\lambda_m \zeta) d\zeta, \\ R_{mjk}'(0) &= \frac{2}{\tau} \int_0^\tau [\bar{\nu}_{jk}(\zeta) - \bar{r}_{jk}'(0)] \sin(\lambda_m \zeta) d\zeta, \end{aligned}$$

имеет вид

$$\begin{aligned} R_{mjk}(y) &= \frac{\text{ch}(\gamma_{jk} \lambda_m y)}{\text{ch}(\gamma_{jk} \lambda_m h)} R_{mjk}(h) - \frac{\text{sh}(\gamma_{jk} \lambda_m (h - y))}{\gamma_{jk} \lambda_m \text{ch}(\gamma_{jk} \lambda_m h)} R_{mjk}'(0) - \\ &- \frac{\text{ch}(\gamma_{jk} \lambda_m y)}{\gamma_{jk} \lambda_m \text{ch}(\gamma_{jk} \lambda_m h)} \int_0^h f_{mjk}(\zeta) \text{sh}(\gamma_{jk} \lambda_m (h - \zeta)) d\zeta + \\ &+ \frac{1}{\gamma_{jk} \lambda_m} \int_0^y f_{mjk}(\zeta) \text{sh}(\gamma_{jk} \lambda_m (y - \zeta)) d\zeta, \quad 0 \leq y \leq h. \end{aligned}$$

Подстановка последнего равенства в (30) и необходимые преобразования приводят к искомому решению (29) задачи Неймана—Дирихле (27), (19), (20), (23). $\square$

Функциональное соотношение между $\bar{\omega}_{jk}(x)$ и $\bar{\nu}_{jk}(x)$ привнесенное из D_{00}^+ на $y = 0$, $0 \leq x \leq \tau$, найдем из решения задачи Неймана—Дирихле (29), полагая $y = 0$ и дифференцируя соответствующее выражение:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}'_{jk}(x) = & \frac{1}{2\tau\gamma_{jk}} \int_0^\tau \bar{\nu}_{jk}(\zeta) [\operatorname{ctg}(\pi(\zeta - x)/2\tau) - \operatorname{ctg}(\pi(\zeta + x)/2\tau)] d\zeta - \\ & - \frac{1}{\tau\gamma_{jk}} \int_0^\tau \bar{\nu}_{jk}(\zeta) M_{jk}(x, \zeta) d\zeta + \mu_{jk}(x), \quad 0 < x < \tau, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} M_{jk}(x, \zeta) = & \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{\sin(\pi(\zeta - x)/\tau)}{\cos(\pi(\zeta - x)/\tau) - \operatorname{ch}(2(n+1)\gamma_{jk}\pi h/\tau)} + \right. \\ & \left. + \frac{\sin(\pi(\zeta + x)/\tau)}{\cos(\pi(\zeta + x)/\tau) - \operatorname{ch}(2(n+1)\gamma_{jk}\pi h/\tau)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{jk}(x) = & \int_0^\tau \bar{\delta}_{jk}(t) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial y} G_{jk}(x, t; 0, y) \right]_{y=0} dt - \\ & - \int_0^h d\zeta \int_0^\tau n_{jk}^+(t, \zeta) \frac{\partial}{\partial x} G_{jk}(x, y; 0, h - \zeta) dt + \\ & + \int_0^h d\zeta \int_0^\tau \bar{r}_{jk}(\zeta) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} G_{jk}(x, t; y, h - \zeta) \right]_{y=0} dt, \end{aligned}$$

причем $M_{jk}(x, \zeta) \in C^2(0 < x, \zeta < \tau)$, $\mu_{jk}(x) \in C^1(0, \tau)$.

ЛЕММА 4. Если выполняются включения

$$\bar{\nu}_{jk}(x) \in C^1(0, \tau), \quad \bar{\psi}_{jk}(x) \in C[0, \tau/2] \cap C^2(0, \tau/2)$$

и $\bar{\psi}_{jk}(0) = \bar{r}_{jk}(0)$, то существует единственное решение задачи Дарбу $q_{jk}^-(x, y) \in C(\bar{D}_{00}) \cap C^2(D_{00}^-)$, которое имеет вид

$$q_{jk}^-(x, y) = \frac{1}{\gamma_{jk}} \int_0^{x+y\gamma_{jk}} \bar{\nu}_{jk}(\zeta) d\zeta + P_{jk}(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}_{00}^-, \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} P_{jk}(x, y) = & -\bar{\psi}_{jk}(0) + \bar{\psi}_{jk}((x - y\gamma_{jk})/2) + \bar{\psi}_{jk}((x + y\gamma_{jk})/2) - B_{jk}(x, y) + \\ & + B_{jk}((x - y\gamma_{jk})/2, -(x - y\gamma_{jk})/2\gamma_{jk}) + \\ & + B_{jk}((x + y\gamma_{jk})/2, -(x + y\gamma_{jk})/2\gamma_{jk}), \end{aligned}$$

$$B_{jk}(x, y) = \frac{1}{2\gamma_{jk}} \int_0^y dt \int_{x-(y-t)\gamma_{jk}}^{x+(y-t)\gamma_{jk}} n_{jk}^-(\zeta, t) d\zeta.$$

Доказательство формулы (32) следует из общего решения неоднородного уравнения (28) колебания струны

$$q_{jk}^-(x, y) = L_{jk}^1(x - y\gamma_{jk}) + L_{jk}^2(x + y\gamma_{jk}) + B_{jk}(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}_{00}^-, \quad L_{jk}^s(\zeta) \in C^2[0, \tau] \quad (s = 1, 2)$$

и краевых условий (21), (23).

Функциональное соотношение между $\overline{\omega}_{jk}(x)$ и $\overline{\nu}_{jk}(x)$, приведенное из D_{00}^- на $y = 0$, $0 \leq x \leq \tau$, найдем из решения (32) Дарбу, полагая в нем $y = 0$ и дифференцируя соответствующее выражение:

$$\overline{\omega}'_{jk}(x) = \frac{1}{\gamma_{jk}} \overline{\nu}_{jk}(x) + P'_{jk}(x, 0), \quad 0 < x < \tau, \quad (33)$$

где

$$P'_{jk}(x, 0) = \overline{\psi}_{jk}(x/2) + \frac{1}{\gamma_{jk}} \int_0^{-x/2\gamma_{jk}} n_{jk}^-(x + t\gamma_{jk}, t) dt,$$

причем

$$P'_{jk}(x, 0) \in C^1(0, \tau).$$

Вопрос существования решения задачи T_{jk} (16), (19)–(21) в силу условий сопряжения (22)–(23) и функциональных соотношений (31), (33) сведен к разрешимости полного сингулярного интегрального уравнения нормально-го типа [9]

$$\begin{aligned} \overline{\nu}_{jk}(x) - \frac{1}{2\tau} \int_0^\tau \overline{\nu}_{jk}(\zeta) [\operatorname{ctg}(\pi(\zeta - x)/2\tau) - \operatorname{ctg}(\pi(\zeta + x)/2\tau)] d\zeta &= d_{jk}(x) \equiv \\ &\equiv \gamma_{jk} [\mu_{jk}(x) - P'_{jk}(x, 0)] - \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \overline{\nu}_{jk}(\zeta) M_{jk}(x, \zeta) d\zeta, \quad 0 < x < \tau, \end{aligned} \quad (34)$$

$d_{jk}(x) \in C^1(0, \tau)$, которое после преобразований и замены переменных и функций по формулам

$$\overline{\nu}_{jk}(x) = \overline{\bar{\nu}}_{jk}(y), \quad d_{jk}(x) = \bar{d}_{jk}(y), \quad y = \cos(\pi x/\tau), \quad (35)$$

примет вид

$$\overline{\bar{\nu}}_{jk}(y) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \overline{\bar{\nu}}_{jk}(t) \frac{dt}{t - y} = \bar{d}_{jk}(y), \quad -1 < y < 1. \quad (36)$$

Индекс [9] нормального сингулярного интегрального уравнения (36) равен нулю. В силу единственности решения задачи T_{jk} (16), (19)–(21) уравнение (36) однозначно обратимо в классе функций $\overline{\bar{\nu}}_{jk}(y)$, удовлетворяющих условию Гельдера при $-1 < y < 1$, методом сингуляризации [10, 11].

Действительно, действуя на обе части уравнения (36) оператором

$$Kv \equiv v(s) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 v(P) \frac{dP}{P-s},$$

используя формулу Пуанкаре—Бертрана [9] для перестановки порядка интегрирования в сингулярном повторном интеграле с ядром Коши и необходимые при этом преобразования, придем к решению уравнения (36) вида

$$\bar{v}_{jk}(y) = \frac{1}{2} \bar{d}_{jk}(y) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \bar{d}_{jk}(P) \frac{dP}{P-y}, \quad -1 < y < 1.$$

Возврат к старым переменным и функциям по формулам (35) с подстановкой правой части уравнения (34) приводит к уравнению Фредгольма [12]

$$\bar{v}_{jk}(x) + \int_0^\tau \bar{v}_{jk}(t) W_{jk}(x, t) dt = Q_{jk}(x), \quad 0 < x < \tau, \quad (37)$$

где

$$W_{jk}(x, t) = \frac{1}{2\tau} M_{jk}(x, t) + \frac{1}{4\tau^2} \int_0^\tau [\operatorname{ctg}(\pi(\zeta - x)/2\tau) - \operatorname{ctg}(\pi(\zeta + x)/2\tau)] M_{jk}(\zeta, t) d\zeta,$$

$$Q_{jk}(x) = \frac{\gamma_{jk}}{2} [\mu_{jk}(x) - P'_{jk}(x, 0)] + \frac{\gamma_{jk}}{4\tau} \int_0^\tau [\operatorname{ctg}(\pi(\zeta - x)/2\tau) - \operatorname{ctg}(\pi(\zeta + x)/2\tau)] [\mu_{jk}(\zeta) - P'_{jk}(\zeta, 0)] d\zeta,$$

причем

$$Q_{jk}(x) \in C^1(0, \tau), W_{jk}(x, t) \in C^1(0 < x, t < \tau).$$

Разрешимость уравнения [12] Фредгольма (37) следует из единственности решения задачи T_{jk} в области $\bar{D}_{00}$.

Определив $\bar{v}_{jk}(x)$ из уравнения (37), найдем $\bar{\omega}_{jk}(x)$ из (31) или (33), а затем по формулам (29) и (32) получим решения $q_{jk}^+(x, y)$ и $q_{jk}^-(x, y)$ задачи Неймана—Дирихле и Дарбу соответственно в областях D_{00}^+ и D_{00}^- . Таким образом, существование решения $q_{jk}(x, y)$ задачи T_{jk} в области $D_{00} = D_{00}^+ \cup D_{00}^- \cup I_0$ доказано.

Вернемся к задаче T для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2) в области $D = D^+ \cup D^- \cup I$. Ее решение в силу (18) и (29)

имеет в области $\bar{D}^+ = \bigcup_{j=0}^2 \left(\bigcup_{k=0}^1 \bar{D}_{jk}^+ \right)$ следующий вид:

$$\bar{U}(x, y) = \bar{U}^+(x, y + lh) = T \left(q_{00}^+(x, y) + (-1)^l q_{01}^+(x, y) \right. \\ \left. q_{10}^+(x, y) + (-1)^l q_{11}^+(x, y) \right. \\ \left. q_{20}^+(x, y) + (-1)^l q_{21}^+(x, y) \right), \\ (x, y) \in \bar{D}_{jk} \quad j = 0, 1, 2, \quad k, l = 0, 1,$$

а в области $\overline{D}^- = \bigcup_{j=0}^2 \overline{D}_{j0}^-$, согласно (18) и (32), имеем

$$\overline{U}(x, y) = \overline{U}^-(x, y) = T \begin{pmatrix} q_{00}^-(x, y) + q_{01}^-(x, y) \\ q_{10}^-(x, y) + q_{11}^-(x, y) \\ q_{20}^-(x, y) + q_{21}^-(x, y) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, теорема доказана.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Шарковский А. Н., Майстренко Ю. А., Романенко Е. Ю. *Разностные уравнения и их приложения*. Киев: Наук. думка, 1986. 280 с.
2. Онанов Г. Г., Скубачевский А. Л. Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформированного тела // *Прикл. механика*, 1979. Т. 15, № 5. С. 39–47.
3. Самарский А. А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // *Дифференц. уравн.*, 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935.
4. Маслов В. П. *Операторные методы*. М.: Наука, 1973. 544 с.
5. Ганцев Ш. Х., Бахтизин Р. Н., Франц М. В., Ганцев К. Ш. Опухолевый рост и возможности математического моделирования системных процессов // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 1. С. 131–151. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1661>.
6. Беллман Р. *Введение в теорию матриц*. М.: Наука, 1976. 352 с.
7. Франкль Ф. И. *Избранные труды по газовой динамике*. М.: Наука, 1973. 712 с.
8. Зарубин А. Н. *Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом*. Орел: ОГУ, 1997. 225 с.
9. Гахов Ф. Д. *Краевые задачи*. М.: Наука, 1977. 640 с.
10. Флайшер Н. М. Новый метод решения в замкнутой форме для некоторых классов сингулярных интегральных уравнений с регулярной частью // *Rev. Roum. Math. Pures Appl.*, 1965. Т. 10, № 5. С. 615–620.
11. Бабури Ю. С. О сингуляризации сингулярных интегральных уравнений / *Дифференциальные уравнения*, Выпуск 10. Рязань, 1977. С. 14–24.
12. Краснов М. Л. *Интегральные уравнения*. М.: Наука, 1975. 303 с.

MSC: 35M12

Nonlocal Tricomi boundary value problem for a mixed-type differential-difference equation

© A. N. Zarubin

Orel State University named after I. S. Turgenev,
95, Komsomolskaya st., Orel, 119192, Russian Federation.

Abstract

We investigate the Tricomi boundary value problem for a differential-difference leading-lagging equation of mixed type with non-Carleman deviations in all arguments of the required function. A reduction is applied to a mixed-type equation without deviations. Symmetric pairwise commutative matrices of the coefficients of the equation are used. The theorems of uniqueness and existence are proved. The problem is unambiguously solvable.

Keywords: mixed-type equation, differential-difference equation, integral equation, singular integral equation, concentrated lag and lead.

Received: 5th November, 2020 / Revised: 13th February, 2021 /

Accepted: 22nd February, 2021 / First online: 10th March, 2021

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Sharkovsky A. N., Maistrenko Yu. L., Romanenko E. Yu *Difference Equations and Their Applications*, Mathematics and Its Applications, vol. 250. Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 1993, xii+358 pp. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-1763-0>.
2. Onanov G. G., Skubachevskii A. L. Differential equations with displaced arguments in stationary problems in the mechanics of a deformable body, *Sov. Appl. Mech.*, 1979, vol. 15, no. 5, pp. 391–397. <https://doi.org/10.1007/BF01074069>.
3. Samarskii A. A. Some problems of the theory of differential equations, *Differ. Uravn.*, 1980, vol. 16, no. 11, pp. 1925–1935 (In Russian).

Research Article

The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Zarubin A. N. Nonlocal Tricomi boundary value problem for a mixed-type differential-difference equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 35–50. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1835> (In Russian).

Author's Details:

Aleksandr N. Zarubin <https://orcid.org/0000-0002-0611-5752>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Dept.; Dept. of Mathematical Analysis and Differential Equations; e-mail: aleks_zarubin@mail.ru; matdiff@yandex.ru

4. Maslov V. P. *Operatornye metody* [Operational Methods]. Moscow, Nauka, 1973, 544 pp. (In Russian)
5. Gantsev Sh., Bakhtizin R. N., Frants M. V., Gantsev K. Sh. Tumor growth and mathematical modeling of system processes, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 1, pp. 131–151 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1661>.
6. Bellman R. *Introduction to matrix analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics, vol. 19. Philadelphia, PA, 1997, xxviii+403 pp.
7. Frankl F. I. *Izbrannye trudy po gazovoi dinamike* [Selected Works on Gas Dynamics]. Moscow, Nauka, 1973, 712 pp. (In Russian)
8. Zarubin A. N. *Uravneniia smeshannogo tipa s zapazdyvaiushchim argumentom* [Mixed-Type Equations with Retarded Argument]. Orel, Orel State Univ., 1997, 225 pp. (In Russian)
9. Gakhov F. D. *Boundary Value Problems*, International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, vol. 85. Oxford, Pergamon Press, 1966, xix+564 pp. <https://doi.org/10.1016/C2013-0-01739-2>.
10. Flaysher N. M. A new closed-form solution method for some classes of singular integral equations with a regular part, *Rev. Roum. Math. Pures Appl.*, 1965, vol. 10, no. 5, pp. 615–620 (In Russian).
11. Baburin Yu. S. On the singularization of singular integral equations, In: *Differentsial'nye uravneniia* [Differential Equations], Issue 10. Ryazan, 1977, pp. 14–24 (In Russian).
12. Krasnov M. L. *Integral'nye uravneniia* [Integral Equations]. Moscow, Nauka, 1975, 303 pp. (In Russian)