Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Стружанов, В. И. Миронов, В. К. Тарташник, Об одном подходе к расчету долговечности при циклическом нагружении, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 26, 94–101

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu184>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 15:43:24

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РАСЧЕТУ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Предлагается новый подход к расчету долговечности элементов конструкций при циклическом нагружении, основанный на взаимосвязи разрушения и потери устойчивости процесса деформирования. Для этого введены в рассмотрение неустойчивые состояния материала, характеризующиеся падающими ветвями полных диаграмм деформирования, деградирующих в ходе переменного нагружения. Основные положения методики проиллюстрированы на примерах усталостного разрушения однонаправленного композита (пучка волокон) при одноосном циклическом деформировании.

Введение. Элементы машин, как правило, работают в условиях циклического нагружения. Достоверная оценка их долговечности является одним из основных факторов, влияющих на создание высоконадежной техники. В настоящее время в расчетах на долговечность наиболее распространено использование критериев, которые утверждают, что разрушение произойдет тогда, когда в какой-либо точке тела в результате циклического нагружения некоторая скалярная величина достигнет своего критического значения [1]. Однако возможен и другой подход, заключающийся в том, что разрушение связывается с моментом потери устойчивости процесса деформирования конструктивного элемента. Для статического нагружения это утверждение обоснованно в работах [2,3] и опирается на введение в рассмотрение неустойчивых состояний материала (стадии разупрочнения), характеризующихся падающими ветвями полных диаграмм деформирования. В данной работе сформулированный в [2,3] подход распространяется на задачу усталостного разрушения. В основу положено вырождение полной диаграммы квазистатического деформирования в ходе циклического нагружения, которое в расчетах усталостной долговечности, по-видимому впервые, было использовано в [4].

Критерии разрушения образца при квазистатическом растяжении в испытательной

машине. Используя аппарат, приведенный в [2], и опуская необязательные для данного случая математические подробности, определим критерии разрушения образца, растягиваемого в некоторой испытательной машине. Систему образец-машина схематически представим в виде последовательного соединения образца 1 и передающего усилие упругого стержня 2 с жесткостью c , равной жесткости машины (рис.1). Нагружение осуществляем, прилагая к свободному концу стержня 2 силу p (мягкое нагружение), либо задавая перемещение u (жесткое нагружение). Пере-

Р и с. 1. Схематическое представление системы образец (1) – машина (2)

мещение правого конца образца, скрепленного со стержнем 2, обозначим v . Полагаем, что свойства образца определяет полная диаграмма деформирования в координатах растягивающее усилие q – удлинение v . Основной особенностью данной диаграммы является наличие ниспадающей до нуля ветви, т. е. после достижения предела прочности q^B , деформирование образца происходит в неустойчивом режиме, когда усилие падает, а удлинение растет. Если удастся сохранить равновесие, то разделение образца на части (разрушение) происходит в конце падающего участка. Отметим, что данные диаграммы неоднократно были построены на установках различного типа [5,6]. Для дальнейшего анализа конкретный вид падающего участка полной диаграммы не имеет принципиального значения. Существенен лишь факт его существования.

Следуя [2,7], запишем выражение для полной энергии системы образец-машина для случая мягкого нагружения. В результате имеем

$$\Pi = \int_0^v q dv + \frac{c}{2}(u - v)^2 - \int_0^u p du .$$

Здесь первое слагаемое – энергия деформации образца, второе – потенциальная энергия упруго деформированных деталей машины (стержня 2), третье – работа внешней силы p , взятая со знаком минус. Задаваемые величины c, p играют роль параметров управления системой, переменные v, u – параметров состояния. Так как при активном нагружении система является консервативной, то для всевозможных значений параметров c и p все положения равновесия системы определяются следующими уравнениями:

$$\frac{d\Pi}{dv} = q - c(u - v) = 0, \quad \frac{d\Pi}{du} = c(u - v) - p = 0. \quad (1)$$

Совокупность критических точек (v, u, c, p) функции Π (решений уравнений (1)) образует так называемое многообразие катастрофы [7].

В случае жесткого нагружения параметрами управления являются u и c , а параметром состояния – переменная v . Критические точки находятся из решения первого уравнения системы (1). Их отображение $(v, u, c) \rightarrow (v, u, c^{-1})$ также определяет многообразие катастрофы, которое для многих технических приложений с двумя параметрами управления и одним параметром состояния представляется катастрофой сборки Уитни [7].

Особую роль в данном анализе играют вырожденные критические точки, где происходит смена устойчивых положений равновесия системы на неустойчивые и наоборот [7]. Вырожденные критические точки обращают в нуль детерминант матрицы Гессе функции Π [7]. Используя это свойство для мягкого нагружения получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \Pi}{dv^2} \frac{\partial^2 \Pi}{du^2} - \left(\frac{\partial^2 \Pi}{du dv} \right)^2 = 0.$$

Отсюда в вырожденных критических точках выполняется равенство

$$\frac{dq}{dv} = 0. \quad (2)$$

В случае жесткого нагружения гессиан функции энергии системы имеет одну компоненту $\partial^2 \Pi / \partial v^2$. Приравнявая ее к нулю, получаем условие

$$\frac{dq}{dv} = -c, \quad (3)$$

выделяющее из множества критических точек вырожденные точки. Решая совместно систему (1) и уравнение (2) и первое уравнение в системе (1) и уравнение (3), получаем в пространствах уравнений бифуркационные множества B_1 и B_2 для мягкого и жесткого нагружений (рис.2,3). Известно [7], что потеря устойчивости процесса деформирования системы происходит тогда, когда путь нагружения в пространстве управления пересекает кривую B_2 (путь 1 на рис.2 и 3). В случае мягкого нагружения после пересечения прямой B_2 у системы исчезают устойчивые положения равновесия. Следовательно, образец в данный момент разрушается динамически на пределе прочности. В случае жесткого нагружения пересечение кривой

Р и с. 2. Бифуркационные множества при мягком нагружении

B_2 приводит к скачкообразному переходу из одного устойчивого положения равновесия в другое. В зависимости от величины скачка образец может либо сохранить ограниченную несущую способность при существенных повреждениях микротрещинами, либо разрушиться полностью.

Если величина c достаточно велика (всегда выполняется неравенство $\frac{dq}{dv} > -c$), то путь нагружения может не пересекать кривую B_2 (путь 2 на рис.3). Тогда разрушение образца происходит равновесно в конце падающего участка диаграммы деформирования.

Очевидно, что в общем случае бифуркационные множества, обладающие свойствами множества B_2 , играют определяющую роль в нахождении момента потери устойчивости деформирования механических систем, так как здесь впервые происходит смена устойчивого положения равновесия системы на неустойчивое. Вне зависимости от числа бифуркационных множеств, присущих конкретной системе, будем обозначать такие множества символом B_2 . Для

Р и с. 3. Бифуркационные множества при жестком нагружении

определения аналитического выражения кривой B_2 в случае мягкого нагружения из уравнений (1), (2) исключаем параметры состояния v, u . Получаем уравнение прямой в пространстве управления (множество B_2)

$$p = p_B = q(v^s), \quad (4)$$

где v^s – наименьший корень уравнения (2), т. е. $q(v^s) = q^B$. При жестком нагружении исключаем из первого уравнения системы (1) и уравнения (3) параметр состояния v . Находим уравнение кривой в

пространстве управления (множество B_2)

$$u_B = u(c) = c^{-1}q(v^h) + v^h,$$

где $v^h = v^h(c)$ – значения наименьших корней уравнения (3) в зависимости от параметра c .

Отметим, что функция $u(c)$ определена, если $c \in [0, c_*]$, $c_* = \left| \inf_v dq/dv \right|$, так как только при данных значениях c уравнение (3) имеет решение.

Из приведенного анализа вытекает, что разрушение образца связано с потерей устойчивости процесса деформирования всей системы образец-машина. Поэтому критериями разрушения могут служить критерии потери устойчивости. Таким образом, при мягком нагружении критерием разрушения выступает равенство (4). Критерием разрушения для жесткого нагружения является равенство

$$u = u_B \quad (5)$$

при конкретном значении параметра c .

Циклическое нагружение образца. Зададим отнулевой цикл нагружения системы с максимальным усилием $p = p_a$, величина которого такова, что материал образца (по крайней мере на начальных циклах) работает в области упругости. Полагаем, что процесс циклирования состоит из последовательности n статических растяжений. В пространстве управления в каждом цикле данное нагружение происходит по пути 1 до точки А (рис.2). На некотором цикле растяжения ($n=N_p$) образец разрушается. Как следует из рассуждений, приведенных выше, при разрушении путь нагружения должен пересечь бифуркационное множество B_2 . Так как $p_a = \text{const}$, то такое пересечение возможно лишь в том случае, когда прямая B_2 займет B_2' , т. е. опустится до точки А (рис. 2). Положение бифуркационных множеств в пространстве управления зависит от характеристик полной диаграммы деформирования образца. Следовательно, в ходе циклирования эта диаграмма изменяет свой вид (деградирует). Данное изменение описывается некоторой двухпараметрической функцией $q = q(v, p_a, n)$. Тогда из условия (4) следует критерий усталостного разрушения

$$p_a = q(v^s, p_a, n), \quad (6)$$

отражающий снижение предела прочности образца до уровня максимального усилия цикла. Здесь $v^s = v^s(p_a, n)$ – наименьшее решение уравнения (2), в котором $q = q(v, p_a, n)$. Разрешая уравнение (6) относительно n получим число циклов до разрушения N_p , принадлежащее, очевидно, диаграмме Велера.

Рассмотрим теперь стационарное циклирование с контролем максимального перемещения u_a . Очевидно, что и при этом варианте циклирования происходит вырождение диаграммы $q(v)$, определяемое теперь двухпараметрической функцией $q = q(v, u_a, n)$. Пусть путь нагружения в пространстве управления для каждого цикла задает прямая, лежащая на пути 1 до точки К (рис.3). Образец разрушится, если бифуркационное множество B_2 , изменяя свое положение от цикла к циклу, при некотором $n=N_u$ пройдет через точку К (кривая B_2' , рис.3). Используя условие (5), получаем критерий усталостного разрушения в виде уравнения

$$u_a = u_B(c, u_a, n) = c^{-1}q(v^h, u_a, n) + v^h, \quad (7)$$

где $v^h = v^h(u_a, n)$ – наименьшее решение уравнения (3) при $q = q(v, u_a, n)$, которое существует для $c \in [0, c^*]$, $c^* = \left| \inf_v dq(v, u_a, n)/dv \right|$. Решение уравнения (7) относительно n при фиксированном параметре c дает искомую долговечность N_n .

При данной схеме циклирования возможен еще вариант, когда уравнение (7) не имеет решения, т. е. в процессе деградации диаграммы $q(v)$ падающая ветвь становится слишком положительной (уравнение (3) не имеет решения для заданного c). Тогда образец разрушается равновесно с падением несущей способности и, следовательно, максимального усилия цикла до нуля. В этом случае бифуркационное множество B_2 уходит от пути нагружения.

Таким образом, в основу проведенного анализа, как в случае квазистатического растяжения, так и в случае циклического нагружения, положен единый подход, основанный на определении разрушения образца как катастрофы (потери устойчивости процесса деформирования системы образец – машина). Отличие заключается лишь в том, что при статическом нагружении система приближается к катастрофе, а при циклическом нагружении катастрофа надвигается на систему, причем иногда это приближение не заканчивается катастрофическим разрушением (катастрофа «проходит стороной»).

Вырождение диаграммы деформирования. В качестве примера рассмотрим пучок одинаковых упруго-хрупких волокон, расположенных параллельно друг другу. При продольном растяжении деформация волокон равна деформации пучка ϵ . Прочность волокон равномерно распределена на замкнутом интервале напряжений $[s_1, s_2]$. Поперечным взаимодействием пренебрегаем.

Сначала найдем связь между условным напряжением пучка и деформацией ϵ при квазистатическом растяжении. Имеем [8]:

$$\sigma(\epsilon) = E \epsilon (1 - \omega(\epsilon)),$$

где $\omega = \{0, 0 \leq \epsilon < e_1; (E\epsilon - s_1)/(s_2 - s_1), e_1 < \epsilon < e_2\}$ – поврежденность, равная объемной доле разрушенных волокон; E – модуль упругости волокон; $e_1 = s_1/E$, $e_2 = s_2/E$. Качественный характер диаграммы $\sigma(\epsilon)$ показан на рис.4 (кривая 1) для случая, когда $s_2 > 2s_1$.

Подвергнем пучок пульсирующему циклическому нагружению. Полагаем, что характеристики упругого деформирования волокон не изменяются, их долговечности не зависят от уровня напряжений. Для любого множества волокон, пределы прочности которого расположены в конечных отрезках $[s_i, s_j] \subset [s_1, s_2]$

($s_i \geq s_1$, $s_j \leq s_2$, $s_j > s_i$) долговечность равномерно распределена на замкнутом интервале числа циклов нагружения $[N_1, N_2]$. Кроме того, разрушенные в ходе циклирования волокна не изменяют интервала $[s_1, s_2]$. Данные допущения весьма существенны. Однако они позволяют существенно упростить задачу, не искажая качественной картины.

Пусть в ходе циклирования поддерживается постоянное значение амплитуды деформации пучка ϵ_a ($\epsilon_a < e_1$). Тогда зависимость между условным напряжением и деформацией пучка приобретает вид

$$s(e, n) = E (1 - k(n)) (1 - w(e)),$$

где $k(n) = \{0, 0 \leq n \leq N_1; (n - N_1)/(N_2 - N_1), N_1 \leq n \leq N_2\}$ – циклическая поврежденность, равная объемной доле усталостно разрушенных волокон. Характер изменения статической диаграммы растяжения пучка показан на рис.4. Очевидно, что полное разрушение пучка произойдет при нулевом напряжении, когда диаграмма выродится в прямую линию.

Если поддерживать постоянным амплитудное условное напряжение σ_a ($\sigma_a < s_1$), то характер изменения статической диаграммы будет более сложным. Вместе с падением модуля пучка

Р и с. 4. Вырождение статической диаграммы пучка при постоянном уровне амплитудной деформации

из-за усталостного разрушения волокон будет монотонно расти деформация ε_a . В этом случае, после того, как деформация ε_a достигнет значения e_1 , в рамках цикла неизбежен выход на нелинейную часть диаграммы деформирования. Тогда

$$\sigma(\varepsilon, n) = E_n \varepsilon (1 - \omega_\varepsilon), \quad (8)$$

где $E_n = E(1 - \kappa(n))(1 - \omega_a(\varepsilon))$ – модуль упругости пучка после n -го цикла нагружения;
 $\omega_a = \{0, \varepsilon_a(n) \leq e_1; (E\varepsilon_a(n) - s_1)/(s_2 - s_1), \varepsilon_a(n) > e_1\}$ – поврежденность от растяжения в рамках цикла; $\omega_\varepsilon = \omega$, если $\varepsilon_a \leq e_1$, и $w_\varepsilon = \{0, e < e_a; (Ee - Ee_a(n))/(s_2 - Ee_a(n)), e \geq e_a\}$ при $\varepsilon_a > e_1$ – поврежденность, возникающая при послещикловом квазистатическом растяжении.

Р и с. 5. Вырождение статической диаграммы пучка при постоянном уровне амплитудного условного напряжения

Р и с. 6. Вырождение статической диаграммы пучка при монотонном возрастании амплитудной деформации e_a

Характер изменения статической диаграммы растяжения пучка показан на рис.5. В ходе вырождения статической диаграммы происходит падение предела прочности пучка. Разрушение произойдет динамически тогда, когда $\sigma_a = \sigma^B(n)$ и $\varepsilon_a(n) = \varepsilon^B$, где $\varepsilon^B = e_2/2$ – деформация, отвечающая пределу прочности пучка при квазистатическом растяжении.

Реализация в течении длительного времени приведенных схем нагружения для элемента конструкции, находящегося в составе механической системы, практически невозможна. Поэтому рассмотрим еще циклическое нагружение при монотонно возрастающей амплитуде деформации $\varepsilon_a = \varepsilon_a(n)$. Вырождение диаграммы и в этом случае определяет формула (8) с той разницей, что ε_a является известной функцией. На рис.6 на качественном уровне показано изменение диаграммы пучка $\sigma(\varepsilon)$ (кривая 1) в зависимости от возрастающего числа циклов нагружения и возрастающей функции $\varepsilon_a(n)$. Кривые 2, 3 ($n_3 > n_2$) при $\varepsilon_a < e_1$, кривые 4, 5 ($n_4 > n_3$) для $\varepsilon_a > e_1$.

В ходе вырождения статической диаграммы происходит падение предела прочности пучка. Когда $\varepsilon_a(n) \leq \varepsilon^B$, где

$\varepsilon^B = e_2/2$ – деформация, отвечающая пределу прочности пучка при квазистатическом растяжении, падение прочности пучка происходит в соответствии с законом

$$\sigma^B(n) = 0,25 s_2^2 (1 - \kappa(n))/(s_2 - s_1). \quad (9)$$

Если же $\varepsilon_a(n) > \varepsilon^B$, то $\sigma^B(n) = E_n \varepsilon_a(n)$. Отметим, что полученные соотношения не зависят от длины волокон и площади поперечного сечения пучка.

Циклическое растяжение пучка в испытательной машине. Поместим теперь пучок единичной длины и единичной площади поперечного сечения вместо образца в испытательную установку (рис.1) и осуществим пульсирующее циклическое нагружение с постоянным максимальным усилием цикла $p_a < s_1$. При этом на пучок передается усилие $q_a = p_a$ и среднее напряжение σ_a по величине равно p_a . Пучок получает удлинение v_a , по величине совпадающее с ε_a . В ходе циклирования в связи с падением модуля пучка параметр ε_a постепенно возрастает по закону $\varepsilon_a(n) = p_a/E_{n-1}$. Разрушение произойдет тогда, когда величина ε_a достигнет значе-

ния ε^B (в данный момент выполняется равенство (6)). Используя выражение (9), из формулы (6) находим число циклов до разрушения $N_p = N_2 - 4p_a(s_2 - s_1)(N_2 - N_1)/(s_2^2)$. Заметим, что в момент разрушения $\kappa < 1$. В пучке еще сохранились целые волокна, которые при $n = N_p$ разрушаются динамически.

Исследуем теперь циклическое нагружение с контролем максимального перемещения $u_a = \text{const}$, величина которого удовлетворяет неравенству

$$u_a \leq (e_1 + E c^{-1} e_1) l, \quad (10)$$

гарантирующему, по крайней мере на начальных циклах, деформирование волокон в области упругости ($l=1\text{ мм}$).

Сначала найдем значение $c^* = \left| \inf_{\varepsilon} d\sigma/d\varepsilon \right|$, где σ задано выражением (8). Получаем $c^* = Es_2(N_2 - n)/[(N_2 - N_1)(s_2 - s_1)]$ (касательный модуль полной диаграммы в данной задаче всегда имеет наименьшее значение при $\varepsilon = e_2$). Исходя из выражения для c^* , зададим жесткость упругого элемента установки выражением $c = Es_2/[k(s_2 - s_1)]$, $k > 1$. Тогда наименьшее решение уравнения (3) (оно и единственное) равно

$$\varepsilon^h = \frac{s_2}{2E} \frac{N_2(k+1) - kn - N_1}{k(N_2 - n)}.$$

Отметим, что это решение существует только для $n \leq [N_2(k-1) + N_1]/k$. Далее, считая $e_2 = \alpha e_1$ ($\alpha \geq 2$), из неравенства (10) имеем предельное значение

$$u_a = e_1 \left[1 - k \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right].$$

Подставляя выражение для ε^h и данное u_a в формулу (7), получаем уравнение

$$1 + k \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{\alpha}{2} \frac{[k(N_2 - n) + (N_2 - N_1)]^2}{2k(N_2 - n)(N_2 - N_1)},$$

которое не имеет решения, так как правая часть всегда больше левой.

Таким образом, в условиях данной задачи при циклировании катастрофы не происходит. Пучок разрушается равновесно и его долговечность равна N_2 (катастрофа уходит с пути нагружения).

Долговечность защитного покрытия трубы. В заключении исследуем на долговечность тонкое (единичной толщины) защитное покрытие толстостенной трубы, выполненное из волокнистого композитного материала. Волокна расположены перпендикулярно к образующей трубы. Влиянием связующего пренебрегаем, т. е. полагаем, что свойства покрытия идентичны свойствам пучка, рассмотренного выше. Труба нагружается пульсирующим внутренним давлением с максимальной величиной давления в цикле p_m , при котором напряжение в композите меньше s_1 . Считаем, что циклические свойства материала трубы значительно выше, чем у композита, то есть циклическое разрушение покрытия происходит раньше, чем в трубе появляются повреждения, приводящие к изменению механических свойств.

В случае плоской деформации, имеющем место в данной задаче, поведение системы покрытие-труба характеризует полная энергия, определенная только для одного сечения. Полагая площадь поперечного сечения покрытия равной единице, имеем

$$\Pi_c = \Pi_k + \Pi_T - 2\pi a \int_0^w p dw,$$

$$\text{где } \Pi_k = 2\pi b \int_0^{\varepsilon_0} \sigma_\theta(\varepsilon_\theta, n) d\varepsilon_\theta = \begin{cases} \pi E(1-\kappa)v^2 b^{-1}, & v \leq b e_1; \\ [g_1 v^3 + g_2 v^2 + g_3](1-\kappa), & b e_1 < v \leq b e_2; \\ [g_1 (b e_2)^3 + g_2 (b e_2)^2 + g_3](1-\kappa), & v > b e_2 - \end{cases}$$

энергия деформации покрытия;

$$\Pi_T = 2\pi \int_a^b (\sigma'_r \epsilon'_r + \sigma'_\theta \epsilon'_\theta) r dr = m_1 v^2 - m_2 v w + m_3 w^2 -$$

потенциальная энергия деформации трубы. Здесь a, b – внутренний и внешний радиусы трубы; $\sigma_\theta(\epsilon_\theta, n)$ – напряжение в покрытии, заданное зависимостью (8); $\epsilon_\theta = v/b$ – деформация покрытия; w, v – радиальные перемещения точек внутренней и внешней поверхностей трубы; $\sigma'_r, \sigma'_\theta, \epsilon'_r, \epsilon'_\theta$ – радиальные и тангенциальные напряжения и деформации в трубе, которые получаем из известного решения задачи Ляме при заданных на границах перемещениях w и v ; p – квазистатически возрастающее давление;

$$g_1 = -2\pi E^2 [3b^2(s_2 - s_1)]^{-1}, \quad g_2 = \pi E s_2 [b(s_2 - s_1)]^{-1}, \quad g_3 = -2\pi b s_1^3 [6E(s_2 - s_1)]^{-1},$$

$$m_1 = p \quad a \quad [(1 - 2\nu') \quad a^2 + b^2] (b^2 - a^2)^{-1}, \quad m_2 = 4ab(1 - \nu') \quad p a \quad (b^2 - a^2)^{-1},$$

$$m_3 = \pi \alpha [a^2 + (1 - 2\nu')b^2] (b^2 - a^2)^{-1}, \quad \alpha = E'[(1 + \nu')(1 - 2\nu')]^{-1};$$

E', ν' – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала трубы. Параметрами управления являются p и $d = b - a$, параметрами состояния – w, v .

Отметим, что в ходе циклирования деформация покрытия возрастает от цикла к циклу по закону

$$\epsilon_a = 2\pi a m_2 p_m / [4\pi^2 \alpha^2 b(1 - 2\nu') + 4\pi E m_3(1 - \kappa)]$$

и может превысить значение e_1 . Например, для

$$p_m = \epsilon_a^m [4\pi^2 \alpha^2 b(1 - 2\nu') + 4\pi E m_3] / 2\pi a m_2, \quad (11)$$

где $\epsilon_a^m = \beta e_1$ ($\beta \leq 1$), это произойдет после числа циклов

$$n = N_2 - \lfloor \beta - (1 - \beta)\pi \alpha^2 b(1 - 2\nu') / E m_3 \rfloor (N_2 - N_1).$$

Тогда энергию деформации покрытия при статическом нагружении будет определять выражение

$$\Pi_k = \begin{cases} E(1 - \kappa(n))(1 - w_a(\epsilon_a))\pi v^2 b^{-1}, & v \leq b\epsilon_{\theta a} (\epsilon_{\theta a} = \epsilon_a); \\ (g'_1 v^3 + g'_2 v^2 + g'_3)(1 - \kappa(n)), & b\epsilon_{\theta a} < v \leq b e_2; \\ [g'_1 (b\epsilon_{\theta a})^3 + g'_2 (b\epsilon_{\theta a})^2 + g'_3](1 - \kappa(n)), & v > b e_2, \end{cases}$$

где $g'_1 = g_1, \quad g'_2 = g_2, \quad g'_3 = -\pi b E^2 \epsilon_a^2 [3(s_2 - s_1)]^{-1}$.

Бифуркационные множества в пространстве управления определяются решениями системы уравнений

$$\frac{\partial \Pi_c}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \Pi_c}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Pi_c}{\partial v^2} \frac{\partial^2 \Pi_c}{\partial w^2} - \left(\frac{\partial^2 \Pi_c}{\partial v \partial w} \right)^2 = 0, \quad (12)$$

последнее из которых получается приравнованием к нулю детерминанта матрицы Гессе функции Π_c .

Построим множества B_2 для конкретных числовых значений: $s_1 = 610$ МПа, $s_2 = 1250$ МПа, $E = 2,9 \cdot 10^5$ МПа (бериллиевые волокна [9]), $E' = 0,7 \cdot 10^5$ МПа (лагуны), $\nu' = 0,3, b = 50$ мм, $N_1 = 6 \cdot 10^5, N_2 = 10^6$. Вычисления проводим, изменяя внутренний радиус трубы от $a = 10$ мм до $a = 49$ мм. Подставляя выражение для Π_c в формулы (12) и исключая параметры состояния u и v , находим критические величины p для заданных значений циклов нагружения n_i . По ним для различных a строим бифуркационные множества B_2 , где происходит переход от устойчивых положений равновесия к неустойчивым. Эти множества изображены на рис.7, где кривая 1 построена для $n_1 = N_1$, кривая 2 для $n_2 = 7 \cdot 10^5$, кривая 3 для $n_3 = 8 \cdot 10^5$, кривая 4 для $n_4 = 9 \cdot 10^5$. Далее по формуле (11), где полагаем $\epsilon_a^m = e_1$, рассчитаем для различных внутренних радиусов предельные значения p_m , обеспечивающие на начальных циклах работу покрытия в области упругости. Получаем $p_m = 32,39; 27,7; 23,32; 19,17; 15,37; 11,77$ МПа соответственно для $a = 43, \dots, 48$ мм. Пусть $p_m = 10$ МПа. Точки пересечения соответствующей прямой с бифурку-

ционными кривыми (рис.7) определяют толщину трубы и число циклов нагружения, при которых реализуется катастрофическое разрушение покрытия. Например, если $a = 48,57$ мм, то катастрофа произойдет при $n_4 = 9 \cdot 10^5$. Данные результаты кроме того показывают, что всегда существуют такие размеры трубы, которые обеспечивают равновесное (не катастрофическое) разрушение покрытия. Для $p_m = 9$ МПа равновесное разрушение покрытия обеспечивает величина $a < 48,57$ мм. Если же $a \leq 43,5$ мм, то равновесное разрушение происходит при любом усилии в цикле.

Р и с. 7. Бифуркационные множества для покрытия при циклическом нагружении трубы

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение. М.: Мир, 1984. 624 с.
2. Стружанов В.В. О разрушении диска с ослабленной центральной зоной, //Изв. АН СССР. МТТ. 1986. №1. С. 135-141.
3. Стружанов В.В. Об одном подходе к исследованию разрушения механических систем // Проблемы прочности. 1987. №6. С. 57-63.
4. Волков С.Д., Миронов В.И. Устойчивость процесса усталостного разрушения конструкционных материалов // Уральский политех. ин-т. Свердловск, 1981. 72с.: ил. библи. 12 назв. Деп. в ВИНТИ 02.12.81. № 5459-81.
5. Лебедев А.А., Чаусов Н.Г. Установка для испытания материалов с построением полностью равновесных диаграмм деформирования // Проблемы прочности. 1981. №12. С. 104-105.
6. Миронов В.И., Микушин В.И., Владимиров А.П. и др. Установка для определения механических свойств материала на стадии разупрочнения // Завод. лаборатория. 2001. Т.67. №3. С. 48-51.
7. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 608 с.
8. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 752 с.
9. Анциферов В.Н., Соколкин Ю.В., Таишинов А.А. и др. Волокнистые композиционные материалы на основе титана. М.: Наука, 1990. 136 с.

Поступила 21.01.2004 г.