Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Радченко, П. И. Краснощеков, А. Ф. Федотов, Контактнo-стержневая модель пластического деформирования порошковых материалов, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 26, 102–107

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu185>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 14:25:59

КОНТАКТНО-СТЕРЖНЕВАЯ МОДЕЛЬ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОРОШКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

Предложена структурная модель, учитывающая контактную природу пластического деформирования порошкового тела. Модель представляет собой хаотично ориентированную контактно-стержневую систему, которая испытывает однородную деформацию растяжения-сжатия. Контактная-стержневая модель удовлетворяет граничным условиям для состояния насыпной плотности и показывает хорошее соответствие с экспериментальными данными по изостатическому прессованию металлических порошков.

Континуальные теории пластического деформирования пористых и порошковых материалов строятся на результатах структурного моделирования. Макроскопические характеристики квазиоднородных несплошных тел получаются в результате осреднения локальных характеристик материала по принятому представительному объему. Поэтому способ осреднения в итоге определяет адекватность континуальных моделей механического поведения пористых и порошковых тел.

При конструировании механических моделей несплошных тел мощность диссипируемой энергии связывают только с пластической деформацией вещества (постулат В.В. Скорохода об однозначности диссипативной функции). Статистическое осреднение локальных напряжений и деформаций проводят по всему объему твердой фазы [1]. Объем, по которому выполнено осреднение силовых или кинематических параметров, находится в однородном напряженно-деформированном состоянии (НДС). Поэтому осреднение по всему объему вещества несплошного тела означает, что независимо от вида макроскопической деформации все вещество испытывает однородную деформацию растяжения-сжатия или сдвига [1, 2]. В рамках этой модели диссипативные функции несплошного тела D и его вещества с однородным НДС D_0 будут связаны зависимостью

$$D = \rho D_0, \quad (1)$$

где ρ – объемная доля твердой фазы или относительная плотность. Из (1) следует эллиптическое условие пластичности для сжимаемых пористых тел с идеально-пластической твердой фазой [3]:

$$\sigma^2 / 2\psi + T^2 / \varphi = \rho \tau_0^2, \quad (2)$$

где σ – среднее напряжение; T – интенсивность касательных напряжений сдвига; τ_0 – предел текучести на сдвиг вещества твердой фазы; ψ, φ – функции относительной плотности ρ , равные: $\psi = 2\rho^3/3(1-\rho)$, $\varphi = \rho^2$. В (2) интенсивность касательных напряжений сдвига T определяется через компоненты девиатора напряжений s_{ij} соотношением $T = \sqrt{0,5 s_{ij} s_{ij}}$ и отличается от используемой в [3] интенсивности касательных напряжений $\tau = \sqrt{s_{ij} s_{ij}}$. Это приводит к появлению множителя 2 перед функцией ψ . При допущении об однородности полей деформаций или напряжений во всем объеме твердой фазы условие пластичности, аналогичное условию (2), получается как в рамках стохастических моделей [4-7], так и при обобщении гипотезы Бельтрами на пористые тела [8, 9].

Условие пластичности (2) часто применяют для порошков при схемах деформирования в замкнутых объемах с преобладанием сжимающих нагрузок [9, 10]. В отличие от пористых тел пластическая деформация порошков в состоянии насыпной плотности, когда $\rho = \rho_0$, начинается при произвольно малых нагрузках. Вместе с тем из (2) следует, что для состояния насыпной плотности сопротивление порошка чистому сдвигу T отлично от нуля: $T = \tau_0 \sqrt{\rho_0 \varphi}$. Следовательно, структурная модель с осреднением локальных напряжений и скоростей деформаций по всему объему вещества не удовлетворяет граничным условиям для начального (насыпного) состояния порошкового тела.

В ряде работ [11, 12] отсутствие сопротивления деформации порошков при насыпной плотности учитывается через функции пористости ψ , ϕ . В этом случае проводят нормировку функций ψ и ϕ : вместо относительной плотности ρ используется параметр вида

$$\bar{\rho} = \frac{\rho - \rho_0}{1 - \rho_0}, \quad (3)$$

который принимает нулевое значение при $\rho = \rho_0$. При этом нормируется либо один [11], либо все аргументы ρ [12], входящие в функции ψ и ϕ . Такой подход носит формально-математический характер и не имеет физического обоснования. В настоящей работе предлагается вариант структурной модели, учитывающий контактную природу пластического деформирования порошковых тел.

Пусть порошковое тело нагружено однородным полем макронапряжений σ_{ij} , скольжения частиц нет и уплотнение происходит за счет пластической деформации частиц. Выделим элементарную ячейку объемом V , в которую вписана деформированная частица порошка объемом V_0 . Мощность диссипации порошкового тела в ячейке при однородном поле макронапряжений будет равна:

$$D \cdot V = \int_{V_0} \sigma'_{ij} e'_{ij} dV, \quad (4)$$

где D – удельная мощность диссипации порошкового тела; σ'_{ij} , e'_{ij} – тензоры действительного неоднородного поля микроскопических напряжений и скоростей пластических деформаций в веществе ячейки. Вместо неоднородного поля напряжений σ'_{ij} и скоростей деформаций e'_{ij} введем эквивалентное ему однородное поле напряжений σ^o_{ij} и скоростей деформаций e^o_{ij} . Пусть новое поле силовых и кинематических параметров занимает в веществе ячейки объем V_α , причем $V_\alpha \leq V_0$. Условие эквивалентного перехода сформулируем в виде равенства мощности диссипации действительных неоднородных и эквивалентных им однородных полей напряжений и скоростей деформаций:

$$\int_{V_\alpha} \sigma^o_{ij} e^o_{ij} dV = \int_{V_0} \sigma'_{ij} e'_{ij} dV. \quad (5)$$

Подынтегральное произведение в левой части (5) представляет собой диссипативную функцию пластического вещества D_0 с однородным НДС. С учетом (5) тождественное равенство диссипативных функций ячейки порошкового тела D и вещества ячейки D_0 запишется в виде

$$D = \alpha D_0, \quad (6)$$

где $\alpha = V_\alpha / V$ – объемная доля вещества ячейки с однородными полями напряжений и скоростей пластических деформаций.

Рассмотрим основное энергетическое уравнение для материального элемента объемом V_α и поверхностью S_α :

$$\int_{V_\alpha} \sigma^o_{ij} e^o_{ij} dV = \int_{S_\alpha} p^o_i v^o_i dS_\alpha, \quad (7)$$

где p^o_i – поверхностные напряжения; v^o_i – скорости перемещения. Из (7) следует, что объем V_α будет ограничен контактными площадками, на которых $p^o_i \neq 0$. Для уточнения формы контактных объемов сечением A , параллельным контактной площадке и удаленным от нее на расстояние $z = h$, выделим элемент частицы (рис. 1). Напряжения p^o_i на контактной площадке площадью S_k и нормалью $\mathbf{n}$ представим в виде суммы векторов нормальных $\mathbf{s}^o_n$ и касательных $\mathbf{t}^o_n$ напряжений, приложенных в центре тяжести площадки. Внутри сечения A находится область площадью $S_{A\alpha}$ с однородным НДС, которое характеризуется векторами нормальных $\sigma^o_{n\alpha}$ и касательных $\tau^o_{n\alpha}$ напряжений. Векторы $\sigma^o_{n\alpha}$ и $\tau^o_{n\alpha}$ приложены в центре тяжести площадки $S_{A\alpha}$. Для однородного НДС должны выполняться следующие условия:

$$\sigma^o_n = \sigma^o_{n\alpha} = const, \quad \tau^o_n = \tau^o_{n\alpha} = const. \quad (8)$$

Выясним, какой вид деформации частицы отвечает условиям однородности. С сечением A свяжем систему декартовых координат, направив ось z вдоль вектора S_n^0 , а ось y – параллельно вектору t_n^0 . Из уравнения равновесия элемента

$$\sum m_x = 0, \quad \tau_n^0 S_K h - \int_{S_{\alpha}} \sigma_{n\alpha} y dS = 0 \quad (9)$$

следует, что касательные напряжения на контактной площадке t_n^0 вызывают изгиб и неоднородное распределение нормальных напряжений $\sigma_{n\alpha}$ по области $S_{A\alpha}$. Кроме того, напряжения изгиба $\sigma_{n\alpha}$ возрастают пропорционально расстоянию h . Поэтому при однородном НДС контактные площадки должны быть свободны от касательных напряжений и элемент частицы испытывает центральное одноосное сжатие.

Р и с. 1. Схема деформирования частицы порошка

Р и с. 2. Схема одноосного сжатия частицы порошка

Для определения формы площадки $S_{A\alpha}$ с контактной площадкой S_K свяжем систему декартовых координат, направив ось z параллельно вектору S_n^0 . Начало координат поместим в произвольную точку границы контактной площадки (рис. 2). Положение центров тяжести площадок в принятой системе координат определяют радиус-векторы r_{cK} и $r_{c\alpha}$. Векторы r_{0K} и $r_{0\alpha}$, равные и противоположные векторам r_{cK} и $r_{c\alpha}$, в системе координат, связанной с центром тяжести, характеризуют форму площадок. Поэтому координаты центров тяжести, взятые с противоположным знаком, будут однозначно соответствовать координатам точек границ площадок. Координаты центра тяжести $C_{\alpha}(x_{c\alpha}, y_{c\alpha}, h)$ площадки $S_{A\alpha}$ и центра тяжести $C_K(x_{cK}, y_{cK}, 0)$ площадки S_K определим из следующих уравнений равновесия:

$$\sum F_{kz} = 0; \quad \sigma_n^0 S_K - \sigma_{n\alpha}^0 S_{A\alpha} = 0; \quad (10)$$

$$\sum m_x = 0; \quad \sigma_n^0 S_K y_{cK} - \sigma_{n\alpha}^0 S_{A\alpha} y_{c\alpha} = 0; \quad (11)$$

$$\sum m_y = 0; \quad \sigma_n^0 S_K x_{cK} - \sigma_{n\alpha}^0 S_{A\alpha} x_{c\alpha} = 0. \quad (12)$$

Учитывая, что $\sigma_{n\alpha}^0 = \sigma_n^0$, получим, центры тяжести площадок, имеющие одинаковые координаты x, y :

$$x_{c\alpha} = x_{cK}, \quad y_{c\alpha} = y_{cK} \quad (13)$$

и находящиеся на общей нормали к площадкам. Аналогичным образом будут расположены любые две точки границ площадок S_K и $S_{A\alpha}$ и, следовательно, эти площадки имеют одинаковую форму. Поэтому вещество ячейки с однородным НДС будет находиться внутри прямого цилиндра с контактной площадкой в основании.

Таким образом, в связи с локальным нагружением частицы через контактную площадку единичный объем осреднения кинематических и силовых параметров представляет собой прямой цилиндр с контактной площадкой в основании. Суммарный объем осреднения V_{α} будет состоять из совокупности цилиндров, построенных на всех контактных площадках частицы и имеющих общее ядро, образованное пересечением образующих цилиндров. В целом пластически деформируемое порошковое тело представляет собой хаотично ориентированную контак-

но-стержневую систему, которая состоит из цилиндров, контактирующих своими основаниями, и испытывает однородную деформацию растяжения-сжатия.

При установлении количественной связи между диссипативными функциями порошкового тела D и вещества ячейки D_α не требуется выполнять прямое вычисление объема V_α . Для этого достаточно знать долю контактного объема α . Вероятностный анализ структурных характеристик порошковых материалов выполнен в [13, 14]. Согласно [13] доля контактного объема α для текущей относительной плотности ρ составляет:

$$\alpha = \rho^2 \left(\frac{\rho - \rho_0}{1 - \rho_0} \right)^b. \quad (14)$$

Зависимость $\alpha(\rho)$, полученная в работе [14], имеет следующий вид:

$$\alpha = \rho^2 \left(1 - \left(\frac{\ln \rho}{\ln \rho_0} \right)^b \right). \quad (15)$$

Здесь b – эмпирическая константа, которая для моносферических порошков равна $b = 1$. Уравнение, аналогичное уравнению (14) при $b = 1$, получено в [15] из модели уплотнения за счет роста радиусов сферических частиц вокруг фиксированных центров с дальнейшим перекрытием сфер и образованием шеек контакта. В состоянии насыпной плотности ($\rho = \rho_0$) объемная доля пластически деформируемого вещества α и диссипативная функция D порошкового тела равны нулю. Тем самым обеспечивается выполнение граничных условий для насыпного состояния порошка.

Для решения краевых задач пластического деформирования порошковых тел необходимо знать определяющие соотношения между макроскопическими напряжениями σ_{ij} и скоростями деформации e_{ij} . Зависимость $\sigma_{ij}(e_{ij})$ следует из определения диссипативной функции:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial D}{\partial e_{ij}}. \quad (16)$$

С учетом (6) уравнение (16) запишется следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \alpha \frac{\partial D_0}{\partial e_{ij}}. \quad (17)$$

Чтобы воспользоваться соотношением (17), необходимо установить функциональную зависимость между диссипативной функцией вещества D_0 и макроскопическими скоростями деформации порошкового тела e_{ij} с различной реологией твердой фазы. Диссипативная функция D_0 выражается через интенсивность скоростей деформации сдвига несжимаемого вещества W и его реологические константы [15, 16]:

$$\text{линейно-вязкое тело:} \quad D_0 = \frac{1}{2} \eta_0 W^2; \quad (18)$$

$$\text{идеально-пластическое тело:} \quad D_0 = \tau_0 W; \quad (19)$$

$$\text{нелинейно-вязкое тело:} \quad D_0 = \frac{1}{n+1} A W^{n+1}. \quad (20)$$

В итоге задача сводится к определению зависимости интенсивности микроскопической скорости деформации сдвига W от макроскопических скоростей деформации e_{ij} . Для определения искомой связи $W(e_{ij})$ воспользуемся теорией вязкого и пластического течения пористых тел, изложенной в работах [3, 16, 17]. В основу теории положена следующая гипотеза: зависимость осредненной интенсивности скоростей деформации сдвига твердой фазы W от макроскопических скоростей деформаций e_{ij} инвариантна относительно реологических свойств твердой фазы. На основании этой гипотезы находится зависимость $W(e_{ij})$ для линейно-вязкого тела, а затем выполняется обобщение на тела другой реологии.

Для линейно-вязкого сжимаемого материала диссипативная функция имеет вид

$$D = \frac{1}{2} (\zeta e^2 + \eta H^2), \quad (21)$$

где e – макроскопическая скорость объемной деформации; H – интенсивность макроскопических скоростей деформации сдвига; ζ, η – коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости. Коэффициенты вязкости ζ и η пористого тела выражаются через коэффициент сдвиговой вязкости вещества η_0 и функции пористости:

$$\zeta = 2\psi\eta_0, \quad \eta = \varphi\eta_0. \quad (22)$$

После подстановки в соотношение (6) зависимостей (18), (21) и (22) найдем выражение $W(e_{ij})$ для линейно-вязкого порошкового тела:

$$W = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{2\psi e^2 + \varphi H^2}. \quad (23)$$

Определяющие уравнения порошковых тел с различной реологией твердой фазы получим из (17) с учетом зависимостей (18) – (21) и (23):

$$\text{линейно-вязкое тело:} \quad \sigma_{ij} = 2\eta_0 \left[\left(\psi - \frac{1}{3}\varphi \right) e\delta_{ij} + \varphi e_{ij} \right]; \quad (24)$$

$$\text{идеально-пластическое тело:} \quad \sigma_{ij} = \frac{2\tau_0 \sqrt{\alpha}}{\sqrt{2\psi e^2 + \varphi H^2}} \left[\left(\psi - \frac{1}{3}\varphi \right) e\delta_{ij} + \varphi e_{ij} \right]; \quad (25)$$

$$\text{нелинейно-вязкое тело:} \quad \sigma_{ij} = 2A \left(\frac{\alpha}{2\psi e^2 + \varphi H^2} \right)^{\frac{1-n}{2}} \left[\left(\psi - \frac{1}{3}\varphi \right) e\delta_{ij} + \varphi e_{ij} \right]. \quad (26)$$

Из определяющих соотношений (25) несложно получить условие пластичности порошкового тела с идеально-пластической твердой фазой:

$$\sigma^2 / 2\psi + T^2 / \varphi = \alpha \tau_0^2. \quad (27)$$

Следует отметить, что в определяющие уравнения для линейно-вязкого порошкового тела не входит параметр α , который характеризует количество вещества, диссипирующего механическую энергию. Определяющие уравнения (24) идентичны уравнениям, полученным в [3, 17] при осреднении по всему объему твердой фазы, количественной мерой которого служит относительная плотность ρ . Таким образом, линейно-вязкое сжимаемое тело оказалось инвариантно к способу осреднению локальных напряжений и скоростей деформаций по объему вещества. Этот результат следует связать с квадратичной формой диссипативной функции линейно-вязкого тела. Для идеально-пластического и нелинейно-вязкого порошка, находящегося в состоянии насыпной плотности, когда $\alpha = 0$, деформирующие напряжения равны нулю. Так как для порошкового тела диссипация имеет место при $\alpha > 0$, то уравнение (24) можно применять только при плотности, большей, чем насыпная плотность ρ_0 .

Р и с. 3. Зависимость относительного давления изостатического прессования от относительной плотности порошков:

1 – расчет по (2); 2 – расчет по (27);
эксперимент: • – олово; ○ – свинец

В качестве экспериментальной проверки предложенной структурной модели пластически деформируемого порошкового тела рассмотрим процесс изостатического прессования металлических порошков. На рис. 3 приведены опытные данные по уплотнению при изостатическом прессовании сферических порошков свинца и олова, взятые из работы [18]. На этом же рисунке представлены зависимости между относительной плотностью ρ порошка и относительным давлением $p/2\tau_0$, рассчитанные по условиям пластичности (2) и (25).

Для расчета объемной доли пластически деформируемого вещества α в (25) использовалась зависимость (14). Насыпная плотность ρ_0 принималась равной $\rho_0 = 0,5$ (получено экстраполяцией опытных данных для олова) и значение показателя степени $b = 1$. Из рис. 3 видно, что наилучшее соответствие расчетных и экспериментальных данных во всем диапазоне изменения плотности показывает контактно-стержневая модель и связанное с ней условие пластичности (27). Расхождение расчетных и экспериментальных данных для порошка свинца следует связать с более низкой, чем $\rho_0 = 0,5$,

экспериментальных данных во всем диапазоне изменения плотности показывает контактно-стержневая модель и связанное с ней условие пластичности (27). Расхождение расчетных и экспериментальных данных для порошка свинца следует связать с более низкой, чем $\rho_0 = 0,5$,

насыпной плотностью этого материала. Величина давления при уплотнении порошкового тела пропорциональна объемной доле пластически деформируемого вещества. Структурные модели, из которых следуют уравнения (2) и (27), не учитывают локализацию пластического течения при контактном взаимодействии частиц и предполагают пластическое деформирование всего объема вещества. Поэтому расчет по уравнениям (2) и (27) показывает более высокие значения относительного давления по сравнению с экспериментом. Соответственно осреднение микроскопических параметров по всему объему твердой фазы дает верхнюю оценку, а осреднение в пределах контактных объемов частиц – нижнюю оценку макроскопических свойств порошкового материала.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Скорород В.В.* Реологические основы теории спекания. К.: Наукова думка, 1972. 152 с.
2. *Ковальченко М.С.* Теоретические основы горячей обработки пористых материалов давлением. К.: Наукова думка, 1980. 240 с.
3. *Скорород В.В., Штерн М.Б., Мартынова И.Ф.* Теория нелинейно-вязкого и пластического поведения пористых материалов // Порошковая металлургия. 1987. № 8. С. 23–30.
4. *Смыслов А.Ю.* К теории пластичности пористых сред // Изв. вузов. Машиностроение. 1980. № 4. С. 107–110.
5. *Механика композитных материалов и элементов конструкций.* Т. 1. Механика материалов. К.: Наукова думка, 1982. 368 с.
6. *Сараев Л.А.* Моделирование макроскопических пластических свойств многокомпонентных композиционных материалов. Самара: Самар. гос. ун-т, 2000. 183 с.
7. *Буряченко В.А., Липанов А.М., Кожевникова Ю.Г.* Уравнения вязкопластического деформирования упрочняющихся пористых сред. // Формирование и свойства высокодисперсных систем. Межвуз. сб. науч. трудов. Л.: ЛТИ им. Ленсовета, 1989. С. 140–149.
8. *Скорород В.В., Тучинский Л.И.* Условие пластичности пористых тел // Порошковая металлургия. 1978. № 11. С. 83–87.
9. *Григорьев А.К., Рудской А.И.* Деформация и уплотнение порошковых материалов. М.: Металлургия, 1992. 192 с.
10. *Власов А.В.* Моделирование процессов прессования порошков в капсулах с учетом проскальзывания на границах сред // Вестник МГТУ. Сер. Машиностроение. 1998. № 3. С. 87–92.
11. *Каташинский В.Л., Штерн М.Б.* Напряженно-деформированное состояние прокатываемого порошка в зоне уплотнения // Порошковая металлургия. 1983. № 11. С. 17–21.
12. *Гун Г.Я., Стебунов С.А., Ганелин Д.Ю., Фролов А.А.* Моделирование на ЭВМ и исследование процесса прокатки пористых материалов // Порошковая металлургия. 1983. № 11. С. 21–26.
13. *Бальшин М.Ю.* Научные основы порошковой металлургии и металлургии волокна. М.: Металлургия, 1972. 336 с.
14. *Жданович Г.Н.* Теория прессования металлических порошков. М.: Металлургия, 1969. 262 с.
15. *Стоев П.И., Папиров И.И., Тихинский Г.Ф., Васильев А.А.* Диаграммы изостатического прессования бериллия // Физика металлов и металловедение. 1994. Т. 78. Вып. 1. С. 9–19.
16. *Штерн М.Б.* Эквивалентные деформации и напряжения порошковых материалов. II. Связь эквивалентной деформации пористых тел с макроскопическими деформациями // Порошковая металлургия. 1987. № 2. С. 13–18.
17. *Скорород В.В., Олевский Е.А., Штерн М.Б.* Континуальная теория спекания. I. Феноменологическая модель. Анализ влияния внешних силовых воздействий на кинетику спекания. // Порошковая металлургия. 1993. № 1. С. 22–27.
18. *Лаптев А.М., Подлесный С.В.* Расчет силовых характеристик процесса уплотнения сферических порошков // Порошковая металлургия. 1985. № 12. С. 11–17.

Поступила 14.01.2004 г.