Общероссийский математический портал

Е. А. Ильина, А. Г. Михеев, Л. А. Сараев, К теории сверхупругого поведения композиционных материалов с нестабильными компонентами, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 26, 108–114

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu186>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:18:11

К ТЕОРИИ СВЕРХУПРУГОГО ПОВЕДЕНИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ С НЕСТАБИЛЬНЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

Представлены математические модели фазовых превращений в композиционных материалах со случайной структурой, согласно которым новая фаза с новыми механическими свойствами образуется и вырастает из составляющих компонентов композита под воздействием внешних нагрузок, при этом в новой фазе возникают и развиваются ограниченные структурные остаточные деформации. Статистическое осреднение стохастической системы уравнений равновесия позволило установить макроскопические определяющие уравнения неустойчивых сред и вычислить их эффективные характеристики.

1. Пусть двухкомпонентный композиционный материал, занимает объем V , ограниченный поверхностью S . Первый компонент V_1 образует связующую матрицу, второй компонент V_2 – представляет собой отдельные включения сферической формы. Фазовый переход первого рода происходит в объеме включений V_2 . Объем зарождающейся и развивающейся новой фазы внутри включений обозначим V_p , объем старой фазы – V_q ($V_p + V_q = V_2$). При фазовом превращении ($V_p \rightarrow V_2$) в материале новой фазы под воздействием внешних нагрузок возникают и развиваются необратимые структурные деформации $a_{ij}(\mathbf{r})$, вызванные перестройкой кристаллической и доменной структуры материала. Эти деформации являются ограниченными предельными сдвигами двойниковых доменов: $0 \leq \sqrt{a_{ij} a_{ij}} \leq a_{\max}$, где $a_{\max}$ – известный максимальный уровень структурных деформаций. Закон Гука такой среды имеет вид:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= 2m_1 e_{ij} + d_{ij} l_1 e_{pp} \quad (\mathbf{r} \in V_1); \quad s_{ij} = 2m_2 e_{ij} + d_{ij} l_2 e_{pp} \quad (\mathbf{r} \in V_q); \\ s_{ij} &= 2m_3 (e_{ij} - a_{ij}) + d_{ij} l_3 e_{pp} \quad (\mathbf{r} \in V_p). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь s_{ij}, e_{ij} – тензоры напряжений и полных деформаций; m_s, l_s ($s=1, 2, 3$) – параметры Ламе компонентов.

В качестве условий фазовых переходов второго компонента в первый и обратно принимаются поверхности нагружения:

$$(s_{ij} - 2n_+)(s_{ij} - 2n_-) = k_+^2 (V_p \rightarrow V_2); \quad (s_{ij} - 2n_-)(s_{ij} - 2n_+) = k_-^2 (V_q \rightarrow V_2). \quad (2)$$

Здесь $k_{+,-}$ – пределы прямого и обратного фазовых переходов, соответственно; $n_{+,-}$ – коэффициенты линейного упрочнения, характеризующие скорость перемещения поверхностей (2) в шестимерном пространстве напряжений. Экспериментальные наблюдения показывают, что эти пределы зависят от температуры и их значения определяют тип поведения неустойчивой среды (сверхупругость, эффект «памяти формы» или обычное пластическое течение).

Геометрические особенности такой фазовой структуры описываются набором случайных изотропных индикаторных функций координат $k_s(\mathbf{r})$ ($s=1, p, q$), каждая из которых равна единице в точках объема V_s и равна нулю вне этого объема.

С помощью этих функций локальный закон Гука для среды записывается в виде

$$\begin{aligned} s_{ij}(\mathbf{r}) &= 2(m_1 + (m_2 - m_1)k_q(\mathbf{r}) + (m_3 - m_2)k_p(\mathbf{r}))e_{ij}(\mathbf{r}) - 2m_3 k_p(\mathbf{r})a_{ij}(\mathbf{r}), \\ s_{pp}(\mathbf{r}) &= 3(K_1 + (K_2 - K_1)k_q(\mathbf{r}) + (K_3 - K_2)k_p(\mathbf{r}))e_{pp}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $s_{ij} = s_{pp} - \frac{1}{3}d_{ij} \cdot s_{ij}$, $e_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3}s_{ij}e_{pp}$, $K_s = \frac{2}{3}m_s + l_s$. Структурные деформации удовлетворяют условию несжимаемости $a_{pp}(r) = 0$.

Индикаторные функции, напряжения, полные и структурные деформации предполагаются статистически однородными и эргодическими полями, поэтому их математические ожидания совпадают со средними значениями по полному объему V и объемам фаз V_s [1]:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{V} \int_V f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \langle f \rangle_s = \frac{1}{V_s} \int_{V_s} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (s=1, 2, p, q),$$

где угловыми скобками обозначена операция осреднения.

Для установления макроскопических определяющих уравнений материала и вычисления его эффективных характеристик необходимо усреднить по полному объему V локальный закон Гука (3):

$$\begin{aligned} \langle s_{ij} \rangle &= 2m_1 \langle e_{ij} \rangle + 2(m_2 - m_1) c_q \langle e_{ij} \rangle_q + 2(m_3 - m_2) c_p \langle e_{ij} \rangle_p - 2m_3 c_p \langle a_{ij} \rangle_p, \\ \langle s_{pp} \rangle &= 3K_1 \langle e_{pp} \rangle + 3(K_2 - K_1) c_q \langle e_{pp} \rangle_q + 3(K_3 - K_2) c_p \langle e_{pp} \rangle_p. \end{aligned} \quad (4)$$

Соотношения (4) показывают, что для установления связи между макронапряжениями и макродеформациями необходимо выразить величины $\langle e_{ij} \rangle_s$ через $\langle e_{ij} \rangle$. Это достигается статистическим осреднением системы уравнений, состоящей из уравнений (3), уравнений равновесия $s_{ij,j}(\mathbf{r}) = 0$ и формул Коши $2e_{ij}(\mathbf{r}) = u_{i,j}(\mathbf{r}) + u_{j,i}(\mathbf{r})$. Граничными условиями такой системы являются условия отсутствия флуктуаций величин на поверхности S объема V .

С помощью тензора Грина $\mathbf{G}_{ik}(\mathbf{r})$ эта система уравнений сводится к системе интегральных уравнений [2]

$$e'_{ij}(\mathbf{r}) = \int_V \mathbf{G}_{ik,lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) t'_{kl}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1. \quad (5)$$

Здесь штрихами обозначены флуктуации величин в объеме V .

Умножая уравнения (5) на $k'_s(\mathbf{r})$, усредняя их затем по объему V , принимая во внимание изотропность структуры композита и используя известное соотношение $\langle f \rangle_2 = \langle f \rangle + c_2^{-1} \langle k' f' \rangle$, находим [2]:

$$\langle e_{ij} \rangle_{p,q} = \frac{a_{p,q}}{\Delta} \left(b_{p,q} \langle e_{ij} \rangle + d_{p,q} \langle a_{ij} \rangle_p \right), \quad \langle e_{pp} \rangle_{p,q} = \frac{w_{p,q} h_{p,q}}{\Delta} \langle e_{pp} \rangle. \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_p &= \left(1 + a_1 (m_3 - m_2) (1 - c_p) \right)^{-1}, \quad a_q = \left(1 + a_1 (m_2 - 1) (1 - c_q) \right)^{-1}; \\ w_p &= \left(1 + g_1 (q_3 - q_2) (1 - c_p) \right)^{-1}, \quad w_q = \left(1 + g_1 (q_2 - 1) (1 - c_q) \right)^{-1}; \\ b_p &= 1 + a_1 c_q (m_2 - 1) a_q, \quad b_q = 1 + a_1 c_p (m_3 - m_2) a_p, \quad h_p = 1 + g_1 c_q (q_2 - 1) w_q, \quad h_q = 1 + g_1 c_p (q_3 - q_2) w_p; \\ d_p &= a_1 m_3 (1 - c_p) - a_1^2 c_p c_q m_3 (m_2 - 1) a_q, \quad d_q = -a_1 m_3 c_p + a_1^2 c_p (1 - c_p) m_3 (m_3 - m_2) a_p; \\ a_1 &= \frac{2}{15} \frac{4 - 5n_1}{1 - n_1}, \quad g_1 = \frac{1}{3} \frac{1 + n_1}{1 - n_1}, \quad n_1 = \frac{1}{2} \frac{3K_1 - 2m_1}{3K_1 + 2m_1}, \quad m_s = \frac{m_s}{m_1}, \quad q_s = \frac{K_s}{K_1}, \quad c_s = \frac{V_s}{V}. \end{aligned}$$

Подстановка формул (6) в соотношения (4) дает макроскопический закон Гука рассматриваемой микронеоднородной среды:

$$\langle s_{ij} \rangle = 2m^* \langle e_{ij} \rangle - 2m^a \langle a_{ij} \rangle_p, \quad \langle s_{pp} \rangle = 3K^* \langle e_{pp} \rangle. \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} m^* &= m_1 \left(1 + \frac{(m_2 - 1) c_q a_q b_q + (m_3 - m_2) c_p a_p b_p}{\Delta} \right), \quad K^* = K_1 \left(1 + \frac{(q_2 - 1) c_q w_q h_q + (m_3 - m_2) c_p w_p h_p}{\Delta} \right), \\ m^a &= m_1 \left(c_p m_3 - \frac{(m_2 - 1) c_q a_q d_q + (m_3 - m_2) c_p a_p d_p}{\Delta} \right), \end{aligned}$$

звездочкой обозначены эффективные модули упругости микронеоднородной среды [2].

Для определения макроскопических условий прямого и обратного фазовых превращений в рассматриваемой среде и закона ее деформирования необходимо усреднить соотношения (2) по объему новой фазы V_p :

$$\langle s_{ij} - 2n_{+,-} a_{ij} \rangle_p \langle s_{ij} - 2n_{+,-} a_{ij} \rangle_p = k_{+,-}^2. \quad (8)$$

Подстановка в условие (8) локального закона Гука (3) и применение правила механического смешивания дают макроскопические поверхности нагружения

$$\left(\langle s_{ij} \rangle - 2n_{+,-}^* \langle a_{ij} \rangle_p \right) \left(\langle s_{ij} \rangle - 2n_{+,-}^* \langle a_{ij} \rangle_p \right) = k_{+,-}^{*2} \quad (9)$$

и ассоциированные с ней законы деформирования –

$$\langle s_{ij} \rangle = k_{+,-}^* n_{ij} + 2n_{+,-}^* \langle a_{ij} \rangle_2, \quad n_{ij} = \frac{\langle \dot{a}_{ij} \rangle}{\sqrt{\langle \dot{a}_{kl} \rangle \langle \dot{a}_{kl} \rangle}}. \quad (10)$$

Здесь $k_{+,-}^* = k_{+,-} \frac{m^* \Delta}{m_3 a_p b_p}$ – эффективный начальный предел фазового перехода;

$n_{+,-}^* = \frac{k_{+,-}^*}{k_{+,-}} \left(n_{+,-} + m_3 \left(1 - a_p \frac{b_p m^a + d_p m^*}{m^* \Delta} \right) \right)$ – эффективный коэффициент упрочнения,

характеризующий скорость перемещения поверхности (9) в шестимерном пространстве макронапряжений. Уравнения (10) описывают нелинейное деформирование среды при фазовом превращении. Структурные средние деформации $\langle a_{ij} \rangle_p$ необходимо выразить через объемное содержание новой фазы c_p и величину $a_{\max}$.

Процесс фазового перехода можно разбить на два этапа. На первом этапе происходит интенсивное образование зон новой фазы (зародышей). Этот процесс сопровождается быстрым ростом концентрации зародышей при относительно небольшом уровне структурных деформаций. На втором этапе образование новой фазы происходит, в основном, за счет объемного роста самих зародышей, внутри которых структурные деформации развиваются до своих максимальных значений. Деление процесса фазового превращения на два этапа достаточно условно, так как на практике оба процесса наблюдаются параллельно с преобладанием одного из них в разных стадиях развития уровней структурных деформаций [3]. С достаточной степенью точности этот процесс может быть описан эволюционным уравнением

$$\frac{d a}{d c_p} = h a^{1-l} \quad (0 \leq l \leq 1). \quad (11)$$

Параметр роста l уравнения (11) служит показателем разделения этапов фазового перехода. Решение уравнения (11) с учетом граничных условий $c_p|_{a=0} = 0$, $c_p|_{a=a_{\max}} = c_2$ дает зависимость роста концентрации новой фазы от уровня структурных деформаций:

$$\frac{c_p}{c_2} = \left(\frac{a}{a_{\max}} \right)^l. \quad (12)$$

Соотношение (10) принимает вид

$$\langle s_{ij} \rangle = \left(k_{+,-}^* + 2n_{+,-}^* \left(\frac{c_p}{c_2} \right)^{\frac{1}{l}} a_{\max} \right) n_{ij}. \quad (13)$$

2. Пусть теперь фазовый переход первого рода происходит в объеме матрицы V_1 композиционного материала со сферическими включениями. Объем зарождающейся и развивающейся новой фазы внутри включений обозначим V_p , объем старой фазы – V_q ($V_p + V_q = V_1$). При фазовом превращении ($V_p \rightarrow V_1$) в материале новой фазы под воздействием внешних нагрузок возникают и развиваются необратимые структурные деформации $a_{ij}(\mathbf{r})$, вызванные перестройкой кристаллической и доменной структуры материала:

$$s_{ij} = 2m_1 e_{ij} + d_{ij} l_1 e_{pp} \quad (\mathbf{r} \in V_q); \quad s_{ij} = 2m_2 e_{ij} + d_{ij} l_2 e_{pp} \quad (\mathbf{r} \in V_2); \\ s_{ij} = 2m_p (e_{ij} - a_{ij}) + d_{ij} l_p e_{pp} \quad (\mathbf{r} \in V_p). \quad (14)$$

В качестве условий фазовых переходов второго компонента в первый и обратно принимаются поверхности нагружения

$$(s_{ij} - 2n_+)(s_{ij} - 2n_+) = k_+^2 (V_p \rightarrow V_1); \quad (s_{ij} - 2n_-)(s_{ij} - 2n_-) = k_-^2 (V_q \rightarrow V_1). \quad (15)$$

С помощью соответствующих индикаторных функций локальный закон Гука для среды записывается в виде

$$\begin{aligned} s_{ij}(\mathbf{r}) &= 2(m_1 + (m_2 - m_1)k_2(\mathbf{r}) + (m_p - m_1)k_p(\mathbf{r}))e_{ij}(\mathbf{r}) - 2m_p k_p(\mathbf{r})a_{ij}(\mathbf{r}), \\ s_{pp}(\mathbf{r}) &= 3(K_1 + (K_2 - K_1)k_2(\mathbf{r}) + (K_p - K_1)k_p(\mathbf{r}))e_{pp}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (16)$$

Для установления макроскопических определяющих уравнений материала и вычисления его эффективных характеристик необходимо усреднить по полному объему V локальный закон Гука (16):

$$\begin{aligned} \langle s_{ij} \rangle &= 2m_1 \langle e_{ij} \rangle + 2(m_2 - m_1)c_2 \langle e_{ij} \rangle_2 + 2(m_p - m_1)c_p \langle e_{ij} \rangle_p - 2m_p c_p \langle a_{ij} \rangle_p, \\ \langle s_{kk} \rangle &= 3K_1 \langle e_{kk} \rangle + 3(K_2 - K_1)c_2 \langle e_{kk} \rangle_2 + 3(K_p - K_1)c_p \langle e_{kk} \rangle_p. \end{aligned} \quad (17)$$

Процедура вычисления величин $\langle e_{ij} \rangle_s$, аналогичная описанной выше, дает

$$\langle e_{ij} \rangle_{p,2} = \frac{a_{p,2}}{\Delta} \left(b_{p,2} \langle e_{ij} \rangle + d_{p,2} \langle a_{ij} \rangle_p \right), \quad \langle e_{kk} \rangle_{p,2} = \frac{w_{p,2} h_{p,2}}{\Delta} \langle e_{kk} \rangle. \quad (18)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_p &= (1 + a_1(m_p - 1)(1 - c_p))^{-1}, \quad a_2 = (1 + a_1(m_2 - 1)(1 - c_2))^{-1}; \\ w_p &= (1 + g_1(q_p - 1)(1 - c_p))^{-1}, \quad w_2 = (1 + g_1(q_2 - 1)(1 - c_2))^{-1}; \\ b_p &= 1 + a_1 c_2(m_2 - 1)a_2, \quad b_2 = 1 + a_1 c_p(m_p - 1)a_p, \quad h_p = 1 + g_1 c_2(q_2 - 1)w_2, \quad h_2 = 1 + g_1 c_p(q_p - 1)w_p; \\ d_p &= a_1 m_p(1 - c_p) - a_1^2 c_p c_2 m_p(m_2 - 1)a_2, \quad d_2 = -a_1 m_p c_p + a_1^2 c_p(1 - c_p)m_p(m_p - 1)a_p. \end{aligned}$$

Подстановка формул (18) в соотношения (17) дает макроскопический закон Гука рассматриваемой микroneоднородной среды:

$$\langle s_{ij} \rangle = 2m^* \langle e_{ij} \rangle - 2m^a \langle a_{ij} \rangle_p, \quad \langle s_{kk} \rangle = 3K^* \langle e_{kk} \rangle. \quad (19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} m^* &= m_1 \left(1 + \frac{(m_2 - 1)c_2 a_2 b_2 + (m_p - 1)c_p a_p b_p}{\Delta} \right), \quad K^* = K_1 \left(1 + \frac{(q_2 - 1)c_2 w_2 h_2 + (m_p - 1)c_p w_p h_p}{\Delta} \right); \\ m^a &= m_1 \left(c_p m_p - \frac{(m_2 - 1)c_2 a_2 d_2 + (m_p - 1)c_p a_p d_p}{\Delta} \right). \end{aligned}$$

Для определения макроскопических условий прямого и обратного фазовых превращений в рассматриваемой среде и закона ее деформирования необходимо усреднить соотношения (15) по объему новой фазы V_p :

$$\langle s_{ij} - 2n_{+,-} a_{ij} \rangle_p \langle s_{ij} - 2n_{+,-} a_{ij} \rangle_p = k_{+,-}^2. \quad (20)$$

Подстановка в условие (20) локального закона Гука (16) и применение правила механического смешивания, дают макроскопические поверхности нагружения

$$\left(\langle s_{ij} \rangle - 2n_{+,-}^* \langle a_{ij} \rangle_p \right) \left(\langle s_{ij} \rangle - 2n_{+,-}^* \langle a_{ij} \rangle_p \right) = k_{+,-}^{*2} \quad (21)$$

и ассоциированный с ней закон деформирования –

$$\langle s_{ij} \rangle = k_{+,-}^* n_{ij} + 2n_{+,-}^* \langle a_{ij} \rangle_p. \quad (22)$$

Здесь $k_{+,-}^* = k_{+,-} \frac{m^* \Delta}{m_p a_p b_p}$ – эффективный начальный предел фазового перехода,

$n_{+,-}^* = \frac{k_{+,-}^*}{k_{+,-}} \left(n_{+,-} + m_p \left(1 - a_p \frac{b_p m^a + d_p m^*}{m^* \Delta} \right) \right)$ – эффективный коэффициент упрочнения,

характеризующий скорость перемещения поверхности (21) в шестимерном пространстве макронапряжений.

С помощью уравнений, аналогичных уравнениям (11), (12), соотношение (22) принимает вид

$$\langle s_{ij} \rangle = \left[k_{+,-}^* + 2n_{+,-}^* \left(\frac{c_p}{c_1} \right)^{\frac{1}{I}} a_{\max} \right] n_{ij}. \quad (23)$$

3. Пусть компоненты композиционного материала V_1 и V_2 образуют стохастическую матричную смесь. Фазовый переход первого рода происходит в объеме первого компонента V_1 . Объем зарождающейся и развивающейся новой фазы внутри V_1 обозначим V_p , объем вытесняемой старой фазы – V_q ($V_p + V_q = V_1$). При фазовом превращении ($V_p \rightarrow V_1$) в материале новой фазы под воздействием внешних нагрузок возникают и развиваются необратимые структурные деформации $a_{ij}(\mathbf{r})$, вызванные перестройкой кристаллической и доменной структуры материала. Закон Гука такой среды имеет вид (14), а условия фазовых переходов второго компонента в первый и обратно описываются поверхностями нагружения (15).

Локальный закон Гука для среды записывается в виде

$$\begin{aligned} s_{ij}(\mathbf{r}) &= 2(\langle m \rangle + [m]_2 k'_2(\mathbf{r}) + [m]_p k'_p(\mathbf{r})) e_{ij}(\mathbf{r}) - 2m_p k'_p(\mathbf{r}) a_{ij}(\mathbf{r}), \\ s_{kk}(\mathbf{r}) &= 3(\langle K \rangle + [K]_2 k'_2(\mathbf{r}) + K_p k'_p(\mathbf{r})) e_{kk}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (24)$$

Для установления макроскопических определяющих уравнений материала и вычисления его эффективных характеристик необходимо усреднить по полному объему V локальный закон Гука (24):

$$\langle s_{ij} \rangle = 2\langle m \rangle \langle e_{ij} \rangle - \langle t_{ij} \rangle, \quad \langle s_{kk} \rangle = 3\langle K \rangle \langle e_{kk} \rangle - \langle t_{kk} \rangle. \quad (25)$$

Здесь $t_{ij} = 2m_p k'_p a_{ij} - 2[m]_2 k'_2 e_{ij} - 2[m]_p k'_p e_{ij} - d_{ij} [l]_2 k'_2 e_{kk} - d_{ij} [l]_p k'_p e_{kk}$.

Применяя к соотношению (25) процедуру вычисления величин $\langle e_{ij} \rangle_s$, находим [2]

$$\langle e_{ij} \rangle_{p,2} = \frac{b_{p,2} \langle e_{ij} \rangle + d_{p,2} \langle a_{ij} \rangle_p}{\Delta}, \quad \langle e_{kk} \rangle_{p,2} = \frac{h_{p,2}}{\Delta} \langle e_{kk} \rangle. \quad (26)$$

Здесь

$$\begin{aligned} b_p &= 1 + a[m]_p a_p (1 - c_p) + a[m]_2 c_2 a_p + a^2 [m]_2^2 a_p a_2 c_2 (1 - c_2); \\ b_2 &= 1 + a[m]_2 a_2 (1 - c_2) - a[m]_p c_p a_2 - a^2 [m]_p^2 a_p a_2 c_p (1 - c_p); \\ h_p &= 1 + g[q]_p w_p (1 - c_p) + g[q]_2 c_2 w_p + g^2 [q]_2^2 w_p w_2 c_2 (1 - c_2); \\ h_2 &= 1 + g[q]_2 w_2 (1 - c_2) - g[q]_p c_p w_2 - g^2 [q]_p^2 w_p w_2 c_p (1 - c_p); \\ d_p &= a m_p (1 - c_p) a_p - a^2 (1 - c_p) c_2 m_p [m]_2 a_p a_2, \quad d_2 = -a m_p (1 - c_p) a_2 - a^2 (1 - c_p) c_p m_p [m]_p a_p a_2; \\ \Delta &= 1 + a^2 [m]_p [m]_2 a_p a_2 c_p c_2; \\ a_p &= \left(1 + a[m]_2 c_2 a [m]_p (1 - 2c_p) \right)^{-1}, \quad a_2 = \left(1 + a[m]_p c_p + a[m]_2 (1 - 2c_2) \right)^{-1}; \\ w_p &= \left(1 + g[q]_2 c_2 + g[q]_p (1 - 2c_p) \right)^{-1}, \quad w_2 = \left(1 + g[q]_p c_p + g[q]_2 (1 - 2c_2) \right)^{-1}; \\ a &= \frac{2}{15} \frac{4 - 5n}{1 - n}, \quad g = \frac{1}{3} \frac{1 + n}{1 - n}, \quad n = \frac{1}{2} \frac{3\langle K \rangle - 2\langle m \rangle}{3\langle K \rangle + 2\langle m \rangle}. \end{aligned}$$

Подстановка формул (26) в соотношения (25) дает макроскопический закон Гука рассматриваемой микроненормальной среды:

$$\langle s_{ij} \rangle = 2m^* \langle e_{ij} \rangle - 2m^a \langle a_{ij} \rangle_p, \quad \langle s_{pp} \rangle = 3K^* \langle e_{pp} \rangle. \quad (27)$$

$$\text{Здесь } m^* = \langle m \rangle \left(1 + [m]_2 c_2 \left(\frac{b_2}{\Delta} - 1 \right) + [m_p] c_p \left(\frac{b_p}{\Delta} - 1 \right) \right), \quad m^a = \langle m \rangle \left(c_p m_p - \frac{[m]_2 c_2 d_2 + [m]_p c_p d_p}{\Delta} \right),$$

$$K^* = \langle K \rangle \left(1 + [q]_2 c_2 \left(\frac{h_2}{\Delta} - 1 \right) + [q_p] c_p \left(\frac{h_p}{\Delta} - 1 \right) \right).$$

Для определения макроскопических условий прямого и обратного фазовых превращений в рассматриваемой среде и закона ее деформирования необходимо усреднить соотношения (15) по объему новой фазы V_p :

$$\langle s_{ij} - 2n_{+,-} a_{ij} \rangle_p \langle s_{ij} - 2n_{+,-} a_{ij} \rangle_p = k_{+,-}^2. \quad (28)$$

Подстановка в условие (28) локального закона Гука (24) и применение правила механического смешивания, дают макроскопические поверхности нагружения

$$\left(\langle s_{ij} \rangle - 2n_{+,-}^* \langle a_{ij} \rangle_p \right) \left(\langle s_{ij} \rangle - 2n_{+,-}^* \langle a_{ij} \rangle_p \right) = k_{+,-}^{*2} \quad (29)$$

и ассоциированный с ней закон деформирования –

$$\langle s_{ij} \rangle = k_{+,-}^* n_{ij} + 2n_{+,-}^* \langle a_{ij} \rangle_p. \quad (30)$$

Здесь $k_{+,-}^* = k_{+,-} \frac{m^* \Delta}{m_p b_p}$ – эффективный начальный предел фазового перехода,

$n_{+,-}^* = \frac{k_{+,-}^*}{k_{+,-}} \left(n_{+,-} + m_p \left(1 - \frac{b_p m^a + d_p m^*}{m^* \Delta} \right) \right)$ – эффективный коэффициент упрочнения,

характеризующий скорость перемещения поверхности (29) в шестимерном пространстве макронапряжений.

Структурные средние деформации $\langle a_{ij} \rangle_p$ выражаются через объемное содержание новой фазы c_p и величину $a_{\max}$ соотношением

$$\langle a_{ij} \rangle_p = \left(\frac{c_p}{c_1} \right)^{\frac{1}{I}} a_{\max} n_{ij}.$$

Тогда соотношение (30) принимает вид

$$\langle s_{ij} \rangle = \left(k_{+,-}^* + 2n_{+,-}^* \left(\frac{c_p}{c_1} \right)^{\frac{1}{I}} a_{\max} \right) n_{ij}.$$

Параметрам $(c_p \rightarrow c_1), k_+, n_+$ соответствует прямой фазовый переход, параметрам $(c_q \rightarrow c_1), k_-, n_-$ – обратный.

4. Применим полученные результаты для описания неустойчивого поведения однородной упругой среды. Для этого в соотношениях (19), (21) следует устранить второй компонент композита, положив $c_2 = 0$. Тогда уравнения нелинейного упрочнения (23) принимают вид:

$$\langle s_{ij} \rangle = \left(k_{+,-}^* + 2n_{+,-}^* c_p^{\frac{1}{I}} a_{\max} \right) n_{ij}. \quad (31)$$

Здесь

$$k_{+,-}^* = k_{+,-} \frac{m^* c_p}{m^a}, \quad n_{+,-}^* = \frac{k^*}{k_{+,-}} \left(n_{+,-} + m_2 \left(1 - \frac{a c_1 m_2}{1 - a [m][c]} \right) \right) - m^a, \quad (32)$$

$$m^* = \langle m \rangle \left(1 - \frac{a c_1 c_p [m]^2}{1 - a [m][c]} \right), \quad K^* = \langle K \rangle \left(1 - \frac{g c_1 c_p [q]^2}{1 - g [q][c]} \right), \quad m^a = m_2 c_p \left(1 - \frac{a c_1 [m]}{1 - a [m][c]} \right). \quad (33)$$

На рис. 1 и 2 представлены сравнения теоретических расчетов по построенным моделям (31) – (33) с экспериментальными диаграммами сверхупругого поведения сплавов *AuCuZn* [4] и *AuCd* [5].

Р и с . 1 . Сравнение теоретической и экспериментальной диаграмм сверхупругого поведения сплава *AuCuZn* [4]:

Сплошная линия – экспериментальная кривая; штриховая линия – теоретическая кривая. Расчетные значения:

$$E = 11398,14 \text{ МПа}; n = 0,3 ;$$

$$S_Y^+ = 34,34 \text{ МПа}; S_Y^- = 11,78 \text{ МПа};$$

$$n = 1200 \text{ МПа}; a_{\max} = 0,025 ; I = 0,434$$

Р и с . 2 . Сравнение теоретической и экспериментальной диаграмм сверхупругого поведения сплава *AuCd* [5]:

Сплошная линия – экспериментальная кривая; штриховая линия – теоретическая кривая. Расчетные значения:

$$E = 11284,02 \text{ МПа}; n = 0,3 ;$$

$$S_Y^+ = 39,24 \text{ МПа}; S_Y^- = 19,62 \text{ МПа};$$

$$a_{\max} = 0,03 ; n = 1200 \text{ МПа}; I = 0,365$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сараев Л.А. Моделирование макроскопических пластических свойств многокомпонентных композиционных материалов. Самара: СамГУ, 2000. 182 с.
2. Сараев Л.А., Фартушинова Е.А. Уравнения изотермических фазовых превращений в твердых телах с микроструктурой // Фазовые превращения в твердых растворах и сплавах. Труды II международного симпозиума ОМА II. Сочи. 2001. С. 289-292.
3. Физическое металловедение. Под ред. Р. Кана. Т. 2. М.: Мир, 1968, 490 с.
4. Murakami Y. Lattice softening, phase stability and elastic anomaly of the β -Au-Cu-Zn alloys//Journ.Phys.Soc. Japan. 1972. V.33. № 5. P.1350-1361.
5. Nakanishi N. Pseudoelasticity in Au-Cd thermoelastic martensite // Phyl. Mag. 1973. V. 28. № 2. P. 277-282.

Поступила 9.01.04 г.