Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Горлач, Г. Ю. Ермоленко, Метод опорных функций для решения задач математики и механики, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 26, 122–126

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu188>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:14:58

МЕТОД ОПОРНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Развивается метод решения задач математики и механики – метод опорных функций. Идея метода излагается на примере решения задачи Коши для ОДУ, задачи Дирихле для эллиптического дифференциального уравнения и задачи теории упругости для анизотропного материала.

1. В работе развивается метод опорных функций, предложенный в [1,2]. Пусть требуется решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = f(t); y(0) = y_0; y'(0) = y_1, \quad y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}. \quad (1)$$

Здесь $y(t)$ – искомая функция, $y^{(i)}(t)$ – производная искомой функции порядка i , $f(t)$ – свободный член уравнения, a_i – постоянные коэффициенты уравнения, а $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$, $y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$ – начальные условия.

Будем считать, что искомое решение $y(x)$ и свободный член $f(x)$ удовлетворяют условиям существования преобразования Лапласа. Тогда для (1) в образах будем иметь:

$$a_0 p^n (Y(p) - \frac{y(0)}{p} - \dots - \frac{y^{(n-1)}(0)}{p^{n-1}}) + a_1 p^{n-1} (Y(p) - \frac{y(0)}{p} - \dots - \frac{y^{(n-2)}(0)}{p^{n-1}}) + \dots + a_n Y(p) = F(p). \quad (2)$$

Здесь p – параметр преобразования Лапласа, $Y(p)$ – образ Лапласа искомого решения, $F(p)$ – образ Лапласа свободного члена уравнения. Перепишем (2) в виде:

$$Y(p) = \frac{F(p)}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} + \frac{(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1}) y(0) + \dots + a_0 y^{(n-1)}(0)}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (3)$$

Если ввести обозначения:

$$(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1}) y(0) + \dots + a_0 y^{(n-1)}(0) = \Psi(p); \quad \frac{1}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} = G(p), \quad (4)$$

то соотношение (3) можно записать в виде:

$$Y(p) = G(p)(F(p) + \Psi(p)). \quad (5)$$

Из соотношения (5), в соответствии с теоремой о свертке и свойствами преобразования Лапласа, получаем:

$$y(t) = \int_0^t G(t-t) f(t) dt + \int_0^t G(t-t) \Psi(t) dt. \quad (6)$$

В (5) и (6) функция $G(t)$ – оригинал для образа Лапласа, $G(p)$ – функция Грина исходной краевой задачи, а $y(t)$ оригинал для $Y(p)$ – образа Лапласа начальных условий.

Запишем (5) в виде:

$$\frac{1}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} = G(p) = \frac{Y(p)}{F(p) + \Psi(p)}. \quad (7)$$

Из равенства (7) следует, что отношение образов Лапласа $Y(p)$ и $F(p) + \Psi(p)$ должно быть постоянно для любых решений исходной задачи (1) и представляет собой образ Лапласа её функции Грина. Поэтому найти образ Лапласа функции Грина исходной задачи Коши можно, не решая задачу (1). Для этого достаточно взять произвольное решение – опорную функцию, вычислить образы Лапласа $Y(p)$ и $F(p) + \Psi(p)$ и поделить одно на другое.

Проиллюстрируем это на примере задачи Коши для уравнения второго порядка:

$$a_0 y''(t) + a_2 y(t) = f(t); y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1. \quad (8)$$

1. Выберем в качестве опорной функции $y(t) = t^3$. Тогда $f(t) = a_0 6t + a_2 t^3$. Вычислим начальные условия $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ и образы Лапласа этих функций. Будем иметь:

$$Y(p) = \frac{6}{p^4}, \quad F(p) = \frac{a_0 6}{p^2} + \frac{a_2 6}{p^4}, \quad \text{откуда } G(p) = \frac{\frac{6}{p^4}}{\frac{a_0 6}{p^2} + \frac{a_2 6}{p^4}}, \quad \text{либо } G(p) = \frac{1}{a_0 p^2 + a_2}.$$

2. Выберем в качестве опорной функции $y(t) = \sin(kt)$. Тогда

$$f(t) = -a_0 k^2 \sin(kt) + a_2 \sin(kt) = \sin(kt)(-a_0 k^2 + a_2).$$

Вычислим начальные условия $y(0) = 0$, $y'(0) = k$ и образы Лапласа этих функций. Будем иметь:

$$Y(p) = \frac{k}{p^2 + k^2}, \quad F(p) + \Psi(p) = \frac{(-a_0 k^2 + a_2)k}{p^2 + k^2} + a_0 k,$$

откуда

$$G(p) = \frac{\frac{k}{p^2 + k^2}}{\frac{(-a_0 k^2 + a_2)k}{p^2 + k^2} + a_0 k}, \quad \text{либо } G(p) = \frac{1}{a_0 p^2 + a_2}.$$

Видно, что в обоих случаях при столь непохожих опорных функциях мы получили один и тот же образ Лапласа функции Грина исходной задачи Коши. В качестве опорной функции можно брать любую функцию, имеющую производные, отличные от тождественного нуля до порядка n – порядка уравнения включительно. Например, в случае дифференциального уравнения второго порядка опорная функция должна иметь производные, отличные от тождественного нуля до второго порядка. Поэтому в качестве опорных функций в этих примерах взяты t^3 и $\sin(kt)$. Если это условие не выполняется, то исходное дифференциальное уравнение относительно опорной функции вырождается в уравнение меньшего порядка.

Таким образом, из соотношения (6) и его образа Лапласа (5) следует, что для поиска решения задачи Коши решать дифференциальное уравнение не нужно. Достаточно методом опорных функции найти образ Лапласа функции Грина, умножить его на сумму образов Лапласа свободного члена и начальных условий и вычислить обратное преобразование Лапласа.

2. Аналогичная ситуация складывается в случае решения краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных. В случае задачи Дирихле:

$$\operatorname{div}(k \nabla u(\mathbf{x})) - qu(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}); u(\mathbf{x})|_S = j(\mathbf{x}) \quad (9)$$

для поиска функции Грина необходимо решить задачу:

$$\operatorname{div}(k \nabla G(\mathbf{x})) - qu(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}); G(\mathbf{x})|_S = 0. \quad (10)$$

А в случае задачи Неймана:

$$\operatorname{div}(k \nabla u(\mathbf{x})) - qu(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}); \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} \Big|_S = j(\mathbf{x}) \quad (11)$$

для поиска функции Грина необходимо решить задачу:

$$\operatorname{div}(k \nabla G(\mathbf{x})) - qu(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}); \frac{\partial G(\mathbf{x})}{\partial n} \Big|_S = 0. \quad (12)$$

В задачи для поиска функций Грина (10) и (12) не входят свободные члены уравнений и краевые условия задач Дирихле и Неймана и они для всех возможных решений этих задач, определяемых краевыми условиями и свободными членами уравнений, всегда одни и те же. Поэтому найти функцию Грина задачи Дирихле или задачи Неймана для конечных областей произвольной формы можно методом опорных функций, не прибегая к решению задач (10) и (12). Действительно, в случае задачи Дирихле (9) решение $u(\mathbf{x})$ выражается через функцию Грина соотношением:

$$u(\mathbf{x}) = -k \int_S j(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n} dS - \int_V G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (13)$$

Используя метод опорных функций, из соотношения (13), не решая задачу (10) можно найти функцию Грина. Для этого достаточно решить уравнение (13) относительно функции Грина

Г при выбранной опорной функции $u(\mathbf{x})$. Поскольку в уравнении (13) присутствуют свёртки, удобно решать его методом преобразования Фурье, естественно, что при этом предполагается наличие Фурье образа у функции Грина, опорной функции и соответствующего свободного члена уравнения. Из всех возможных опорных функций удобнее взять такую, чтобы уравнение (13) для поиска функции Грина получилось простым. Если, например, в качестве опорной взять функцию, которая принимает нулевые значения на границе области, то уравнение (13) примет вид

$$u(\mathbf{x}) = - \int_V G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (14)$$

В этом случае Фурье-образ функции Грина $G^*(\mathbf{k})$ выразится через Фурье-образы опорной функции и вычисленной по ней правой части уравнения, согласно теореме о свёртке, следующим образом:

$$G^*(\mathbf{k}) = - \frac{u^*(\mathbf{k})}{f^*(\mathbf{k})}. \quad (15)$$

Выбор функций, дважды непрерывно дифференцируемых в рассматриваемой области и принимающих нулевые значения на её границе, достаточно широк. В качестве таких функций можно, например, выбрать функции вида: $u(\mathbf{x}) = ((z - g(x, y))^n$. Здесь $z = g(x, y)$ - уравнение границы области.

3. Работоспособность метода опорных функций проверялась на решении многих задач. Приведем здесь решение задачи Дирихле для эллиптического дифференциального уравнения в случае, когда рассматриваемая область представляет собой кольцо. Дифференциальное уравнение имело вид

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + 0,3 \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - 7u(x, y) = f(x, y).$$

Внутренний радиус кольца равнялся $5p$, а внешний $10p$. Опорное решение имело вид $u(x, y) = (x^2 + y^2 - (5p)^2)(x^2 + y^2 - (10p)^2)^2$ и принимало на границах кольца нулевое значение. По опорному решению вычислялся свободный член уравнения, а затем Фурье-образы опорного решения и свободного члена. Фурье-образ функции Грина находился как частное Фурье-образов опорного решения и свободного члена. В качестве контрольного решения выбиралась

$$\text{функция } u(x, y) = \frac{(x+1)^{\frac{1}{4}}}{15} + 1 + \frac{(y+1)^{\frac{7}{15}}}{15}.$$

По контрольному решению вычислялся свободный член уравнения и краевое условие, по которым с помощью найденного Фурье-образа функции Грина строилось решение задачи. Затем контрольное решение сравнивалось с найденным по краевому условию и свободному члену. Результаты проделанного представлены на рис. 1 и 2, где на рис.1 представлен график опорной функции, а на рис.2 графики контрольного и полученного решений. Видно, что они в пределах точности совпадают.

Р и с. 1. График опорной функции

Р и с. 2. График контрольного и полученного решений

4. Метод опорных функций можно применять и в задачах теории упругости и при решении интегральных уравнений, всюду, где мы можем выразить решение задачи в виде интегрального оператора; его ядро может быть точно, либо, в крайнем случае, аналитически приближенно найдено методом опорных функций. Покажем, как этим методом решаются задачи теории упругости для анизотропных материалов при деформировании конечных тел произвольной формы.

Рассмотрим первую краевую задачу статической теории упругости для анизотропного материала:

$$s_{ij,j}(\mathbf{x}) = F_i(\mathbf{x}); \quad e_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \{u_{i,j}(\mathbf{x}) + u_{j,i}(\mathbf{x})\}; \quad s_{ij}(\mathbf{x}) = \Gamma_{ijpq} \cdot e_{pq}(\mathbf{x}); \quad u_i(\mathbf{x})|_S = u_{i0}(\mathbf{x}). \quad (16)$$

Здесь Γ_{ijpq} - компоненты тензора упругих постоянных. Поверхность S - кусочно-гладкая, $\mathbf{x}$ - радиус вектор точки пространства.

Для решения краевой задачи (16) вектор перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ представим в виде

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_V G_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) F_j(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \int_S u_{j0}(\mathbf{y}_s) (s)_{ijq} (\mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_s)) n_q(\mathbf{y}_s) dS. \quad (17)$$

Здесь $G_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ - тензор Грина краевой задачи (16). Соотношение (17) при известных вектор-функциях $u_i(\mathbf{x})$, $F_j(\mathbf{y})$, $P_j(\mathbf{y}_s)$ представляет собой интегральное уравнение для поиска неизвестного $G_{ij}(\mathbf{x})$ - тензора Грина краевой задачи (16). Выберем в качестве опорных несколько векторов $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, компоненты которых на поверхности тела S принимают нулевые значения. В этом случае уравнение (17) упростится и примет вид:

$$u_i^1(\mathbf{x}) = \int_V G_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) F_j^1(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (18)$$

Здесь индекс **1** определяет номер выбранной опорной вектор-функции. Воздействуя оператором Ламе

$$(\mathbf{L} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}))_i^1 = \frac{\partial}{\partial x_j} [\Gamma_{ijkh} \frac{1}{2} (-\frac{u_k^1(\mathbf{x})}{x_h} + \frac{u_h^1(\mathbf{x})}{x_k})] = F_i^1(\mathbf{x})$$

на выбранные опорные векторы перемещений, вычислим соответствующие им векторы массовых сил.

Преобразуем равенство (18) по Фурье. Согласно теореме о свёртке по конечной области, получим:

$$u_i^{*1}(\mathbf{k}) = G_{ij}^{*1}(\mathbf{k}) F_j^{*1}(\mathbf{k}). \quad (19)$$

Равенство (19) позволяет найти искомым тензор Грина краевой задачи (16):

$$G_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{R^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} u_i^{*1}(\mathbf{k}) (F_j^{*1}(\mathbf{k}))^{-1} d\mathbf{k}. \quad (20)$$

В качестве модельного примера рассматривалась анизотропная прямоугольная пластина со стороной $20p$ с круглым отверстием, смещенным относительно центра пластины. По двум выбранным опорным функциям определялся тензор Грина задачи. Далее, аналогично предыдущему, в качестве контрольного решения выбиралась вектор-функция: $u_x(x, y) = x + xy^3/10^5 - y^3/10^5 + x^2/5 \cdot 10^3$; $u_y(x, y) = xy^3/10^5$. По контрольному решению вычис-

Р и с. 3. Контрольное (а) и найденное по предложенному методу (б) решения для пластины

лялся вектор массовых сил и краевое условие, по которым с помощью найденного Фурье-образа функции Грина строилось решение задачи. Затем контрольное решение сравнивалось с найденным по краевому условию и свободному члену. Результаты проделанного представлены на рис.3.

На левом и правом графиках рис. 3 представлены контрольные и найденные перемещения по осям x и y соответственно. Видно, что в пределах точности они совпадают.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ермоленко Г.Ю.* Напряженно-деформированное состояние упругих и вязкоупругих конечных тел произвольной формы при статических и динамических нагружениях. Самара: СГАУ, 2001. 149 с.
2. *Ермоленко Г.Ю.* Метод опорных функций для решения статических и динамических задач линейной анизотропной теории упругости // Известия вузов. Машиностроение. № 1. 2003. С. 22 – 27.

Поступила 12.01.2004 г.