Общероссийский математический портал

А. И. Никонов, Критериально-множественная основа формирования операционных моделей физических цепей, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 26, 174–179

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu195>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 15:10:00

КРИТЕРИАЛЬНО-МНОЖЕСТВЕННАЯ ОСНОВА ФОРМИРОВАНИЯ ОПЕРАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Приведены количественные критерии подобия физических цепей, содержащие величины-аналоги, а также параметры-аналоги. Выявлены вещественно-числовые и вещественно-функциональные множества, элементы которых могут выбираться для операционного моделирования физических цепей.

Сходство, присущее количественным описаниям процессов в электрической и механической цепях, подвергаемых воздействию соответственно электрического напряжения и механической силы, хорошо известно; известен также подход к моделированию физических цепей, согласно которому каждой из определенного набора величин какой-либо физической природы ставится в соответствие определенная величина-аналог другой природы [1, 2]. Для электрической, магнитной, механической, гидравлической цепей эти аналоги могут быть выражены, в частности, соответствиями “электрический заряд – потокосцепление – перемещение – объем”. Присвоим указанным цепям индексы соответственно ε, μ, m, h .

В любой физической цепи, поддающейся моделированию данного вида, принято выделять типовые параметрические элементы, которые, пользуясь электротехнической терминологией, называют емкостным, резистивным, индуктивным. Их параметры-аналоги обозначим соответственно через C_a, R_a, L_a , причем $a \in \{\varepsilon, \mu, m, h\}$; кроме того, введем обозначение обобщенного параметра типового элемента физической цепи:

$$P_a \in \{C_a, R_a, L_a\}.$$

Выражения взаимосвязей величин-аналогов электрического заряда (q), электрического напряжения (u), тока (i), потокосцепления (ψ) в количественном описании цепи произвольной природы представляют собой критерии подобия физических цепей [2], например, критерии дифференцирования заряда и действия резистивного элемента имеют вид

$$i = dq/dt, \quad u = R_a i,$$

где t – время. Величины q, i, u, ψ можно рассматривать как входы и выходы элементов, выполняющих определенные операции, и эти элементы можно графически отобразить в соответствующих операционных схемах.

Построение моделей-аналогов физических цепей, производимое на основе критериев подобия и операционных структур, обеспечивает возможность выполнения укрупнений и детализаций моделируемых системных блоков, в том числе, переходов к их подробному принципиально-схемному представлению. Предусматривая количественное отображение принципа действия и характеристик моделируемого объекта, рассматриваемый подход обеспечивает прослеживаемость распространения и преобразования входных воздействий на данный объект, однозначность восприятия действия как объекта в целом, так и его составных частей.

Однако формирование операционных моделей-аналогов физических цепей до настоящего времени не обосновывалось каким-либо математическим оформлением числовых, функциональных структур, служащих диапазонной основой операционных аналогий. Отсутствие же сведений, касающихся указанной основы, может приводить к возникновению существенной неадекватности операционных описаний, что, в свою очередь, может отрицательно сказываться на качестве разработки, контроля, совершенствования моделируемых объектов. Цель настоящей работы состоит в выявлении вещественно-числовых и вещественно-функциональных множеств, элементы которых выбираются при моделировании физических цепей для значимого воспроизведения критериев подобия, применяемых для построения операционно-модельных схем с учетом их параметрической специфики.

Применительно к модели произвольной физической цепи взаимосвязь величин-аналогов в критериях подобия осуществляется посредством операций умножения (со множителями типа P_a):

$$q = q_c = C_a u_c, \quad u = u_R = R_a i_R, \quad \psi = \psi_L = L_a i_L. \quad (1)$$

Здесь q_c, u_c – величины-аналоги электрических заряда и напряжения, выделяемые в емкостном элементе; u_R, i_R – величины-аналоги электрических напряжений и тока, выделяемые в резистивном элементе; ψ_L, i_L – величины-аналоги потокосцепления и тока, выделяемые в индуктивном

элементе. Итак, обозначения величин q, i, u, y снабжены индексами, указывающими на их принадлежность моделям тех или иных параметрических элементов.

Схемно-операционное представление критериев (1), выполняемое звеньями емкостного, резистивного и индуктивного типов, иллюстрирует рис. 1. Кроме того, к критериям подобия величин физических цепей относятся выражения временного дифференцирования и интегрирования вида

$$i = q' = dq/dt; \quad i' = di/dt = d^2q/dt^2; \quad u' = du/dt; \quad (2)$$

$$q = \int_{I_t} i dt; \quad i = \int_{I_t} i' dt; \quad u = \int_{I_t} u' dt; \quad y = \int_{I_t} u dt, \quad (3)$$

где I_t – конечный интервал действия, наблюдения величин-аналогов; начальный момент интервала I_t обозначим через t_0 .

Рис. 1. Схемно-операционное изображение емкостного (а), резистивного (б), индуктивного (в) параметрических звеньев

На рис. 2 изображены схемно-операционные модельные звенья дифференцирования (а) и интегрирования (б) обобщенной величины $\vartheta_{\text{вх}} \in \{q, i, u\}$. Полагается также, что выходная величина звена $\vartheta_{\text{вых}} \in \{q, i, u, u', y\}$; $k_{\text{dif}} = d(\cdot)/dt$ – операторный коэффициент дифференцирования; $k_s = \int_{I_t} (\cdot) dt$ – операторный коэффициент интегрирования; позиция вида $(\cdot)$ предназначена для размещения символа величины, играющей роль входной применительно к данной операции.

Рис. 2. Схемно-операционное изображение дифференцирующего (а) и интегрирующего (б) звеньев

Из выражений (1)-(3) нетрудно получить следующие соотношения:

$$i = i_c = d(C_a u_c)/dt = C_a u_c' + C_a' u_c; \quad (4)$$

$$u = u_L = d(L_a i_L)/dt = L_a i_L' + L_a' i_L; \quad (5)$$

$$u_c' = du_c/dt, \quad C_a' = dC_a/dt, \quad i_L' = di_L/dt, \quad L_a' = dL_a/dt.$$

Допущение о постоянстве или квазипостоянстве параметров типа $P_a' = dP_a/dt$ позволяет привести соотношения (4)-(5) к частному виду $i_c = C_a u_c'$, $u_L = L_a i_L'$.

Из критериальных выражений (1)-(5) следует, что входящие в них величины i, i', u', y получаются путем временного дифференцирования и временного интегрирования аналогов заряда и напряжения (q, u), которые имеет смысл именовать образующими величинами – аналогами. Образующие и производные величины аналоги выдаются источниками, способными реально развить конечную мощность, поэтому и сами они могут считаться конечными.

Свойства величин – аналогов, связанных с описанием действия индуктивного и емкостного параметрических параметров, согласуются с законами коммутации [3], сфера приложения сущ-

ности которых выходит за электротехнические рамки и имеет более общий характер. Согласно таким обобщенным законам ни ток – аналог индуктивного элемента i_L , ни напряжение – аналог емкостного элемента u_C не могут изменяться скачкообразно.

Нормированная форма критериев подобия величин, относящихся к цепям различной природы, получается путем деления компонентов соотношений (1) – (5) на соответствующие физические единицы. Итак, критерии подобия могут быть изоморфно представлены:

1) для емкостного параметрического элемента – соотношениями

$$v_{qC} = v_C v_{uC}, \quad v_{iC} = v_C' v_{uC} + v_C v_{uC}', \quad v_C' = 0 \Rightarrow v_{iC} = v_C v_{uC}'; \quad (6)$$

2) для резистивного элемента – соотношением

$$v_{uR} = v_R v_{iR}; \quad (7)$$

3) для индуктивного элемента – соотношениями

$$v_{\psi L} = v_L v_{iL}, \quad v_{uL} = v_L' v_{iL} + v_L v_{iL}'; \quad v_L' = 0 \Rightarrow v_{uL} = v_L v_{iL}'. \quad (8)$$

Здесь форма любой величины типа $v_{\text{еп}} \in \{v_{qC}, v_{uC}, v_{iC}, v_{uC}', v_{uR}, v_{iR}, v_{\psi L}, v_{iL}, v_{uL}, v_{iL}'\}$ и любого параметра, относящегося к типам $v_{\text{п}} \in \{v_C, v_R, v_L\}$, $v_{\text{п}} \in \{v_C', v_L'\}$, безразмерна, поскольку

$$v_{\text{еп}} = \frac{\theta_{\text{п}}}{I[\theta_{\text{п}}]}, \quad v_{\text{п}} = \frac{\Pi_a}{I[\Pi_a]}, \quad v_{\text{еп}}' = \frac{\theta_{\text{п}}'}{I[\theta_{\text{п}}']}, \quad v_{\text{п}}' = \frac{\Pi_a'}{I[\Pi_a']};$$

$$\theta_{\text{п}} \in \{q_C, u_C, i_C, u_R, i_R, \psi_L, i_L, u_L\}, \quad \theta_{\text{п}}' \in \{u_C', i_L'\}.$$

Выражения для величин v_{iC} и v_{uL} взаимно симметричны по парам индексов C - L , u - i ; совокупная замена указанных индексов в одном из них (на парные индексы) позволяет сразу получить другое.

Безразмерные критериальные величины, входящие в соотношения (6) – (8), оказывается возможным распределить по множествам, свойства которых отвечают требованиям конечности. Такое распределение отображает следующие включения принадлежности (рис. 3):

$$v_{uC} \in M_{CI} I_t; \quad (9)$$

$$v_{qC}, v_{uC}', v_{iL}, v_{\psi L} \in M_{C0} I_t; \quad (10)$$

$$v_{iC}, v_{uR}, v_{iR}, v_{iL}', v_{uL} \in M_Q I_t; \quad (11)$$

$$M_{CI} I_t \subset M_{C0} I_t \subset M_Q I_t = M_{v6} I_t$$

где $M_{CI} I_t$, $M_{C0} I_t$, $M_Q I_t$ – множества элементов из пространств соответственно непрерывно дифференцируемых функций ($C_1[t_0, t]$), непрерывных функций ($C_0[t_0, t]$), кусочно – непрерывных функций ($Q[t_0, t]$) [4]. Полагая сначала параметры типа $v_{\text{п}}(\Pi_a)$ постоянными либо квазипостоянными, отнесем их значения к рассмотренной прямой $\bar{R}$ [5,6].

Входы – выходы множества $M_{v6} I_t = M_Q I_t$ (рис. 3) связаны с типами выбираемых из него величин согласно характеру включений (9) – (11); OY_j ($j=1, \dots, 5$) – блок операций умножения парных величин, поступающих на его входы. Типы входных величин блоков умножения составляют множество $\Gamma_{\text{вхоу}} = \{v_{uC}, v_{uC}', v_{iL}, v_{iR}, v_{iL}'\}$, а типы выходных величин данных блоков – множество $\Gamma_{\text{выхоу}} = \{v_{qC}, v_{iC}, v_{uR}, v_{\psi L}, \psi_{uL}\}$.

В случае принятия каким-либо параметром $v_{\text{п}}$ бесконечно большого значения ($v_{\text{п}} = \pm\infty$) при любом конечном выходе $v_{\text{выхоу}j} \in \Gamma_{\text{выхоу}}$, который он обязан иметь согласно заданным выше исходным требованиям, конечная входная величина данного блока умножения $v_{\text{вхоу}j} \in \Gamma_{\text{вхоу}}$ не может принимать никаких значений, кроме нулевого.

Схема связи исходных множеств критериальных величин и переменных параметров типа $\Pi_n(t)$, относящихся к математическому выражению критериев подобия, приведена на рис. 4. Воспроизведение этих критериев предусматривает использование блоков как операций умно-

жения ($OY1, \dots, OY7$), так и операций суммирования ($\Sigma1, \Sigma2$), при этом учитывается влияние производных C'_a, L'_a (в безразмерной форме - v'_C, v'_L).

Рис. 3. Взаимосвязи критериев подобия со множествами критериальных величин и постоянных параметров

Множество входных величин блоков умножения ($\bar{\Gamma}_{\text{вхоу}}$) остается здесь тем же, что и в предыдущем варианте связи критериев подобия и множествами реализации используемых величин и параметров, т.е. $\bar{\Gamma}_{\text{вхоу}} = \Gamma_{\text{вхоу}}$, а все возможные величины типов

$$v_{CI} = v_{uC}, v_{CO} \in \{v_{qC}, v'_{uC}, v_{iL}, v_{yL}\} \cup \{v_{uC}\}, v_Q \in \{v_{iC}, v_{uR}, v_{iR}, v'_{iL}, v_{uL}\} \cup \{v_{CO}\}$$

таким же образом, что и прежде, составляют множество $M_{vb}I_t$, являющееся множеством кусочно-непрерывных функций M_QI_t с подмножествами $M_{CI}I_t, M_{CO}I_t$. Множество используемых здесь переменных параметров $M_{\text{вп}}I_t$ представляет собой объединение множества M_QI_t с бесконечно большими значениями, принимаемыми параметрами типа $n_{\text{п}}$ на множестве локальных подинтервалов (типа Dt) интервала I_t :

$$M_{\text{вп}}I_t = M_QI_t \cup \{\pm \infty |_{\Delta_t}, \Delta_t = [\tau_0, t > \tau_0 \geq t_0]\}; \tau_0, t \in I_t.$$

Дифференцирование временных зависимостей конечных уровней из множества $M_{\text{вп}}I_t$ дает функции, вновь относящиеся к данному множеству, что относится и к результатам дифференцирования, имеющим бесконечные уровни. В каждом сечении множества $M_{\text{вп}}I_t$, приходящегося на произвольный момент $t = \tau \in I_t$, набор получаемых при этом значений $M_{\text{вп}}I_t|_{\tau}$ является ни чем иным, как расширенной прямой $\bar{R}$. Критерии подобия и множества их компонентов, соответствующие постоянству значений модельных параметров, представляют собой, таким образом, частный случай рассматриваемого критериально-множественного варианта, способного учитывать наличие производных n'_C, n'_L (рис. 4).

Рис. 4. Взаимосвязи критериев подобия со множествами критериальных величин и переменных параметров

Переход к множествам с размерными величинами ($M_{\epsilon}I_t$) и параметрами ($M_{\pi}I_t$), изоморфным и по отношению к $M_{v6}I_t$ и $M_{vn}I_t$, выполняется путем указания физических размерностей величин из M_bI_t , параметров из $M_{\pi}I_t$, т.е. с помощью умножения элементов безразмерного множества на соответствующую физическую единицу. При действии в каком-либо соединении модельных параметрических звеньев единой величины-аналога её реализации выбираются из того допустимого множества, которое накладывает на нее большие ограничения, и здесь учитывается, что в порядке ужесточения требований к дифференцируемости своих элементов следуют множества $M_QI_t, M_{C0}I_t, M_{C1}I_t$. Так, применительно к ситуации прохождения тока-аналога i через последовательное соединение индуктивного и резистивного элементов, к которому приложено напряжение-аналог u , в случае $L_a = const$ действительны следующие соотношения:

$$L_a i' + R_a i = u; \quad L_a i' = u_L, \quad R_a i = u_R, \quad i = i_L = i_R.$$

Согласно схеме взаимосвязей множеств величин и параметров с критериями подобия (составленной с учетом требований законов коммутации) для величин i_L, i_R , выражаемых в нормированной форме, имеем:

$$v_{iL} \in M_{C0}I_t, \quad v_{iR} \in M_QI_t;$$

рабочим множеством, регулирующим значения $v_i = i/I[i]$, здесь выбирается $M_{C0}I_t$. Нормированные же величины v_{uL}, v_{uR} принадлежат множеству M_QI_t , к которому следует отнести и величину $v_u = u/I[u]$.

Кроме параметров типа $v_{\pi}(\Pi_a)$ в выражения критериев подобия могут входить также обратные параметры, вида $v_{пообр} = I/v_{\pi}$, $\Pi_{аобр} = I/\Pi_a$, причем

$$v_{uC} = v_{I/C} v_{qC} = v_{I/C} \int_{I_t} v_{ic} dt, \quad v_{I/c} = (I/C_a) / (I/C_a); \quad v_{iR} = v_G v_{uR}, \quad v_G = G / (I[G]), \quad G = I/R;$$

$$v_{iL} = v_{I/L} v_{\psi L} = v_{I/L} \int_{I_t} v_{uL} dt, \quad v_{I/L} = (I/L_a) / (I/L_a).$$

Все реализации параметров типа $v_{пообр} (I_{аобр})$ принадлежат тем же множествам, которые реализуют тип параметров $v_{п} (I_a)$. В частности, для случая $v_{п} = const$ ($v_{п} \in \bar{R}$) имеем $v_{пообр} \in \bar{R}$, а для варианта $v_{п} = v_{п}(t) = var$, $v_{п}(t) \in M_{вп} I_t$ выполняется условие $v_{пообр}(t) \in M_{вп} I_t$.

Схемы, которые отражают взаимосвязи множеств, реализующих параметры типа $v_{пообр}$, величин типа v_e и критериев подобия, строятся согласно тому же подходу, что и схемы взаимосвязей критериев подобия с участием множества, обеспечивающего реализацию первоначально рассмотренных параметров-аналогов типа $n_{п}$. При рассмотрении величин, связанных с выработкой модельных аналогий электрической, магнитной, механической, гидравлической (пневматической) цепей [2], обращает на себя внимание тот факт, что произведение величин-аналогов напряжения и тока каждый раз представляет собой мощность p , развиваемую данной цепью. Поэтому при построении операционных моделей-аналогов физических цепей возможно также использование энергетического критерия подобия

$$p = ui; \quad v_p = v_u v_i; \quad v_p = p / (I[p]) \in M_Q I_t; \quad p \in M_p I_t = \{ I[p] v_Q; \quad v_Q \in M_Q I_t \}.$$

Итак, результатами отраженного в настоящей работе исследования следует считать, во-первых, получение совокупности критериев подобия физических цепей, специально ориентированных на базовые типы внутрицепных параметрических элементов, и, во-вторых, определение связей между критериями подобия и множествами различных реализаций модельных величин и параметров.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Островский Л.А. Основы общей теории электроизмерительных устройств. Л.: Энергия, 1971. 544с.
2. Зарипов М.Ф., Никонов А.И., Петрова И.Ю. Элементы теории информационных моделей преобразователей с распределенными параметрами. Уфа: Башкир. филиал АН СССР, 1983. 156с.
3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Учебник для вузов. М.: Высш. шк., 1964. 751с.
4. Треногин В.А. Функциональный анализ: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1980. 496с.
5. Рудин У. Основы математического анализа / Пер. с англ. М.: Мир, 1966. 319с.
6. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов: Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 432 с.

Поступила 7.12.2003 г.