Общероссийский математический портал

В. Е. Зотеев, Исследование устойчивости вычислений среднеквадратичных оценок коэффициентов авторегрессионной модели колебаний систем с турбулентным трением, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 26, 180–185

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu196>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 14:03:25

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫХ ОЦЕНОК КОЭФФИЦИЕНТОВ АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ С ТУРБУЛЕНТНЫМ ТРЕНИЕМ

Рассматриваются вопросы, связанные с устойчивостью вычислений среднеквадратичных оценок коэффициентов авторегрессионной модели колебаний диссипативных систем с турбулентным трением. На основе численно-аналитических исследований строятся области устойчивости для авторегрессионной модели третьего порядка.

Оперативная и достоверная оценка динамических характеристик (ДХ) диссипативной системы в процессе ее эксплуатации или прочностных промышленных испытаний является важнейшей задачей при анализе технического состояния механической системы. При современных информационных технологиях эта проблема может быть успешно решена на основе статистической обработки результатов измерений ординат свободных колебаний диссипативной системы. При случайной аддитивной помехе в результатах наблюдений задача параметрической идентификации динамической системы, математическая модель которой априори известна [1], сводится к вычислению среднеквадратичных оценок ДХ системы. Однако решение этой задачи существенно усложняется из-за нелинейности модели относительно определяемых параметров. В [2] рассмотрен метод определения динамических характеристик диссипативных систем на основе среднеквадратичных оценок параметров авторегрессионных моделей, описывающих временные последовательности отсчетов ординат свободных колебаний. Применение этого метода позволяет существенно повысить точность вычисления динамических характеристик диссипативной системы.

В данной работе рассматривается одна из важнейших проблем, возникающая при реализации данного метода, - проблема устойчивости решения нормальной системы уравнений при определении коэффициентов авторегрессионной модели колебаний систем с турбулентным трением. Исследование этой проблемы является необходимым условием успешного решения поставленной задачи.

Математическая модель свободных колебаний систем с турбулентным трением [1] описывается функцией вида $y(t) = \frac{a_0}{1 + \frac{d_0}{T}t} \cos\left(2p \frac{t}{T} + y_0\right)$, где d_0 - декремент и T - период колебаний;

a_0 и y_0 - амплитуда и фаза колебаний, соответствующие начальному моменту времени $t = 0$. При равномерной дискретизации временная последовательность отсчетов ординат свободных колебаний систем с турбулентным трением описывается выражением

$$y_k = \frac{a_0}{1 + \frac{d_0 t}{T}k} \cos\left(2p \frac{t}{T}k + y_0\right), \quad (1)$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots, K$; t - период дискретизации. Очевидно, что данная дискретная модель является нелинейной относительно динамических характеристик d_0 и T , и, следовательно, вычисление и статистический анализ среднеквадратичных оценок ДХ существенно затруднены.

Эту проблему можно решить, преобразовав дискретную модель (1) в линейно параметрическую дискретную модель, коэффициенты которой известным образом связаны с динамическими характеристиками диссипативной системы. В основе такого преобразования лежит построение рекуррентной формулы, связывающей три последовательных отсчета y_{k-2} , y_{k-1} и y_k , $k \geq 2$, во временной последовательности ординат свободных колебаний.

При построении линейно параметрической дискретной модели, описывающей колебания систем с турбулентным трением, обозначив $I_1 = -\frac{d_0 t}{T}$, из формулы (1) получаем

$$\begin{aligned} [1 - I_1(k-1)]y_{k-1} &= a_0 \cos[wt(k-1) + y_0] = (1 - I_1k)y_k \cos wt + z_k \sin wt, \\ [1 - I_1(k-2)]y_{k-2} &= a_0 \cos[wt(k-2) + y_0] = (1 - I_1k)y_k \cos 2wt + z_k \sin 2wt, \end{aligned}$$

где $z_k = a_0 \sin(wtk + y_0)$. Исключая из этих выражений z_k , после преобразований имеем

$$y_k = \frac{I_0[1 - I_1(k-1)]}{1 - I_1 k} y_{k-1} - \frac{1 - I_1(k-2)}{1 - I_1 k} y_{k-2}, \quad k \geq 2, \quad (2)$$

где $I_0 = 2 \cos wt$. Модель (2) можно преобразовать к виду, линейному относительно коэффициентов I_j :

$$I_0 y_{k-1} + I_1 [ky_k + (k-2)y_{k-2}] + I_2 (k-1)y_{k-1} = y_k + y_{k-2}, \quad k = 2, 3, 4, \mathbf{K}, \quad (3)$$

где коэффициенты модели связаны с параметрами нелинейной функции (1) соотношениями

$$I_0 = 2 \cos wt; \quad I_1 = -\frac{d_0 t}{T}; \quad I_2 = -I_0 I_1. \quad (4)$$

В практике эксперимента результаты наблюдений y_k содержат случайную аддитивную помеху e_k , которую в первом приближении можно считать нормально распределенной с нулевым математическим ожиданием. В этом случае линейно параметрическую дискретную модель (3) можно рассматривать как авторегрессионную (АР) модель, описывающую временную последовательность отсчетов ординат колебаний систем с турбулентным трением. Так как эта модель линейна относительно параметров I_j , то вычисление среднеквадратичных оценок I_j на ее основе не представляет затруднений.

Метод определения динамических характеристик диссипативной системы на основе авторегрессионной модели (3) состоит в следующем. По выборке объема $(N+1)$ результатов наблюдений y_k , $k = \overline{0, N}$, формируются матрица F размером $[(N-1) \times 3]$ и $(N-1)$ -мерный вектор правой части b :

$$F = \begin{bmatrix} y_1 & 2y_2 & y_1 \\ y_2 & 3y_3 + y_1 & 2y_2 \\ y_3 & 4y_4 + 2y_2 & 3y_3 \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{k-1} & ky_k + (k-2)y_{k-2} & (k-1)y_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{N-1} & Ny_N + (N-2)y_{N-2} & (N-1)y_{N-1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} y_0 + y_2 \\ y_1 + y_3 \\ y_2 + y_4 \\ \dots \\ y_{k-2} + y_k \\ \dots \\ y_{N-2} + y_N \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Среднеквадратичные оценки коэффициентов АР модели (3) находятся из условия минимизации на множестве $\{I_0, I_1, I_2\}$ функционала

$$\|FI - b\|_E^2 = \sum_{k=2}^N [I_0 y_{k-1} + I_1 [ky_k + (k-2)y_{k-2}] + I_2 (k-1)y_{k-1} - y_k - y_{k-2}]^2 \Rightarrow \min.$$

В результате получаем нормальную систему уравнений

$$F^T FI = F^T b, \quad (6)$$

где $I = (I_0; I_1; I_2)$, решение которой имеет вид

$$I = (F^T F)^{-1} F^T b. \quad (7)$$

По найденным значениям I_j частота $w = \frac{2p}{T}$ и декремент d_0 колебаний в соответствии с (4) вычисляются по формулам

$$w = \frac{1}{t} \arccos \frac{I_0}{2}; \quad d_0 = -\frac{2pI_1}{wt}. \quad (8)$$

Очевидно, что необходимым условием успешной реализации данного метода является существование и единственность решения нормальной системы уравнений (6). Для этого достаточно, чтобы матрица $A = F^T F$ была невырожденной. Так как элементы матрицы A зависят от параметров дискретной функции (1), а также от целочисленных значений k , то были проведены численно – аналитические исследования влияния этих параметров на величину определителя $\det A$. Результаты исследований позволяют сделать вывод, что в рабочем диапазоне изменения параметров: $d_0 \in (0; \infty)$, $t \in \left(0; \frac{T}{2}\right)$, $y_0 \in [0; p]$, $k = \overline{2, N}$, где $N \geq 4$, матрица A невырожденна.

денная ($\det A \neq 0$). Исключение составляет лишь случай, когда $t = 0,25T$, $y_0 = 0$ ($y_0 = p$) и $N = 4$. Действительно, при нечетных значениях $k = 2i + 1$, $i = 0, 1, 2, \mathbf{K}$, имеем

$$y_{2i+1} = \frac{a_0}{1 + \frac{d_0(2i+1)}{4}} \cos\left(\frac{p}{2} + pi\right) = 0 \text{ и, следовательно, } \det A = (\det F)^2 = \begin{vmatrix} 0 & 2y_2 & 0 \\ y_2 & 0 & 2y_2 \\ 0 & 4y_4 + 2y_2 & 0 \end{vmatrix}^2 = 0.$$

Рассмотрим проблему устойчивости решения нормальной системы уравнений (6), сформированной на основе линейно параметрической дискретной модели (3). В реальных испытаниях результаты наблюдений y_k содержат случайную аддитивную помеху e_k , и поэтому можно говорить о возмущении матрицы $A = F^T F$. Решение нормальной системы уравнений при заданном возмущении DA ее матрицы будем считать устойчивым, если матрица $A + DA$ будет невырожденной, т. е. будет существовать обратная матрица $(A + DA)^{-1}$. Соответственно, будем считать устойчивым вычисление среднеквадратичных оценок коэффициентов авторегрессионной модели (3) и говорить об устойчивости самой авторегрессионной модели.

Рассмотрим возмущенную систему $(A + DA)(I + DI) = (F + DF)^T(b + Db)$, в которой возмущения матриц DA , DF и вектора Db обусловлены помехой e_k , причем $\|A^{-1}\|_E \leq m$, $m = \text{const} > 0$, т. е. матрица A невырожденная, а невозмущенная система имеет единственное решение. Покажем, что достаточным условием, при котором матрица возмущенной системы $A + DA$ также будет невырожденной, а возмущенная система однозначно разрешима, является выполнение неравенства

$$\|DA\|_E < \frac{1}{\|A^{-1}\|_E}. \quad (9)$$

Известно, что матрица $A + DA$ невырожденная, если $\exists m_1 > 0$: $\|(A + DA)^{-1}\|_E \leq m_1$. Имеем $\|(A + DA)^{-1}\|_E = \|(E + A^{-1}DA)^{-1}A^{-1}\|_E \leq \|(E + A^{-1}DA)^{-1}\|_E \cdot \|A^{-1}\|_E \leq m \|(E + A^{-1}DA)^{-1}\|_E$. Известно [3], что при $\|A^{-1}DA\|_E < 1$ матрица $(E + A^{-1}DA)^{-1}$ может быть представлена в виде сходящегося ряда: $(E + A^{-1}DA)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (A^{-1}DA)^k$. Так как $\|A^{-1}DA\|_E < \|A^{-1}\|_E \|DA\|_E$, то при выполнении неравенства (9) очевидно будет выполняться и условие $\|A^{-1}DA\|_E < 1$. Тогда получаем

$$\|(A + DA)^{-1}\|_E \leq m \|(E + A^{-1}DA)^{-1}\|_E \leq m \sum_{k=0}^{\infty} \|A^{-1}DA\|_E^k = \frac{m}{1 - \|A^{-1}DA\|_E} = m_1, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Пусть $|e_k| \leq e_{\text{пр}}$, где $e_{\text{пр}}$ – предельная абсолютная погрешность в результатах наблюдений. При заданном объеме выборки очевидно, что за $e_{\text{пр}}$ можно принять $e_{\text{пр}} = \max_{k=0, N} |e_k|$, при этом в качестве предельной относительной погрешности можно использовать величину $D = \frac{e_{\text{пр}}}{\max_{k=0, N} |y_k|}$.

Представляют интерес те значения допустимой предельной относительной погрешности D в результатах наблюдений, при которых обеспечивается устойчивость решения нормальной системы уравнений (6), т. е. выполняется достаточное условие (9). Графики зависимости допустимой предельной относительной погрешности D от основных характеристик дискретной функции (1) описывают области устойчивости авторегрессионной модели (3). Для построения областей устойчивости необходимо сформулировать достаточное условие (9) относительно предельной погрешности D .

Очевидно, что $\|DA\|_E = \|DF^T F + F^T DF + DF^T DF\|_E \leq 2\|DF^T F\|_E + \|DF^T DF\|_E$, где матрица $DF = (Df_{ij})$, $i = \overline{1, N-1}$, $j = \overline{1, 3}$, имеет вид, аналогичный (5): $DF_i = [e_i \mathbf{N}(i+1)e_{i+1} + (i-1)e_{i-1} \mathbf{N}e_i]$, $i = \overline{1, N-1}$.

Рассмотрим оценки норм $\|DF^T F\|_E$ и $\|DF^T DF\|_E$ по отдельности. Для матрицы

$$DF^T F = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N-1} e_i y_i & \sum_{i=1}^{N-1} e_i [(i+1)y_{i+1} + (i-1)y_{i-1}] & \sum_{i=1}^{N-1} i e_i y_i \\ \sum_{i=1}^{N-1} y_i [(i+1)e_{i+1} + (i-1)e_{i-1}] & \sum_{i=1}^{N-1} [(i+1)e_{i+1} + (i-1)e_{i-1}] [(i+1)y_{i+1} + (i-1)y_{i-1}] & \sum_{i=1}^{N-1} i y_i [(i+1)e_{i+1} + (i-1)e_{i-1}] \\ \sum_{i=1}^{N-1} i e_i y_i & \sum_{i=1}^{N-1} i e_i [(i+1)y_{i+1} + (i-1)y_{i-1}] & \sum_{i=1}^{N-1} i^2 e_i y_i \end{bmatrix},$$

используя неравенства, аналогичные неравенству

$$\left(\sum_{i=1}^{N-1} [(i+1)e_{i+1} + (i-1)e_{i-1}] [(i+1)y_{i+1} + (i-1)y_{i-1}] \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{N-1} [(i+1)e_{i+1} + (i-1)e_{i-1}]^2 [(i+1)y_{i+1} + (i-1)y_{i-1}]^2 \right) \leq$$

$$\leq 4e_{np}^2 \left(\sum_{i=1}^{N-1} i [(i+1)y_{i+1} + (i-1)y_{i-1}]^2 \right), \text{ можно получить оценку } \|DF^T F\|_E \leq e_{np} \cdot \|M\|_E, \text{ где матрица}$$

M имеет вид

$$M = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N-1} |y_i| & \sum_{i=1}^{N-1} |(i+1)y_{i+1} + (i-1)y_{i-1}| & \sum_{i=1}^{N-1} i |y_i| \\ 2 \sum_{i=1}^{N-1} i |y_i| & 2 \sum_{i=1}^{N-1} i |(i+1)y_{i+1} + (i-1)y_{i-1}| & 2 \sum_{i=1}^{N-1} i^2 |y_i| \\ \sum_{i=1}^{N-1} i |y_i| & \sum_{i=1}^{N-1} i |(i+1)y_{i+1} + (i-1)y_{i-1}| & \sum_{i=1}^{N-1} i^2 |y_i| \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Из неравенства $\|DF^T DF\|_E \leq \|DF\|_E^2$, где $\|DF\|_E^2 = \sum_{i=1}^{N-1} e_i^2 + \sum_{i=1}^{N-1} [(i+1)e_{i+1} + (i-1)e_{i-1}]^2 + \sum_{i=1}^{N-1} i^2 e_i^2$, по-

лучаем оценку: $\|DF^T DF\|_E \leq e_{np}^2 \cdot a$, где $a = \frac{10N^3 - 15N^2 + 11N - 6}{6}$. Таким образом, соотношение

(9) может быть представлено в виде $\|DA\|_E \leq 2e_{np} \cdot \|M\|_E + e_{np}^2 a \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|_E}$. Отсюда получаем огра-

ничения на предельную абсолютную погрешность в результатах наблюдений:

$$e_{np} \leq \frac{\sqrt{\|M\|_E^2 + a \|A^{-1}\|_E^{-1}} - \|M\|_E}{a}. \quad (11)$$

На основании формулы (11) проведены численно-аналитические исследования зависимости предельно допустимой относительной погрешности в результатах эксперимента от изменения основных параметров модели и режима обработки экспериментальных данных в диапазонах: $\frac{t}{T} \in (0,01; 0,5)$, $N = \overline{5,50}$, $y_0 \in [0; p]$, $d_0 \in (0,01; 0,5)$. Результаты исследований представлены на рис. 1. – рис. 4. На рис. 1. приведены зависимости предельно допустимой относительной погрешности от периода дискретизации t непрерывной функции, описывающей свободные колебания систем с турбулентным трением. Графики зависимостей представлены для объемов выборки $N=5, 10$ и 20 при $y_0 = \frac{p}{2}$ и $d_0 = 0,05$. По результатам исследований можно сделать вывод, что предельно допустимая относительная погрешность D существенно зависит от t , оптимальным значением которого является значение $t = 0,25T$. На рис. 2. представлены кривые зависимости допустимой предельной относительной погрешности D в результатах эксперимента от объема выборки при $t = 0,25T$, $y_0 = \frac{p}{2}$ и $d_0 = 0,05$. Очевидно резкое уменьшение допустимых значений предельной относительной погрешности при увеличении объема выборки. На рис.3. представлены графики зависимости предельно допустимой относительной погрешности D от начальной фазы колебаний y_0 , т.е. от момента начала формирования выборки результатов измерений. Графики представлены для объемов выборки $N=5, 10$ и 20 при $t = 0,25T$ и $d_0 = 0,05$. Очевидно, что выбор первого отсчета в выборке результатов наблюде-

ний при малых значениях объема выборки существенно влияет на устойчивость среднеквадратичных оценок динамических характеристик системы.

Представленные на рис. 4. зависимости предельно допустимой относительной погрешности от декремента колебаний d_0 свидетельствуют о том, что D мало зависит от величины рассея-

Р и с. 1. Зависимости предельной относительной погрешности в результатах наблюдений от периода дискретизации непрерывной функции

Р и с. 2. Зависимости предельной относительной погрешности в результатах наблюдений от объема выборки

Р и с. 3. Зависимости предельной относительной погрешности в результатах наблюдений от начальной фазы колебаний

Р и с. 4. Зависимости предельной относительной погрешности в результатах наблюдений от декремента колебаний

ния энергии колебаний системы в достаточно широком диапазоне изменения ее диссипативных характеристик.

Таким образом, по результатам работы можно сделать следующие выводы. Во-первых, получено соотношение (11), определяющее предельно допустимую погрешность в результатах наблюдений, при которой гарантируется устойчивость вычислений среднеквадратичных оценок коэффициентов авторегрессионной модели колебаний систем с турбулентным трением. Во-вторых, построены области допустимого изменения параметров модели и режима обработки экспериментальных данных, обеспечивающие устойчивость вычисления коэффициентов авторегрессионной модели (3). В третьих, установлено, что требования, предъявляемые к точности

результатов эксперимента, существенно зависят от периода дискретизации непрерывной функции, объема выборки, а также от момента начала формирования этой выборки. В заключение следует отметить, что численно-аналитические исследования показали существенный (в несколько раз превышающий полученные результаты) запас устойчивости вычислений коэффициентов авторегрессионной модели.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Пановко А.Г.* Основы прикладной теории колебаний и удара. Л.: Машиностроение, 1976. 320 с.
2. *Зотеев В.Е.* Разработка и исследование линейных дискретных моделей колебаний диссипативных систем // Вестник СамГТУ. Сер.: Физ.-мат. науки. 1999. Вып. № 7. С. 170-177.
3. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.

Поступила 19.01.2004 г.