Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Малышев, Теория бликов в R^n , *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 26, 186–188

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu197>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 18:28:58

Краткие сообщения

Дифференциальные уравнения

У.Д.К. 517.956

Ю.В.Малышев

ТЕОРИЯ БЛИКОВ В R^n

Что такое видимое пространство? Это сложные сочетания падающих и отраженных лучей, воспринимаемых глазом наблюдателя. В работе строится модель соответствия гладкому многообразию σ в пространстве R^n многообразия Γ , обладающего экстремальными свойствами относительно двух фиксированных точек V, S .

Пусть в пространстве R^n заданы в декартовых координатах точки $V(x_i^{(1)})$, $S(x_i^{(2)})$ ($i = \overline{1, n}$) и гладкое многообразие σ с касательным множеством T , определяемым вектором $\{p_i, -1\}$,

$$p_i = \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \quad (i = \overline{1, n-1}).$$

Бликом на T назовём точку $B(x_i)$, для которой $r \pm r = \text{extr}$, $r = |\vec{VB}|$, $r = |\vec{BS}|$. Точка B геометрически находится как пересечение прямой $S'V$ с T (S' – точка, симметричная с S относительно T).

Пусть T имеет уравнение

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i + k, \quad (1)$$

где $k = \overline{x_n} - \sum_{i=1}^{n-1} p_i \overline{x_i}$, $(\overline{x_i}, \overline{x_n}) \in S$. Из точки S проведём нормаль к T :

$$x_i = x_i^{(2)} + tp, \quad x_n = x_n^{(2)} - t, \quad (2)$$

t – параметр. Подставим (2) в (1):

$$x_n^{(2)} - t = \sum p_i (x_i^{(2)} + p_i t) + k.$$

Отсюда

$$t = (x_n^{(2)} - \sum p_i x_i^{(2)} - k) / h, \quad (3)$$

где $h = 1 + \sum p_i^2$

Подставляя (3) в (2), найдём координаты точки $S^0(x_i^0) \in T$:

$$x_n^0 = x_n^{(2)} - t; \quad x_i^0 = x_i^{(2)} + p_i t.$$

Зная S и S^0 , легко найти $S'(x_i')$:

$$2x_i^0 = x_i^{(2)} + x_i', \quad x_n' = x_n^{(2)} - 2t, \quad x_i' = x_i^{(2)} + 2p_i t. \quad (4)$$

Уравнение прямой $S'V$ будет иметь вид:

$$x_i = x_i' + I(x_i^{(1)} - x_i^{(2)} - 2p_i t), \quad x_n = x_n' + I(x_n^{(1)} - x_n^{(2)} + 2t), \quad (5)$$

где I – параметр.

Подставляя (5) в (1), имеем

$$x_n^{(2)} - 2t + I(x_n^{(1)} - x_n^{(2)} + 2t) = \sum p_i [x_i^{(2)} + 2p_i t + I(x_i^{(1)} - x_i^{(2)} - 2p_i t)] - k,$$

откуда

$$I = (k - x^{(2)} + 2th) / (x^{(1)} - x^{(2)} + 2th), \quad (6)$$

где $x^{(m)} = x_n^{(m)} - \sum p_i x_i^{(m)}$ ($m=1, 2$). Подставляя (6) в (5), найдём $B(x_i^B)$:

$$\begin{cases} x_i^B = x_i^{(2)} + 2p_i t + I(x_i^{(1)} - x_i^{(2)} - 2p_i t), \\ x_n^B = x_n^{(2)} - 2t + I(x_n^{(1)} - x_n^{(2)} + 2t). \end{cases} \quad (7)$$

Если к уравнениям (7) присоединить уравнения $q_i = \frac{\partial x_n^B}{\partial x_i^B}$, полученные из (7) дифференцированием, то эти уравнения вместе с (7) определяют касательное преобразование (назовём его бликоидным), ставящее в соответствие поверхностным элементам (x_i^B, q_j) поверхностные элементы $(\bar{x}_i, p_{j_0})$, $i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n-1}$.

При совпадении точек S и V данное преобразование совпадает с *подэрным* преобразованием [1].

Блик B можно получить иначе – как точку касания гиперэллипсоида, имеющего фокус в точках V, S с гиперплоскостью T .

Пусть V и S имеют координаты $V(-c, 0, \dots, 0)$, $S(c, 0, \dots, 0)$. Тогда в точке $B(x_i)$ выполняются равенства

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{\sum_{j=2}^n x_j^2}{a^2 - c^2} = 1; \quad \frac{x_1 \bar{x}_1}{a^2} + \frac{\sum_{j=2}^n x_j \bar{x}_j}{a^2 - c^2} = 1,$$

где a^2 - параметр. Исключая a^2 , получим

$$(x_1 \sum_{j=2}^n x_j k_j - \sum_{j=2}^n x_j^2) (\sum_{j=2}^n x_j k_j + x_1) = c^2 \sum_{j=2}^n x_j k_j. \quad (8)$$

Здесь обозначено $k_j = \frac{x_j - \bar{x}_j}{x_1 - \bar{x}_1}$, $j = \overline{2, n}$.

Уравнение (8) – другое представление бликоидного преобразования. Оно ставит в соответствие всякой точке $M(\bar{x}_i)$ бликоиду этой точки, а всякой поверхности S её бликоиду Γ . Особенно просто это соответствие просматривается в плоском случае ($n=2$). Если $V(-c, 0)$, $S(c, 0)$, то уравнение (8) даст

$$\Omega(x, y, \bar{x}, \bar{y}) \equiv (yk + x)(xk - y) - c^2 k = 0, \quad k = \frac{y - \bar{y}}{x - \bar{x}}. \quad (9)$$

Если же $V(x_1, y_1)$, $S(x_1, y_1)$, $M(\bar{x}, \bar{y})$, то из (8) получаем уравнение бликоиды точки M вида

$$\frac{2k}{1-k} = \frac{k_1 + k_2}{1 - k_1 k_2}, \quad (10)$$

где $k_m = \frac{y - y_m}{x - x_m}$, $m=1, 2$.

Из (10) видно, что в каждой точке B бликоиды удвоенный угол, образованный прямой MB с осью OX , равен сумме углов, образованных с той же осью бликоидными радиусами - векторами точки M . Форма бликоиды точки зависит от расположения основных точек V, S и вершины пучка M :

а) V, S равноудалены от M , здесь из (10) при $x_1 = -c$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $x_2 = c$, $\bar{x} = 0$ получаем прямую и окружность:

$$1) x=0, \quad x^2 + (y - \frac{\bar{y}^2 - c^2}{2\bar{y}})^2 = \frac{(\bar{y}^2 + c^2)^2}{4\bar{y}^2};$$

б) V, S, M лежат на одной прямой.; здесь при $x_1 = -c$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $x_2 = c$, $\bar{y} = 0$ из (10) получаем прямую и окружность Апполония:

$$1) y=0, \quad 2) y^2 + (x + \frac{\bar{x}^2 + c^2}{2\bar{x}})^2 = \frac{(c^2 - \bar{x}^2)^2}{4\bar{x}^2};$$

в) одна из точек V, S бесконечно удалена; здесь при $x_2 = 0$, $y_2 = \infty$, $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$ из (10) получаем уравнение строфоиды

$$x^2(x - x_1) + y^2(x + x_1) - 2xyy_1 = 0;$$

г) вершина пучка M бесконечно удалена; здесь при $V(x_1, y_1)$, $S(-x_1, -y_1)$, $M(0, \infty)$ получаем гиперболу $xy = x_1 y_1$ и несобственную прямую.

Аналогичные построения можно получить и при $n=3$ [2,3].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Lie S.* Geometric Der Berührungstransformationen. Loipzig, 1896. 555p.
2. *Facciotti G.* Brillanti di curve e superficie // Period.mat. 1962. №1. P. 29-40
3. *Мальишев Ю.В.* Об одном касательном преобразовании // Труды КХТИ. Вып. XXXI. Серия: механич. наук. Казань: КХТИ, 1963. С. 116-123

Поступила 17.03.2004 г.