Общероссийский математический портал

С. В. Жуйко, Вычисление постоянных интегрирования в задаче двух неподвижных центров Л. Эйлера, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 26, 189–191

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu198>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 09:47:37

Приложения дифференциальных уравнений

УДК 521.13

С.В. Жуйко

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ЗАДАЧЕ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ Л. ЭЙЛЕРА

Получены соотношения для вычисления постоянных интегрирования в задаче двух неподвижных центров Л. Эйлера

Задача двух неподвижных центров была введена Л. Эйлером [1] в 1760 г. и до сих пор является одной из фундаментальных задач небесной механики. Рассмотрим ее постановку. Предположим, что на плоскости OXY находятся две неподвижные материальные точки (центры) P_1 и P_2 с массами m_1 и m_2 , под действием ньютоновского притяжения которых в этой же плоскости движется материальная точка P массы m . Длину отрезка $[P_1, P_2]$ будем считать равной $2c$ и для определенности положим, что $m_1 \geq m_2$.

Выберем прямоугольную систему координат OXY таким образом, чтобы центры P_1 и P_2 располагались на оси OX и были равноудалены от начала координат, т.е. их координаты были равны $(-c, 0)$ и $(c, 0)$ соответственно. Тогда величины r_1 и r_2 , определяемые формулами $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, будут представлять расстояния точки P от центров P_1 и P_2 (см. рисунок).

Дифференциальные уравнения движения точки P , притягиваемой центрами P_1 и P_2 с силами, обратно пропорциональными квадратам расстояний, запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -fm_1 \frac{x+c}{r_1^3} - fm_2 \frac{x-c}{r_2^3}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -fm_1 \frac{y}{r_1^3} - fm_2 \frac{y}{r_2^3}, \end{aligned} \quad (1)$$

Схема к задаче двух центров

где f – гравитационная постоянная, а t – время.

Решение задачи двух неподвижных центров заключается в интегрировании этих уравнений, т.е. в нахождении координат (x, y) точки P как функций времени, удовлетворяющих уравнениям движения (1) с заданными начальными условиями.

После введения эллиптических координат

$$\lambda = \frac{r_1 + r_2}{2c}, \mu = \frac{r_1 - r_2}{2c} \quad (2)$$

и произвольных постоянных $\alpha, \gamma, \alpha_1, \gamma_1$, общий интеграл задачи можно записать в виде [2]

$$\begin{aligned} \int \frac{dl}{\sqrt{L(l)}} + \int \frac{dm}{\sqrt{M(m)}} &= \sqrt{2}g_1, \quad \int \frac{l^2 dl}{\sqrt{L(l)}} + \int \frac{m^2 dm}{\sqrt{M(m)}} = \sqrt{2}(t + a_1); \\ \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 &= L(l) = (l^2 - 1)(ac^2 l^2 + 2fc n_1 l - g); \\ \left(\frac{dm}{dt}\right)^2 &= M(m) = (m^2 - 1)(ac^2 m^2 + 2fc n_2 m - g). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь коэффициенты n_1 и n_2 соответственно равны

$$n_1 = \frac{m_1 + m_2}{2}; \quad n_2 = \frac{m_1 - m_2}{2},$$

а собственное время τ связано с t уравнением

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int c^2 (l^2 - m^2) dt. \quad (4)$$

Обратимся теперь к задаче вычисления постоянных интегрирования в (3). Условимся точкой над соответствующей переменной обозначать ее производную по времени t . Положим далее, что для начального момента $t = t_0$ нам известны значения прямоугольных координат и их производных $x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$.

С помощью выражений для взаимных расстояний

$$r_{10} = \sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2}, \quad r_{20} = \sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2}$$

находим начальные значения эллиптических координат

$$I_0 = \frac{1}{2c}(r_{10} + r_{20}), \quad m_0 = \frac{1}{2c}(r_{10} - r_{20})$$

и их производных – сначала по t :

$$\dot{I}_0 = \frac{\sqrt{(I_0^2 - 1)}}{c(I_0^2 - m_0^2)} \left[m_0 \sqrt{I_0^2 - 1} \dot{x}_0 + I_0 \sqrt{1 - m_0^2} \dot{x}_0 \right], \quad \dot{m}_0 = \frac{\sqrt{(1 - m_0^2)}}{c(I_0^2 - m_0^2)} \left[I_0 \sqrt{1 - m_0^2} \dot{x}_0 - m_0 \sqrt{I_0^2 - 1} \dot{x}_0 \right],$$

а затем по собственному времени τ

$$\left(\frac{dI}{dt} \right)_0 = \frac{c^2(I_0^2 - m_0^2)}{\sqrt{2}} \dot{I}_0, \quad \left(\frac{dm}{dt} \right)_0 = \frac{c^2(I_0^2 - m_0^2)}{\sqrt{2}} \dot{m}_0.$$

Теперь из интеграла энергии определяем постоянную α [2]:

$$a = \frac{1}{2}(x_0^2 + y_0^2) - f \left\{ \frac{m_1}{r_{10}} + \frac{m_2}{r_{20}} \right\},$$

где f – гравитационная постоянная. Затем из интегралов (3) определяем значение γ :

$$g = \frac{1}{(I_0^2 - 1)} \left(\frac{dI}{dt} \right)_0^2 - ac^2 I_0^2 - 2fc n_1 I_0 = \frac{1}{(m_0^2 - 1)} \left(\frac{dm}{dt} \right)_0^2 - ac^2 m_0^2 - 2fc n_2 m_0.$$

Наконец, первые интегралы (3) позволяют вычислить постоянные α_1 и γ_1 :

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \int_{I_1}^{I_0} \frac{I^2 dI}{\sqrt{L(I)}} + \int_{m_1}^{m_0} \frac{m^2 dm}{\sqrt{M(m)}} \right\}, \quad g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \int_{I_1}^{I_0} \frac{dI}{\sqrt{L(I)}} + \int_{m_1}^{m_0} \frac{dm}{\sqrt{M(m)}} \right\}.$$

Здесь λ_1 и μ_1 – наименьшие корни полиномов $L(\lambda)$ и $M(\mu)$, отвечающие областям действительных движений [2].

Формулы решения задачи двух неподвижных центров являются параметрическими функциями координат от собственного времени τ . Зависимость t от переменной τ также задается одной из полученных функций $t(\tau)$. Следовательно, в случае непрерывного изменения τ можно найти соответствующие величины $\lambda(\tau)$ и $\mu(\tau)$ и отвечающие каждой точке траектории моменты времени $t(\tau)$. Однако при необходимости иметь явные зависимости $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ потребуются решить обратную задачу – найти по заданному времени t_c соответствующее значение τ_c , т. е. решить трансцендентное уравнение (4):

$$t_c - t(\tau_c) = 0. \quad (5)$$

Тем не менее некоторые свойства функции $t(\tau)$, при использовании приближенных методов решения уравнений, позволяют находить величину τ_c по заданному значению t_c с любой степенью точности.

Из неравенства $\lambda^2 - \mu^2 > 0$ следует, что функция $t(\tau)$ монотонно возрастает. Это позволяет для нахождения решения уравнения (5) использовать, например, метод дихотомии, обеспечивающий сходимость при любом начальном приближении. Можно применить и метод Ньютона, для сходимости которого необходимо, чтобы начальное приближение $\tau^{(0)}$ удовлетворяло соотношению

$$|f''(\tau^{(0)}) \cdot f(\tau^{(0)})| < |f'(\tau^{(0)})|^2,$$

где $f(\tau) = t(\tau) - t_c$. Облегчению выбора значения $\tau^{(0)}$, удовлетворяющего этому условию, способствует выявление того интервала τ , в котором находится решение уравнения (5).

При ограниченных движениях, как показал анализ, изменению времени t в заданном интервале соответствует изменение переменной τ в том же промежутке. Поскольку при таких движениях $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ и $\mu_1^2 \leq \mu^2 \leq \mu_2^2$, то, полагая $t(0) = 0$, можно записать неравенства

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t (I^2 - m^2) dt \leq \frac{(I_2^2 - m_1^2)}{\sqrt{2}} t; \quad t > (I_1^2 - m_2^2) t.$$

Поэтому искомое решение τ_c уравнения (5) ограничено интервалом

$$\frac{\sqrt{2}t_c}{I_2^2 - m_1^2} \leq \tau_c \leq \frac{\sqrt{2}t_c}{I_1^2 - m_2^2},$$

где и следует выбрать начальное приближение.

При неограниченных движениях величина τ задается конечным интервалом, который определяется формулой $u_1 - \frac{d}{2} \leq \tau \leq u_1 + \frac{d}{2}$, где $u_1 = t_1 + \bar{w}_1$, $d = 2\bar{w}_1 - w_1$, при $\alpha > 0$ и $d = 2\bar{w}_1$, при $\alpha = 0$ [3].

Полагая теперь $t(u_1) = 0$, имеем следующее уравнение:

$$t(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{u_1}^t (I^2 - m^2) dt.$$

Таким образом, если заданное значение $t_c < 0$, то $\tau_c < u_1$, а если $t_c \geq 0$, то $\tau_c \geq u_1$. Поскольку в зависимостях $\lambda(\tau)$ для функции Вейерштрасса $\wp_1(z)$, полученных в [3], справедливо равенство $\wp'_1(u_1 - t_1) = \wp'_1(\bar{w}_1) = 0$, то, очевидно, что в момент $t = 0$ переменная λ достигает минимального значения λ_1 . Так как и в неограниченных движениях $\mu_1^2 \leq \mu^2 \leq \mu_2^2$, то

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{u_1}^t (I^2 - m^2) dt \geq \frac{(I_1^2 - m_2^2)(t - u_1)}{\sqrt{2}}, \text{ если } \tau > u_1,$$

$$-t \geq \frac{(I_1^2 - m_2^2)(u_1 - t)}{\sqrt{2}}, \text{ при } \tau < u_1.$$

Из этих заключений следует вывод, что при $t_c > 0$ начальное приближение следует взять в интервале (u_1, u_2) , а при $t_c < 0$ – в интервале (u_3, u_1) , где величины u_2, u_3, u_4 соответственно равны:

$$u_2 = \min\left(u_1 + \frac{d}{2}, u_4\right), \quad u_3 = \max\left(u_1 - \frac{d}{2}, u_4\right), \quad u_4 = u_1 + \frac{\sqrt{2}t_c}{I_1^2 - m_2^2}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Euler L. // Historie de L'Academie Royale des sciences et Belles-lettres (1760). 1767.V. XVI. P. 228-247.
2. Герасимов И.А. Введение в задачу Л. Эйлера о движении материальной точки в поле притяжения двух неподвижных центров. М.: Изд-во МГУ, 2004. 180 с.
3. Герасимов И.А. Классификация неограниченных траекторий в задаче двух неподвижных центров Л. Эйлера. // Труды ГАИШ. М.: МГУ. Т. 74.

Поступила 2.12.2003 г.