Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Данилушкин, И. А. Данилушкин, Метод вторичных источников для моделирования электромагнитных процессов при индукционном нагреве, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1998, выпуск 6, 140–142

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu20>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 18:13:07

Математическое моделирование

УДК 621.365:519.7

А.И. Данилушкин, И.А. Данилушкин

МЕТОД ВТОРИЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ИНДУКЦИОННОМ НАГРЕВЕ

Рассмотрен метод расчёта распределения плотности вихревого тока по объёму проводника при индукционном нагреве. Метод предполагает построение итерационного алгоритма, легко реализуемого на ЭВМ.

При численном исследовании электромагнитных процессов с помощью ЭВМ обычно используют электромагнитную модель в виде краевой задачи, вводя векторный и скалярный потенциалы поля. Основные усилия в этом случае направляют на совершенствование класса вычислительных методов. В то же время существует возможность извлечь из теоретической модели дополнительную информацию и, преобразовав ее аналитически, значительно уменьшить объём численных расчетов, одновременно повысив их точность.

По методу вторичных источников [1] для расчёта электромагнитного поля в любой точке пространства сначала определяются все источники поля. Заменяя электромагнитное поле в неоднородной среде суммой двух полей в вакууме – первичного, созданного токами индуктора, и вторичного, образованного наведёнными поверхностными зарядами на границе раздела сред и вихревыми токами, индуцированными в проводнике, строят итерационный алгоритм нахождения вторичных источников поля. При этом используется максимум информации о процессе.

Проиллюстрируем использование метода вторичных источников на примере расчета вихревых токов при индукционном нагреве диска газотурбинного двигателя в процессе термоциклических испытаний [2]. Вращающийся диск нагревается параллельным индуктором, смещённым относительно оси вращения, чем достигается равномерность распределения внутренних термоисточников по радиусу диска [3]. Распределение термоисточников определяется плотностью вихревых токов в объёме диска из уравнений Максвелла [4]:

$$\delta_B = \gamma_0 \mathbf{E}. \quad (1)$$

Здесь δ_B – плотность вихревого тока, $\mathbf{E}$ – напряжённость электрического поля γ_0 – удельная проводимость металла.

Применение (1) для расчёта вихревых токов затруднено, так как нет ясности в определении составляющей $\mathbf{E}$. Ясно только, что она зависит от формы диска и распределения в нем магнитного поля. Чтобы найти эту зависимость, воспользуемся теоремой разложения Гельмгольца.

Найдем источники поля $\mathbf{E}$. Из уравнений Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \delta_M, \quad (2)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \text{div } \mathbf{D} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{B}$ – магнитная индукция, δ_M имеет смысл плотности магнитного тока; $\mathbf{D}$ – электрическая индукция; ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума; ρ имеет смысл плотности электрического заряда.

Введем скалярный и векторный потенциалы электрического поля в диске

$$\varphi_E(Q, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(M, t)}{r_{QM}} dV_M; \quad (4)$$

$$\mathbf{A}_E(Q, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\delta_M(M, t)}{r_{QM}} dV_M, \quad (5)$$

где $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ и $M = (x_M, y_M, z_M)$ точки пространства; r_{QM} – модуль вектора, направленного от точки Q к точке M .

По теореме разложения Гельмгольца [5] напряжённость $\mathbf{E}$ можно представить в виде суммы

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi_E + \text{rot } \mathbf{A}_E. \quad (6)$$

По теореме единственности напряженность $\mathbf{E}$ однозначно определяется при дополнительном условии задания нормальной составляющей $\mathbf{E} \frac{d\mathbf{S}}{|d\mathbf{S}|}$ функции $\mathbf{E}$ в каждой точке поверхности S , т.е. при задании распределения зарядов по поверхности диска. В нашем случае без значительных погрешностей можно принять [4]

$$\mathbf{E} \frac{d\mathbf{S}}{|d\mathbf{S}|} = 0 \quad (7)$$

по всей поверхности диска. Влияние поверхностных зарядов на вторичные источники можно не учитывать, поскольку индуцированные токи в приповерхностном слое направлены параллельно поверхности диска.

В соответствии с принципом непрерывности тока должно быть выполнено условие

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\delta}_B = \gamma_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \gamma_0 \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0, \quad (8)$$

так как свободные заряды в проводнике существовать не могут. Из этого следует, что

$$\operatorname{grad} \varphi_E = 0. \quad (9)$$

Таким образом, выражение для плотности тока принимает вид

$$\boldsymbol{\delta}_B = \gamma_0 \operatorname{rot} \mathbf{A}_E. \quad (10)$$

Подставив (5) в (10), получим

$$\boldsymbol{\delta}_B(Q, t) = \gamma_0 \operatorname{rot} \left[\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\boldsymbol{\delta}_M(M, t)}{r_{QM}} dV_M \right] = \frac{\gamma_0}{4\pi} \int_V \operatorname{rot} \left[\frac{\boldsymbol{\delta}_M(M, t)}{r_{QM}} \right] dV_M. \quad (11)$$

Используя известное выражение ротора через произведение вектора на скалярную функцию, можем записать [5]

$$\operatorname{rot} \left[\frac{\boldsymbol{\delta}_M(M, t)}{r_{QM}} \right] = \frac{1}{r_{QM}} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\delta}_M(M, t) + \operatorname{grad} \frac{1}{r_{QM}} \times \boldsymbol{\delta}_M(M, t). \quad (12)$$

С учётом (2) и (8) для $\operatorname{rot} \boldsymbol{\delta}_M$ получаем

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{\delta}_M = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = 0. \quad (13)$$

$$\operatorname{grad} \frac{1}{r_{QM}} \times \boldsymbol{\delta}_M(M, t) = -\frac{\mathbf{r}_{QM}}{r_{QM}^3} \times \boldsymbol{\delta}_M(M, t). \quad (14)$$

Подставив (12), (13), (14) в (11), получим выражение для $\boldsymbol{\delta}_B$:

$$\boldsymbol{\delta}_B(Q, t) = -\frac{\gamma_0}{4\pi} \int_V \mathbf{r}_{QM} \times \boldsymbol{\delta}_M(M, t) \cdot \frac{dV_M}{r_{QM}^3}, \quad (15)$$

и с учётом (2)

$$\boldsymbol{\delta}_B(Q, t) = \frac{\gamma_0}{4\pi} \int_V \mathbf{r}_{QM} \times \frac{\partial \mathbf{B}(M, t)}{\partial t} \cdot \frac{dV_M}{r_{QM}^3}. \quad (16)$$

Поскольку первичное поле во времени изменяется синусоидально, можно перейти от мгновенных значений электромагнитных величин к их комплексным амплитудам:

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}_B(Q) = \frac{\gamma_0}{4\pi} \int_V \mathbf{r}_{QM} \times j\omega \dot{\mathbf{B}}(M) \cdot \frac{dV_M}{r_{QM}^3}, \quad (17)$$

где ω – циклическая частота изменения поля.

Так как магнитная индукция $\dot{\mathbf{B}}$, определяющая плотность вихревого тока, сама зависит от его распределения в проводнике, для решения задачи целесообразно построить итерационный алгоритм. Опишем его основные этапы.

1. Рассчитывается плотность тока $\dot{\boldsymbol{\delta}}_0$ в системе индуктор-диск.
2. Находится поле $\dot{\mathbf{B}}$ по формуле

$$\dot{\mathbf{B}}(Q) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\boldsymbol{\delta}}(M) \times \mathbf{r}_{QM}}{r_{QM}^3} dV_M, \quad (18)$$

положив $\dot{\delta} = \dot{\delta}_0$.

3. По формуле (17) вычисляется распределение плотности $\dot{\delta}_v^{(1)}$ вихревого тока.
4. Вновь рассчитывается поле $\dot{\mathbf{B}}$, полагая в (18) $\dot{\delta}(\mathbf{M}) = \dot{\delta}_0(\mathbf{M}) + \dot{\delta}_v^{(1)}(\mathbf{M})$ и так далее.

Распределение плотности
вихревых токов по объёму диска

Приведённый алгоритм реализован в виде программы. С помощью программы осуществлялось численное моделирование распределения вихревых токов по объёму диска для определения оптимальной формы индуктора, при которой достигалось бы равномерное распределение по радиусу диска. Результаты расчёта программы представлены на рисунке. В данном случае индуктор имеет форму «сердечка» и параллелен поверхности диска. Более тёмные участки на рисунке соответствуют более высокой плотности вихревых токов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тозони О.В. Метод вторичных источников в электротехнике. М.: Энергия, 1975.
2. Данилушкин А.И., Еленевский Д.Е., Котенёв В.И. и др. АСУ процессами многофакторных испытаний на специализированном стенде для прочностной доводки элементов конструкций // Проблемы прочности. №5. 1990.
3. А.с. 1362240 СССР, МКИ G 01 M 15/00, 13/00. Стенд для термоциклических и разгонных испытаний дисков турбоагрегатов / А.А. Базаров, А.И. Данилушкин, Л.С. Зимин и др. – №4079517/25–06.
4. Вайнберг А.М. Индукционные плавильные печи. М.: Энергия, 1967.
5. Г. Корн, Т. Корн Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968.

УДК 678.5

К.А. Кубышкин

МЕТОДИКА ПОДГОТОВКИ ДАННЫХ О ГЕОМЕТРИИ СЛОЕВ ЛОПАТКИ ГТД ИЗГОТОВЛЕННОЙ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Представлен алгоритм расчета геометрии слоев лопаток газотурбинных двигателей, изготовленных из слоистых композиционных материалов. Достигнута высокая точность построения наружных и внутренних слоев, составляющих лопатку.

Перо лопатки ГТД представляет собой лопасть переменного поперечного сечения, формируемую по спинке и корытцу поверхностями двойной кривизны сложного очертания и точно ориентированную в пространстве по отношению к замку. Требуемая точность изготовления этих поверхностей лопатки составляет десятые и даже сотые доли миллиметра.

Лопатки ГТД из слоистых композиционных материалов изготавливаются методом навивки из цельнокроеной заготовки или наложением отдельных слоев с последующей пропиткой и прессованием в пресс-форме.

Высокая требуемая точность изготовления внешних поверхностей лопатки требует и высокой точности изготовления разверток слоев лопатки в процессе их производства.

Обводы внешних поверхностей лопатки и профили ее поперечных сечений получают в процессе газодинамического проектирования тракта ГТД. Результаты этих расчетов приводятся в конструкторской документации в виде таблиц, описывающих (принятым в аэрогазодинамике способом) координаты точек теоретических профилей десяти-пятнадцати поперечных сечений лопатки по ее длине.

Для подготовки процесса производства лопаток и проведения прочностных расчетов необходимо разбить поперечные сечения лопатки на слои заданной толщины по спинке и по корытцу. Толщина слоя