Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Спицын, О методе Римана–Адамара для одной системы гиперболического типа второго порядка, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1999, выпуск 7, 19–26

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu205>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 11:20:57

О МЕТОДЕ РИМАНА – АДАМАРА ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Построена матрица Римана-Адамара задачи Коши-Гурса. Методом Римана-Адамара получено классическое решение задачи Коши-Гурса для гиперболических уравнений второго порядка в случае, когда матрица коэффициентов имеет комплексно – сопряженные корни.

Рассмотрим в области $D = \{(\xi, \eta) / 0 < \xi < \eta < 1\}$ систему уравнений

$$L[U] = U_{\xi\eta} - \frac{G}{\xi - \eta}(U_{\xi} - U_{\eta}) - \frac{\mu}{4}U = 0, \quad (1)$$

где $U = (U_1, U_2)^T$ – искомый 2×1 -вектор, G - заданная над полем вещественных чисел 2×2 -матрица; μ - положительное число.

Задача Коши – Гурса. Найти вектор – функцию $U(\xi, \eta)$, удовлетворяющую системе (1) и условиям

$$U(\xi, \eta) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D); \quad (2)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \xi + 0} \left(\frac{\eta - \xi}{2} \right)^{2G} (U_{\xi} - U_{\eta}) = v(\xi), \quad \xi \in J; \quad (3)$$

$$U(0, \eta) = (\eta), \quad \eta \in \bar{J}, \quad J = (0, 1),$$

где $v(t)$, $\varphi(t)$ - заданные 2×1 -векторы.

Построение решения поставленной задачи проводится методом Римана- Адамара. Наряду с системой (1) рассмотрим сопряженную с ней по Лагранжу систему

$$M[V] = V_{\xi\eta} + \left[V \frac{G}{\xi - \eta} \right]_{\xi} - \left[V \frac{G}{\xi - \eta} \right]_{\eta} - V \frac{\mu}{4} = 0. \quad (4)$$

Определение [5]. Матрицей Римана- Адамара поставленной задачи Коши- Гурса для системы (1) будем называть квадратную матрицу второго порядка

$$W(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0) = \begin{cases} R(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0), & \eta > \xi_0; \\ H(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0), & \eta < \xi_0, \end{cases} \quad (5)$$

где R – матрица Римана системы (1); H – аналитическое продолжение матрицы Римана для задачи Коши- Гурса, если соблюдены следующие условия:

- 1) каждая строка матрицы W относительно переменных ξ, η является решением системы (4);
- 2) каждый столбец матрицы W относительно переменных ξ_0, η_0 является решением системы (1);
- 3) имеют место равенства

$$W(\xi_0, \eta_0; \xi_0, \eta_0) = E; \quad \frac{\partial}{\partial \xi} [W] + [W] \frac{G}{\eta - \xi} = 0; \quad \eta = \xi_0,$$

где $[W] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [W(\xi, \xi_0 + \varepsilon; \xi_0, \eta_0) - W(\xi, \xi_0 - \varepsilon; \xi_0, \eta_0)]$ - скачок функции W на линии $\eta = \xi_0$; E – единичная 2×2 – матрица.

Матрица Римана для системы (1) известна [1]. В рассматриваемом случае она имеет вид

$$R(G) = \sum_{i=1}^2 G_i \left(\frac{\eta - \xi}{\eta_0 - \xi_0} \right)^{\lambda_i} \Xi_2 \left(\begin{matrix} \lambda_i, 1 - \lambda_i \\ 1 \end{matrix}; \rho; \mu \tau \right), \quad (6)$$

где $\Xi_2(\alpha, \beta; x; y)$ - двойной вырожденный гипергеометрический ряд из списка Горна [2];

G_i, λ_i - соответственно идемпотенты и собственные числа матрицы G [3],

$$\rho = \frac{(\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \eta)}{(\eta - \xi)(\eta_0 - \xi_0)}; \quad \tau = \frac{(\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \eta)}{4}.$$

Из анализа матрицы (6) следует, что на линии $\eta = \xi$ она имеет особенность довольно высокого порядка. Поэтому для произвольной точки $(\xi_0, \eta_0) \in D$ необходимо строить аналитическое продолжение на ту часть рассматриваемой области, где $\eta < \xi_0$. Применяя формулу аналитического продолжения для гипергеометрической функции Гаусса [2]

$$F(a, b; c; z) = \Gamma\left(\begin{matrix} c, & b-a \\ c-a, & b \end{matrix}\right) (-z)^{-a} F(a, a+1-c; a+1-b; z^{-1}) + \\ + \Gamma\left(\begin{matrix} c, & a-b \\ c-b, & a \end{matrix}\right) (-z)^{-b} F(b+1-c, b; b+1-a; z^{-1}),$$

после некоторых преобразований получим аналитическое продолжение матрицы Римана (6) вида

$$R(G) = \sum_{i=1}^2 G_i \left(\frac{\eta - \xi}{\eta_0 - \xi_0} \right)^{\lambda_i} \Xi_2 \left(\begin{matrix} \lambda_i, 1 - \lambda_i \\ 1 \end{matrix}; \rho; \mu\tau \right) = \\ = \sum_{i=1}^2 G_i \Gamma \left(\begin{matrix} 1 - 2\lambda_i \\ 1 - \lambda_i, 1 - \lambda_i \end{matrix} \right) \left[\frac{(\eta - \xi)^2}{(\xi_0 - \xi)(\eta - \eta_0)} \right]^{\lambda_i} H_3 \left(\begin{matrix} \lambda_i, \lambda_i \\ 2\lambda_i \end{matrix}; \frac{1}{\rho}; -\mu\tau \right) + \\ + \sum_{i=1}^2 G_i \Gamma \left(\begin{matrix} 1 - 2\lambda_i \\ \lambda_i, \lambda_i \end{matrix} \right) \frac{\eta - \xi}{\eta_0 - \xi_0} \left[\frac{(\eta_0 - \xi_0)^2}{(\xi_0 - \xi)(\eta - \eta_0)} \right]^{\lambda_i - 1} H_3 \left(\begin{matrix} 1 - \lambda_i, 1 - \lambda_i \\ 2 - 2\lambda_i \end{matrix}; \frac{1}{\rho}; -\mu\tau \right), \quad (7)$$

где функция $H_3 \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \delta \end{matrix}; x; y \right)$ - двойной вырожденный ряд из списка Горна [2].

Первую группу слагаемых в правой части разложения (7) используем для построения матрицы Римана-Адамара задачи Коши-Гурса. Представим матрицу $H(G; \xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ из формулы (5) в виде

$$H(G) = \sum_{i=1}^2 G_i a(\lambda_i) \left[\frac{(\eta - \xi)^2}{(\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \eta)} \right]^{\lambda_i} H_3 \left(\begin{matrix} \lambda_i, \lambda_i \\ 2\lambda_i \end{matrix}; \frac{1}{\rho}; -\mu\tau \right), \quad (8)$$

где $a(\lambda_i)$ - произвольные константы, подлежащие определению.

Потребуем выполнения условия

$$\frac{\partial}{\partial \xi} [W] + [W] \frac{G}{\xi - \eta} = 0, \quad \eta = \xi_0. \quad (9)$$

Здесь $[W] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [R|_{\eta=\xi_0+\varepsilon} - H|_{\eta=\xi_0-\varepsilon}]$, $\varepsilon > 0$. Выберем сколь угодно малое положительное число ε и изучим поведение матрицы Римана-Адамара в ε -окрестности линии $\eta = \xi_0$. С этой целью разложим входящие в матрицу (7) двойные ряды Ξ_2, H_3 по гипергеометрическим функциям Гаусса

$$\Xi_2 \left(\begin{matrix} \lambda i, 1 - \lambda i \\ 1 \end{matrix}; \rho; \mu \tau \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu \tau)^n}{(1)_n n!} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \lambda i, 1 - \lambda i \\ 1 + n \end{matrix}; \rho \right); \quad (10)$$

$$H_3 \left(\begin{matrix} \lambda i, \lambda i \\ 2 \lambda i \end{matrix}; \frac{1}{\rho}; -\mu \tau \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu \tau)^n}{(1 - \lambda i)_n n!} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \lambda i, \lambda i - n \\ 2 \lambda i \end{matrix}; \frac{1}{\rho} \right). \quad (11)$$

Можно заметить, что на линии $\eta = \xi$ двойные ряды (10), (11) имеют особенности для любого индекса суммирования n . Более того, особенности носят логарифмический характер при n , равном нулю. Для выделения особенностей воспользуемся в логарифмическом случае тождеством [2]

$$F(a, b; a + b; z) = \Gamma \left(\begin{matrix} a + b \\ a, b \end{matrix} \right) F(a, b; 1; 1 - z) \ln \left(\frac{1}{1 - z} \right) + \\ + \Gamma \left(\begin{matrix} a + b \\ a, b \end{matrix} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(1)_n n!} [2\psi(1 + n) - \psi(a + n) - \psi(b + n)] (1 - z)^n, \quad (12)$$

а в общем случае –

$$F(a, b; c; z) = \Gamma \left(\begin{matrix} c, c - a - b \\ c - a, c - b \end{matrix} \right) F(a, b; 1 - c + a + b; 1 - z) + \\ + \Gamma \left(\begin{matrix} c, a + b + c \\ c - a, c - b \end{matrix} \right) (1 - z)^{c - a - b} F(c - b, c - a; 1 + c - a - b; 1 - z). \quad (13)$$

В терминах функций сравнения, при z стремящемся к единице, тождества (12) и (13) имеют вид, соответственно

$$F(a, b; a + b; z) = -\Gamma \left(\begin{matrix} a + b \\ a, b \end{matrix} \right) [c + 1 + 0(1 - z) \ln(1 - z) = 0(1 - z)], \quad c = const;$$

$$F(a, b; c; z) = -\Gamma \left(\begin{matrix} c, c - a - b \\ c - a, c - b \end{matrix} \right) [1 + 0(1 - z)] + 0(1 - z) [1 + 0(1 - z)].$$

Обратимся к формулам (10) и (11). Учитывая показанные выше упрощенные тождества (12) и (13), после некоторых преобразований получим в ε - окрестности линии $\eta = \xi_0$ следующие разложения матриц Римана – R и Римана-Адамара для задачи Коши-Гурса – H:

$$R(G) = \sum_{i=1}^2 G_i \left(\frac{\eta - \xi}{\eta_0 - \xi_0} \right)^{\lambda i} \Gamma \left(\begin{matrix} 1 \\ 1 - \lambda i, \lambda i \end{matrix} \right) \left\{ [C_1(\lambda i) - \ln(1 - \rho) + 0(\varepsilon)] + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu \tau)^n}{n(1 - \lambda i)_n (\lambda i)_n} [1 + 0(\varepsilon)] \right\}; \quad (14)$$

$$H(G) = \sum_{i=1}^2 G_i \left(\frac{\eta - \xi}{\eta_0 - \xi_0} \right)^{\lambda i} a(\lambda i) \Gamma \left(\begin{matrix} 2\lambda i \\ \lambda i, \lambda i \end{matrix} \right) [1 + 0(\varepsilon)] \left\{ \left[C_2(\lambda i) - \ln \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) + 0(\varepsilon) \right] + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu \tau)^n}{n(1 - \lambda i)_n (\lambda i)_n} [1 + 0(\varepsilon)] \right\}. \quad (15)$$

Подставляя разложения (14) и (15) в условие (9), находим матричный коэффициент

$$a(G) = \sum_{i=1}^2 G_i \Gamma \left(\begin{matrix} \lambda i \\ 2\lambda i, 1 - \lambda i \end{matrix} \right),$$

определяющий матрицу Римана-Адамара для задачи Коши-Гурса

$$H(G) = \sum_{i=1}^2 G_i \Gamma \left(\begin{matrix} \lambda i \\ 2\lambda i, 1 - \lambda i \end{matrix} \right) \left[\frac{(\eta - \xi)^2}{(\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \eta)} \right]^{\lambda i} H_3 \left(\begin{matrix} \lambda i, \lambda i \\ 2\lambda i \end{matrix} ; \frac{1}{\varrho} ; -\mu\tau \right). \quad (16)$$

Пусть матрица G имеет комплексно сопряженные корни $\lambda_1 = \lambda = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. Преобразуем матрицу Римана-Адамара поставленной задачи Коши-Гурса (5) к виду, допускающему явное разделение на реальную и мнимую части. Это можно сделать, если найти интегральные представления для вырожденных рядов Ξ_2 и H_3 .

В самом деле, запишем функции Ξ_2 и H_3 в виде повторных рядов

$$\Xi_2 \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix} ; x, y \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n! (\gamma)_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m (\beta)_m}{(\gamma + n)_m} \frac{x^m}{m!}, \quad (17)$$

$$H_3 \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \delta \end{matrix} ; x, y \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-y)^n}{(1 - \alpha)_n n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha - n)_m (\beta)_m}{(\delta)_m} \frac{x^m}{m!}. \quad (18)$$

Используя интеграл Эйлера первого рода для бета-функции, формулу Эйлера для гипергеометрической функции Гаусса [2]

$$F(a, b; c; z) = \Gamma \left(\begin{matrix} c \\ b, c - b \end{matrix} \right) \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt, \quad \operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0, \quad |\arg(1-z)| < \pi,$$

проверяемое тождество

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! (c)_n} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{(c+1)_n (2)_n},$$

находим искомые интегральные представления рядов (17) и (18) (соответственно):

$$\begin{aligned} \Xi_2 \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix} ; x, y \right) &= \Gamma \left(\begin{matrix} \gamma \\ \beta, \gamma - \beta \end{matrix} \right) \int_0^1 \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-xt)^{-\alpha} [1 + \\ &+ y(1-t)(1-s)^{\gamma-\beta-1} {}_0F_1(2; y(1-t)s)] ds dt, \quad \operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \alpha < 1; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} H_3 \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \delta \end{matrix} ; x, y \right) &= \Gamma \left(\begin{matrix} \delta \\ \beta, \delta - \beta \end{matrix} \right) \int_0^1 \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\delta-\beta-1} (1-xt)^{-\alpha} [1 - \\ &- y(1-xt)(1-s)^{-\alpha} {}_0F_1(2; -y(1-xt)s)] ds dt, \quad \operatorname{Re} \delta > \operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \alpha < 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Заметим, что при выводе формул (19) и (20) приходится дважды менять порядок интегрирования и суммирования. Это возможно в силу сходимости соответствующих рядов при $0 \leq t \leq 1$ и $0 \leq s \leq 1$.

Введем обозначения весовых функций

$$V = \frac{\eta - \xi}{\eta_0 - \xi_0}, \quad h = \frac{(\eta - \xi)^2}{(\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \eta)}. \quad (21)$$

Применяя формулы (19) и (20), обозначения (21) и функциональное соотношение для гамма-функции $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$,

$$R(G; \xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \sum_{i=1}^2 G_i \frac{\sin \pi \lambda i}{\pi} V^{\lambda i} \int_0^1 \int_0^1 t^{\lambda i} (1-t)^{\lambda i-1} (1-\rho t)^{-\lambda i} \left[1 + \mu \tau (1-t)(1-s)^{\lambda i-1} {}_0F_1(2; \mu \tau (1-t)s) \right] ds dt, \quad \operatorname{Re} 2\lambda i \in (0,1). \quad (22)$$

$$H(G; \xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \sum_{i=1}^2 G_i \frac{\sin \pi \lambda i}{\pi} h^{\lambda i} \int_0^1 \int_0^1 t^{\lambda i-1} (1-t)^{\lambda i-1} \left(1 - \frac{1}{\rho} t \right)^{-\lambda i} \left[1 + \mu \tau \left(1 - \frac{1}{\rho} t \right) (1-s)^{-\lambda i} {}_0F_1\left(2; \mu \tau \left(1 - \frac{1}{\rho} t \right) s \right) \right] ds dt, \quad \operatorname{Re} 2\lambda i \in (0,1), \quad (23)$$

получим матрицу Римана-Адамара поставленной задачи Коши-Гурса $W(G; \xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ (формула (5)).

Не ограничивая общности, в наших условиях (с выделением главных ветвей) матрицы (22), (23) можно записать в виде

$$R(G) = \begin{pmatrix} P & Q \\ -Q & P \end{pmatrix}; \quad H(G) = \begin{pmatrix} S & T \\ -T & S \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ -\beta, \alpha \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где $P = P(\alpha, \beta) = \operatorname{Re} R(\lambda)$; $Q = Q(\alpha, \beta) = \operatorname{Im} R(\lambda)$; $S(\alpha, \beta) = \operatorname{Re} H(\lambda)$; $T(\alpha, \beta) = \operatorname{Im} H(\lambda)$ – вещественные функции вещественных переменных α, β . Они определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix} &= \frac{V^\alpha}{\pi} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \begin{aligned} &\sin \pi \alpha \operatorname{ch} \pi \beta \cos \gamma_1 - \cos \pi \alpha \operatorname{sh} \pi \beta \sin \gamma_1 \\ &\cos \pi \alpha \operatorname{sh} \pi \beta \cos \gamma_1 + \sin \pi \alpha \operatorname{ch} \pi \beta \sin \gamma_1 \end{aligned} \right\} \times \\ &\times t^{-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} (1-\rho t)^{-\alpha} + \left\{ \begin{aligned} &\sin \pi \alpha \operatorname{ch} \pi \beta \cos \gamma_2 - \cos \pi \alpha \operatorname{sh} \pi \beta \sin \gamma_2 \\ &\cos \pi \alpha \operatorname{sh} \pi \beta \cos \gamma_2 + \sin \pi \alpha \operatorname{ch} \pi \beta \sin \gamma_2 \end{aligned} \right\} \times \\ &\times \mu \tau t^{-\alpha} (1-t)^\alpha (1-\rho t)^{-\alpha} (1-s)^{\alpha-1} {}_0F_1(2; \mu \tau (1-t)s) ds dt, \\ &\beta \ln \frac{V(1-t)}{t(1-\rho t)}, \quad \gamma_2 = \beta \ln \frac{V(1-t)(1-s)}{t(1-\rho t)}; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} S \\ T \end{Bmatrix} &= \frac{h^\alpha}{\pi} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \begin{aligned} &\sin \pi \alpha \operatorname{ch} \pi \beta \cos \delta_1 - \cos \pi \alpha \operatorname{sh} \pi \beta \sin \delta_1 \\ &\cos \pi \alpha \operatorname{sh} \pi \beta \cos \delta_1 + \sin \pi \alpha \operatorname{ch} \pi \beta \sin \delta_1 \end{aligned} \right\} \times \\ &\times t^{\alpha-1} (1-t)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{\rho} t \right)^{-\alpha} + \left\{ \begin{aligned} &\sin \pi \alpha \operatorname{ch} \pi \beta \cos \delta_2 - \cos \pi \alpha \operatorname{sh} \pi \beta \sin \delta_2 \\ &\cos \pi \alpha \operatorname{sh} \pi \beta \cos \delta_2 + \sin \pi \alpha \operatorname{ch} \pi \beta \sin \delta_2 \end{aligned} \right\} \times \\ &\times \mu \tau t^{\alpha-1} (1-t)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{\rho} t \right)^{-\alpha} (1-s)^{-\alpha} {}_0F_1\left(2; \mu \tau \left(1 - \frac{1}{\rho} t \right) s \right) ds dt; \end{aligned}$$

$$\delta_1 = \beta \ln \frac{ht(1-t)}{1-\frac{1}{\rho}}, \quad \delta_2 = \beta \ln \frac{ht(1-t)}{\left(1-\frac{1}{\rho}\right)(1-s)}. \quad (26)$$

Выведем формулу Римана-Адамара, доставляющую решение поставленной задачи Коши-Гурса при наиболее общих предположениях относительно спектра матрицы системы (1). Для этого поступим следующим образом. Составим векторный аналог тождества Грина для системы (1) [4]:

$$WL[U] - M[W]U = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[WU_\xi - W_\xi U + 2W \frac{G}{\xi - \eta} U \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[WU_\eta - W_\eta U + 2W \frac{G}{\xi - \eta} U \right]. \quad (27)$$

Для произвольной точки $(\xi_0, \eta_0) \in D$ проинтегрируем тождество (27) по области $D_1 \subset D$, являющейся суммой областей

$$D_2 = \left\{ (\xi, \eta) \mid 0 < \xi < \xi_0 - \delta, \xi_0 + \delta < \eta < \eta_0, \xi + \sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2} + \delta < \eta \right\};$$

$$D_3 = \left\{ (\xi, \eta) \mid \xi < 0, \xi + \sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2} - \delta < \eta < \xi_0 - \delta \right\}, \quad \forall \varepsilon > \sqrt{2}\delta > 0.$$

Применяя формулу Грина [6], приходим к тождеству

$$\iint_D \{WL[U] - M[W]U\} d\xi d\eta = \frac{1}{2} \int_{\partial D} \left(WU_\eta - W_\eta U - 2W \frac{G}{\xi - \eta} U \right) d\eta -$$

$$- \left(WU_\xi - W_\xi U + 2W \frac{G}{\xi - \eta} U \right) d\xi, \quad (28)$$

где $\partial D = \partial D_2 \cup \partial D_3$ – двусвязный контур, состоящий из восьми отрезков.

Если $U(\xi, \eta)$ – решение поставленной задачи для системы (1), $W(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ – матрица Римана-Адамара поставленной задачи системы (1), то из тождества (28) приходим к сумме восьми интегралов вида

$$\sum_{k=1}^8 J_k = \int_0^{\xi_0 - \xi_1} \left[W(U_\eta - U_\xi) - \left(W_\eta - W_\xi + W \frac{4G}{\xi - \eta} \right) U \right] d\xi +$$

$$+ \int_0^{\xi_0 - \xi_1} \left[WU_\xi - W_\xi U + W \frac{2G}{\xi - \eta} U \right] d\xi - \int_{\xi_0 - \delta}^{\xi_0 - \delta} \left[WU_\eta - W_\eta U - W \frac{2G}{\xi - \eta} U \right] d\eta +$$

$$+ \int_{\xi_0 - \xi_1}^{\eta_0} \left[WU_\eta - W_\eta U + W \frac{2G}{\xi - \eta} U \right] d\eta + \int_0^{\xi_0 - \delta} \left[WU_\xi - W_\xi U + W \frac{2G}{\xi - \eta} U \right] d\xi -$$

$$- \int_{\xi_0 + \delta}^{\delta_0} \left[WU_\eta - W_\eta U - W \frac{2G}{\xi - \eta} U \right] d\eta - \int_0^{\xi_0 - \xi_1} \left[WU_\xi - W_\xi U + W \frac{2G}{\xi - \eta} U \right] d\xi +$$

$$+ \int_{\xi_0 - \xi_1}^{\xi_0 - \delta} \left[W(U_\eta - U_\xi) - \left(W_\eta - W_\xi + W \frac{2G}{\xi - \eta} \right) U \right] d\xi = 0, \quad \varepsilon = \sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2}. \quad (29)$$

Во всех интегралах, кроме первого и восьмого, в выражении (29) применим интегрирование по частям. Приводя подобные, учитывая свойства матрицы Римана-Адамара и ее обозначение, по-

сле преобразований находим формулу Римана-Адамара для получения решения поставленной задачи Коши-Гурса (Дарбу):

$$\begin{aligned}
U(\xi_0, \eta_0; \varepsilon, \delta) = & \frac{1}{2} \int_0^{\xi_0 - \varepsilon_1} \left[H(U_\xi - U_\eta) + \left(H_\eta - H_\xi + H \frac{4G}{\xi - \eta} \right) U \right]_{\eta = \xi + \varepsilon_1 - \delta} d\xi + \\
& + \int_{\varepsilon_1 - \delta}^{\xi_0 - \delta} \left[H \left(U_\eta - \frac{G}{\xi - \eta} U \right) \right]_{\xi=0} d\eta + \int_{\xi_0 + \delta}^{\eta_0} \left[R \left(U_\eta - \frac{G}{\xi - \eta} U \right) \right]_{\xi=0} d\eta + \frac{1}{2} (RU) \Big|_{(\xi_0 - \delta, \xi_0 + \varepsilon_1)} + \\
& + \frac{1}{2} (RU) \Big|_{(\xi_0 - \varepsilon_1, \xi_0 + \delta)} + \frac{1}{2} \int_{\xi_0 + \varepsilon_1}^{\eta_0} \left[\left(R_\eta + R \frac{G}{\xi - \eta} \right) U \right]_{\xi = \xi_0 - \delta} d\eta - \frac{1}{2} (HU) \Big|_{(\xi_0 - \varepsilon_1, \xi_0 - \delta)} + \frac{1}{2} (HU) \Big|_{(0, \varepsilon_1 - \delta)} + \\
& + \frac{1}{2} \int_{\xi_0 - \varepsilon_1}^{\xi_0 - \delta} \left[R(U_\xi - U_\eta) + \left(R_\eta - R_\xi + R \frac{4G}{\xi - \eta} \right) U \right]_{\eta = \xi + \varepsilon_1 + \delta} d\xi = \sum_{k=1}^9 J_k(\varepsilon, \delta). \quad (30)
\end{aligned}$$

Заметим, что в формуле Римана-Адамара (30) присутствуют две произвольные сколь угодно малые положительные величины ε и δ , на которые могут налагаться взаимные требования, например, в нашем случае $\delta = \varepsilon^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$. Это связано с тем, что понятие сходимости несобственных интегралов в смысле главного значения в случае функций двух переменных сводится к нахождению «согласованных» границ областей интегрирования и, следовательно, контуров интегрирования. Точнее, таких контуров, интегралы по которым взаимно компенсировали бы друг друга подобно случаю, рассмотренному в классическом примере Адамара [7].

Подстановкой в формулу (30) матриц R и H – Римана-Адамара (24), с существенным использованием свойств этих матриц и применением краевых условий (2), (3), предельным переходом, при ε, δ , стремящихся к нулю, получим решение поставленной задачи:

$$\begin{aligned}
U(\xi_0, \eta_0) = & \frac{2^{2\alpha-1}}{\pi} \int_0^{\xi_0} [(\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \xi)]^{-\alpha} \begin{pmatrix} S_1 & T_1 \\ -T_1 & S_1 \end{pmatrix} \nu(\xi) d\xi + \frac{\xi_0^{-\alpha}}{\pi} \int_0^{\xi_0} \eta^{2\alpha} (\eta_0 - \eta)^{-\alpha} \times \\
& \times \begin{pmatrix} S_2 & T_2 \\ -T_2 & S_2 \end{pmatrix} \left(\phi'(\eta) + \frac{G}{\eta} \phi(\eta) \right) d\eta + \frac{(\eta_0 - \xi_0)^{-\alpha}}{\pi} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \eta^\alpha \begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ -Q_1 & P_1 \end{pmatrix} \left(\phi'(\eta) + \frac{G}{\eta} \phi(\eta) \right) d\eta. \quad (31)
\end{aligned}$$

В решении (31) функции S_1 и T_1 определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} S_1 \\ T_1 \end{Bmatrix} = & \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \begin{aligned} & \sin \pi \alpha \operatorname{ch} \pi \beta \cos \nu_1 - \cos \pi \alpha \operatorname{sh} \pi \beta \sin \nu_1 \\ & \cos \pi \alpha \operatorname{sh} \pi \beta \cos \nu_1 + \sin \pi \alpha \operatorname{ch} \pi \beta \sin \nu_1 \end{aligned} \right\} t^{\alpha-1} (1-t)^{\alpha-1} + \\
& + \left\{ \begin{aligned} & \sin \pi \alpha \operatorname{ch} \pi \beta \cos \nu_2 - \cos \pi \alpha \operatorname{sh} \pi \beta \sin \nu_2 \\ & \cos \pi \alpha \operatorname{sh} \pi \beta \cos \nu_2 + \sin \pi \alpha \operatorname{ch} \pi \beta \sin \nu_2 \end{aligned} \right\} \frac{\mu(\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \xi)}{4} \times \\
& \times t^{\alpha-1} (1-t)^{\alpha-1} (1-s)^{-\alpha} {}_0F_1 \left(2; \frac{\mu(\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \xi)}{4} s \right) \Big] ds dt,
\end{aligned}$$

$$\text{где } \nu_1 = \beta \ln \frac{4t(1-t)}{(\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \xi)}, \quad \nu_2 = \beta \ln \frac{4t(1-t)}{(\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \xi)(1-s)}.$$

Во втором интеграле решения (31) функции S_2 и T_2 имеют вид

$$\left. \begin{matrix} S_2 \\ T_2 \end{matrix} \right\} = \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \begin{matrix} \sin \pi \alpha \operatorname{ch} \pi \beta \cos \mu_1 - \cos \pi \alpha \operatorname{sh} \pi \beta \sin \mu_1 \\ \cos \pi \alpha \operatorname{sh} \pi \beta \cos \mu_1 + \sin \pi \alpha \operatorname{ch} \pi \beta \sin \mu_1 \end{matrix} \right\} t^{\alpha-1} (1-t)^{\alpha-1} \times \left(1 - \frac{\eta(\eta_0 - \xi_0)}{\xi_0(\eta_0 - \eta)} t \right)^{-\alpha} +$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} \sin \pi \alpha \operatorname{ch} \pi \beta \cos \mu_2 - \cos \pi \alpha \operatorname{sh} \pi \beta \sin \mu_2 \\ \cos \pi \alpha \operatorname{sh} \pi \beta \cos \mu_2 + \sin \pi \alpha \operatorname{ch} \pi \beta \sin \mu_2 \end{matrix} \right\} \times \frac{\mu \xi_0 (\eta_0 - \eta)}{4} t^{\alpha-1} (1-t)^{\alpha-1} \times$$

$$\times \left(1 - \frac{\eta(\eta_0 - \xi_0)}{\xi_0(\eta_0 - \eta)} t \right)^{1-\alpha} (1-s)^{-\alpha} {}_0F_1 \left(2; \frac{\mu(\eta_0 - \eta)}{4} \left(1 - \frac{\eta(\eta_0 - \xi_0)}{\xi_0(\eta_0 - \eta)} t \right) s \right) ds dt,$$

$$\text{где } \mu_1 = \beta \ln \frac{\eta^2 t(1-t)}{\xi_0(\eta_0 - \eta) \left(1 - \frac{\eta(\eta_0 - \xi_0)}{\xi_0(\eta_0 - \eta)} t \right)}, \quad \mu_2 = \beta \ln \frac{\eta^2 t(1-t)}{\xi_0(\eta_0 - \eta) \left(1 - \frac{\eta(\eta_0 - \xi_0)}{\xi_0(\eta_0 - \eta)} t \right) (1-s)}.$$

В третьем интеграле формулы (31) функции P_1 и Q_1 определяются следующим образом:

$$\left. \begin{matrix} P_1 \\ Q_1 \end{matrix} \right\} = \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \begin{matrix} \sin \pi \alpha \operatorname{ch} \pi \beta \cos \partial_1 - \cos \pi \alpha \operatorname{sh} \pi \beta \sin \partial_1 \\ \cos \pi \alpha \operatorname{sh} \pi \beta \cos \partial_1 + \sin \pi \alpha \operatorname{ch} \pi \beta \sin \partial_1 \end{matrix} \right\} t^{-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} \times \left(1 - \frac{\xi_0(\eta_0 - \eta)}{\eta(\eta_0 - \xi_0)} t \right)^{-\alpha} +$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} \sin \pi \alpha \operatorname{ch} \pi \beta \cos \partial_2 - \cos \pi \alpha \operatorname{sh} \pi \beta \sin \partial_2 \\ \cos \pi \alpha \operatorname{sh} \pi \beta \cos \partial_2 + \sin \pi \alpha \operatorname{ch} \pi \beta \sin \partial_2 \end{matrix} \right\} \times \frac{\mu \xi_0 (\eta_0 - \eta)}{4} t^{-\alpha} (1-t)^{\alpha} \times$$

$$\times \left(1 - \frac{\xi_0(\eta_0 - \eta)}{\eta(\eta_0 - \xi_0)} t \right)^{-\alpha} (1-s)^{\alpha-1} {}_0F_1 \left(2; \frac{\mu(\eta_0 - \eta)}{4} (1-t)s \right) ds dt,$$

$$\text{где } \partial_1 = \beta \ln \frac{\eta t(1-t)}{(\eta_0 - \xi_0) \left(1 - \frac{\xi_0(\eta_0 - \eta)}{\eta(\eta_0 - \xi_0)} t \right)}, \quad \partial_2 = \beta \ln \frac{\eta(1-t)(1-s)}{(\eta_0 - \xi_0) \left(1 - \frac{\xi_0(\eta_0 - \eta)}{\eta(\eta_0 - \xi_0)} t \right)}.$$

Т е о р е м а . Если $a \in \left(0, \frac{1}{2} \right)$, $\nu(\xi) \in C^1(J)$, $\varphi(\eta) \in C^2(\bar{J})$, то вектор-функция, определяемая формулой (31), суть классическое решение задачи Коши-Гурса для системы (1) в области D.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Андреев А.А. Об одном классе систем дифференциальных уравнений гиперболического типа // Дифференциальные уравнения : Сб. науч. тр. пед. ин-тов РСФСР. Рязан. гос. пед. ин-т. 1980. Вып. 16. С. 9-14.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965. Т.1.
3. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.
4. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М.: АН СССР, 1959.
5. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.
6. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.: Гостехиздат, 1948.
7. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Гостехиздат, 1947.