Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Андреев, Е. Н. Огородников, Матричные интегродифференциальные операторы и их применение, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1999, выпуск 7, 27–37

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu206>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 14:28:13

МАТРИЧНЫЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Рассматривается обобщение оператора дробного интегродифференцирования на матричный порядок. Обсуждаются и доказываются некоторые свойства, тождества и утверждения. Указана область приложений матричного интегродифференциального оператора к системам интегральных уравнений абелевского типа и нелокальным краевым задачам для вырождающихся систем дифференциальных уравнений с частными производными.

Дробным исчислением принято называть область математического анализа, в которой исследуются производные и интегралы произвольного комплексного порядка. Они применяются в самых различных областях естествознания – в физике, механике, химии, биологии и др. Наиболее полную библиографию, охватывающую практически все публикации по дробному исчислению и его применению вплоть до 1986 года, можно найти в монографии С. Г. Самко, А. А. Килбаса, О. И. Маричева [1], а также работах [2 - 6] других авторов, в которых затрагиваются различные прикладные аспекты.

Среди приложений дробного интегродифференцирования особое место занимают вопросы существования, единственности и возможности получить в явном виде решение уравнений и систем уравнений абелевского типа. Как известно [1], именно уравнение Абеля первого рода лежит в основе одной из конструкций дробного интеграла.

Развитие идей и методов в теории дробного исчисления привело к появлению различных обобщений операторов дробного интегродифференцирования (операторы типа Эрдейи-Кобера, Джбрашана, дробные интегралы и производные Вейля и Чжена, операторы со степенно-логарифмическим ядром, операторы М.Сайго и др.) [1].

В данной работе рассматривается обобщение оператора дробного интегродифференцирования на матричный порядок. Введенный одним из авторов статьи [7,8] матричный интегродифференциальный оператор позволяет с единых позиций подойти к вопросу о разрешимости некоторых классов систем интегральных уравнений абелевского типа, среди которых следует особо отметить систему обобщенных уравнений Абеля в связи с ее приложениями, например, к смешанным задачам теории упругости [9 - 12].

Основные определения и некоторые свойства матричного интегродифференциального оператора

Пусть λ – любое комплексное число, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера [13], функция $f(x) \in L(a, b)$.

Для оператора дробного интегродифференцирования Римана-Лувиля используем обозначения [1,6].

$$I_{ax}^{\lambda} f = D_{ax}^{-\lambda} f = \begin{cases} \frac{\text{sign}(x-a)}{\Gamma(\lambda)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{|x-t|^{1-\lambda}}, & \text{Re } \lambda > 0; \\ \left(\text{sign}(x-a) \frac{\partial}{\partial x} \right)^n D_{ax}^{-(n+\lambda)} f, & \text{Re } \lambda \leq 0, n = [-\text{Re } \lambda] + 1, \end{cases} \quad (1)$$

где $[\text{Re } \lambda]$ – целая часть числа $\text{Re } \lambda$, а значение многозначной функции τ^{λ} при $\lambda = \alpha + \beta i$ выбирается следующим:

$$\tau^{\lambda} = \tau^{\alpha} [\cos(\beta \ln \tau) + i \sin(\beta \ln \tau)] \quad \tau > 0. \quad (2)$$

Если $a > x$, то вместо $D_{ax}^{-\lambda}$ записывают $D_{xa}^{-\lambda}$. Если $\text{Re } \lambda < 0$, то, обозначая $-\lambda = \mu$, пишем D_{ax}^{μ} , что представляет собой дробную производную порядка μ .

Известно, что дробный интеграл $D_{ax}^{-\lambda} f$ определен почти всюду на (a, b) и принадлежит классу $L(a, b)$, а интегралы (производные) комплексного порядка λ ($Re \lambda \neq 0$) являются аналитическим продолжением по параметру λ дробных интегралов (производных), определенных первоначально при $Im \lambda = 0$ [1].

В случае чисто мнимого порядка дробные производные определяются в соответствии с (1) по формуле

$$D_{ax}^{i\beta} = \frac{\text{sign}(x-a)}{\Gamma(1-i\beta)} \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x \frac{f(t)dt}{|x-t|^{i\beta}}. \quad (3)$$

Дробные интегралы чисто мнимого порядка принято определять как $D_{ax}^{-i\beta} = \frac{\partial}{\partial x} D_{ax}^{-(1+i\beta)}$. Таким образом,

$$I_{ax}^{i\beta} f = D_{ax}^{-i\beta} f = \frac{\text{sign}(x-a)}{\Gamma(1+i\beta)} \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x |x-t|^{i\beta} f(t)dt. \quad (4)$$

Подобно формулам (1) определяются операторы со степенно-логарифмическим ядром [14]:

$$J_{ax}^{\lambda, m} \equiv D_{ax}^{-\lambda, m} f = \begin{cases} \frac{\text{sign}(x-a)}{\Gamma(\lambda)} \int_a^x \frac{\ln^m |x-t|}{|x-t|^{1-\lambda}} f(t)dt, & \text{Re } \lambda > 0, m \in N; \\ \left(\text{sign}(x-a) \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \sum_{k=0}^m C_m^k \lambda \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\lambda+n}\right) D_{ax}^{-(n+\lambda), m-k} f, & \text{Re } \lambda \leq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Из определения (4) видно, что, например, $D_{ax}^{-\lambda, 1} f$ возникает при дифференцировании по параметру λ дробного интеграла (1):

$$\frac{d}{d\lambda} D_{ax}^{-\lambda} f = D_{ax}^{-\lambda, 1} f - \psi(\lambda) D_{ax}^{-\lambda} f, \quad (6)$$

где $\psi(z)$ – пси-функция Эйлера [13].

В работах М. Saigo [15 - 17] введены интегральные операторы

$$I_{ax}^{\alpha, \beta, \eta} f = \begin{cases} \frac{\text{sign}(x-a)}{\Gamma(\alpha)(x-a)^{\alpha+\beta}} \int_a^x |x-t|^{\alpha-1} {}_2F_1\left(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; \frac{x-t}{x-a}\right) f(t)dt, & \text{Re } \alpha > 0; \\ \left(\text{sign}(x-a) \frac{\partial}{\partial x} \right)^n I_{ax}^{\alpha+n, \beta-n, \eta-n} f, & \text{Re } \alpha \leq 0, n = [-\text{Re } \alpha] + 1, \end{cases} \quad (7)$$

сводящиеся при $\beta = -\alpha$ к операторам дробного интегродифференцирования (1), где ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса [13].

Приведем определение и сформулируем некоторые свойства функций от матриц [18-20], используемые в дальнейшем.

Обозначим M_n – множество постоянных матриц порядка n , $\Lambda(G) = \{\lambda_i\}$ – спектр матрицы G : $G \in M_n$; λ_i – собственные значения матрицы G , $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Пусть $H \subset \mathbb{C}$ – произвольная область на комплексной плоскости: $\Lambda(G) \subset H$.

Рассмотрим отображение $f(z)$: $f(z): H \xrightarrow{f} X$, где X , в частности, может быть областью на комплексной плоскости, множеством функций комплексной или действительной переменной, зависящих от $\lambda \in H$ как от параметра, множеством операторов дробного интегродифференцирования D_{ax}^{λ} или их различных обобщений и т.д.

С помощью интерполяционного многочлена Лагранжа-Сильвестра [18] можно определить значение отображения на множестве квадратных матриц [7]:

$$f(G) = \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^{m_k} \alpha_{kj} (G - \lambda_k E)^{j-1} \psi^k(G), \quad (8)$$

где $\psi^k(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{m_k}}$; $\alpha_{kj} = \frac{1}{(j-1)!} \left[\frac{f(\lambda)}{\psi^k(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_k}^{(j-1)}$, ; $j = \overline{1, m_k}$; $k = 1, s$.

Очевидно, если $X \subset C$, а $f(z)$ – аналитическая функция, то определение (9) является определением функции от матрицы и при $n=2$, в частности, дает следующие представления:

$$f(G) = \begin{cases} \frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} f(\lambda_1) + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} f(\lambda_2), & \lambda_1 \neq \lambda_2; \\ Ef(\lambda) - (G - \lambda E)f'(\lambda), & \lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda. \end{cases} \quad (9)$$

Л е м м а 1 [18]. Пусть $A \in M_n$, $f(z)$ – аналитическая функция с областью определения $D(f) : \Lambda(A) \subset D(f)$. Тогда спектр $\Lambda(B)$ матрицы $B=f(A)$ состоит из чисел $\beta_i=f(\alpha_i)$, $\alpha_i \in \Lambda(A)$.

Л е м м а 2 [18]. Если суперпозиция двух аналитических функций $g(z)=h(f(z))$ определена на спектре матрицы A , то $g(A)=h(f(A))$.

Л е м м а 3 [21]. Пусть $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ – некоторые аналитические функции, определенные на спектре $\Lambda(G)$ матрицы G , и $\alpha(G)=A$, $\beta(G)=B$. Пусть $\varphi(z)$ – аналитическая функция с областью определения $D(\varphi) : \Lambda(A) \cup \Lambda(B) \subset D(\varphi)$. Тогда матрицы $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$ коммутативны и обе записываются в терминах матрицы G .

Например, для матрицы $A \in M_2 : A=\alpha(G)$ с учетом перечисленных свойств и формулы (9) матрица

$$\tau^A = \begin{cases} \frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} \tau^{\alpha_1} + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} \tau^{\alpha_2}, & \lambda_1 \neq \lambda_2; \\ \tau^\alpha [E - (G - \lambda E) \ln \tau], & \lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda, \end{cases} \quad (10)$$

где $\tau > 0$, $\alpha_i \in \Lambda(A)$, $\lambda_i \in \Lambda(G)$, $i=1,2$, а функции τ^{α_i} при $\alpha_i \in C$ определены в (2).

Дадим теперь определения некоторых специальных символов и функций, зависящих от матричного аргумента или зависящих от матрицы как от параметра.

1. Гамма-функцией $\Gamma(G)$ называется матрица, определяемая для $G \in M_n$ по формулам (8), а если $G \in M_2$, то в соответствии с (9) получим

$$\Gamma(G) = \begin{cases} \frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} \Gamma(\lambda_1) + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} \Gamma(\lambda_2), & \lambda_1 \neq \lambda_2; \\ E\Gamma(\lambda) + (G - \lambda E)\Gamma'(\lambda), & \lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda, \end{cases} \quad (11)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера [13].

Используется также логарифмическая производная гамма-функции, называемая пси-функцией Эйлера [13]:

$$\psi(z) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \quad (12)$$

Соответствующая матрица, например, для $G \in M_2$, определяемая по формулам (9), имеет вид

$$\psi(G) = \begin{cases} \frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} \psi(\lambda_1) + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} \psi(\lambda_2), & \lambda_1 \neq \lambda_2; \\ E\psi(\lambda) + (G - \lambda E)\psi'(\lambda), & \lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda. \end{cases} \quad (13)$$

2. Символ Похгаммера $(A)_n$, $A \in M_n$ определяется равенством [22]

$$(A)_n = A(A+E)\dots[A+(n-1)E] = \Gamma(A+nE) [\Gamma(A)]^{-1}, n=1,2,\dots, \quad (14)$$

где $(A)_0 = E$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

3. Гипергеометрическая функция Гаусса с коммутативными матричными параметрами определяется как сумма ряда [22]

$${}_2F_1(A, B; C; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A)_n (B)_n}{n! (C)_n} z^n, \quad (15)$$

который сходится абсолютно при $|z| < 1$.

Пусть $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$ – аналитические функции, определенные на спектре $\Lambda(G)$ матрицы G . Тогда, используя леммы 1-3 и формулы (8), можно построить аналитическое продолжение матричного ряда (15) на всю комплексную плоскость z с разрезом по лучу $|\arg(1-z)| < \pi$, если использовать интегральное представление гипергеометрической функции Эйлера [13]

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-zt)^{-\alpha} dt. \quad (16)$$

Пусть $G \in M_2$, $A = \alpha(G)$, $B = \beta(G)$ и $C = \gamma(G)$. Их собственные значения соответственно $\lambda_i \in \Lambda(G)$, $\alpha_i \in \Lambda(A)$, $\beta_i \in \Lambda(B)$ и $\gamma_i \in \Lambda(C)$, причем $\operatorname{Re} \gamma_i > \operatorname{Re} \beta_i > 0$. Тогда

$$F(A, B; C; z) = \begin{cases} \frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} F(\alpha_1, \beta_1; \gamma_1; z) + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} F(\alpha_2, \beta_2; \gamma_2; z), & \lambda_1 \neq \lambda_2; \\ EF(\alpha, \beta; \gamma; z) + (G - \lambda E) \frac{d}{d\lambda} F(\alpha, \beta; \gamma; z), & \lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda, \end{cases} \quad (17)$$

где $\frac{d}{d\lambda} F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{d\lambda} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \frac{d\beta}{d\lambda} + \frac{\partial F}{\partial \gamma} \frac{d\gamma}{d\lambda}$, причем частные производные гипергеометрической функции по параметрам определяются через ассоциированные гипергеометрические функции [23 - 25].

4. Функцию Миттаг-Леффлера [13] с матричным параметром определим как сумму ряда

$$E_A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} [\Gamma(kA + E)]^{-1} z^k, \quad (18)$$

где $\operatorname{Re} \alpha_i > 0$, $\alpha_i \in \Lambda(A)$, а $[\Gamma(kA + E)]^{-1}$ – матрица, обратная к $\Gamma(kA + E)$.

Для матрицы $A \in M_2$, в частности, получим

$$E_A(z) = \begin{cases} \frac{A - \alpha_2 E}{\alpha_1 - \alpha_2} E_{\alpha_1}(z) + \frac{A - \alpha_1 E}{\alpha_2 - \alpha_1} E_{\alpha_2}(z), & \alpha_1 \neq \alpha_2; \\ E \cdot E_{\alpha}(z) + (A - \alpha E) \frac{d}{d\alpha} E_{\alpha}(z), & \alpha_1 = \alpha_2 \equiv \alpha. \end{cases} \quad (19)$$

В работах [7,8] определение (8) было распространено на понятие интегродифференциального оператора, являющегося матричным аналогом оператора дробного интегродифференцирования Римана-Лиувилля. В соответствии с определением, данным, например, в [7] для матрицы $G \in M_2$ и вектор-функции (в.ф.) $f(x) = (f_1; f_2)^T \in L(a, b)$, получаем

$$D_{\alpha}^G f = \begin{cases} \frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} D_{\alpha}^{\lambda_1} f + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} D_{\alpha}^{\lambda_2} f, & \lambda_1 \neq \lambda_2; \\ ED_{\alpha}^{\lambda} f + (G - \lambda E) \frac{d}{d\lambda} D_{\alpha}^{\lambda} f, & \lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda. \end{cases} \quad (20)$$

Из формул (20) следует, что если $\operatorname{Re} \lambda_1$ и $\operatorname{Re} \lambda_2$ имеют одинаковые знаки, то оператор D_{α}^G может ассоциироваться с дробным интегралом или дробной производной матричного порядка.

Пусть $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$. Тогда с учетом определений (1) и (8) представление матричного интегрального оператора $D_{\alpha}^{-G} f$ можно записать в виде

$$D_{\alpha}^{-G} f = \text{sign}(x-a) [\Gamma(G)]^{-1} \int_a^x |x-t|^{G-E} f(t) dt. \quad (21)$$

Формула (21) имеет один и тот же вид при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и при $\lambda_1 = \lambda_2$, однако, с учетом формул (10), (11) и (15) явное представление матричного оператора D_{α}^{-G} через скалярные операторы при $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda$ будет следующим:

$$D_{\alpha}^{-G} f = E D_{\alpha}^{-\lambda} f + (G - \lambda E) (D_{\alpha}^{-\lambda,1} f - \psi(\lambda) D_{\alpha}^{-\lambda} f), \quad (22)$$

где оператор $D_{\alpha}^{-\lambda,1}$ определен в (5), а $\psi(\lambda)$ определена в (12).

Как и в скалярном случае [1], класс в.ф. $f(x) \in L_p(a, b)$, представимых матричным интегральным оператором D_{α}^{-G} (22), обозначим $I_{\alpha}^{-G}(L_p)$.

Таким образом,

$$f(x) \in I_{\alpha}^{-G}(L_p) \Leftrightarrow \exists \varphi(x) : \varphi(x) \in L_p(a, b), 1 \leq p < \infty \text{ и } f(x) = D_{\alpha}^{-G} \varphi.$$

Пусть для определенности $\text{Re} \lambda_i \in (0, 1)$. Подобно скалярному случаю формула

$$D_{\alpha}^G f = \text{sign}(x-a) \frac{\partial}{\partial x} D_{\alpha}^{-(E-G)} f \quad (23)$$

определяет матричный оператор дробного дифференцирования. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то явное представление оператора D_{α}^G через скалярные операторы дается первой формулой в (20), а при $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda$ оно будет следующим:

$$D_{\alpha}^G f = \text{sign}(x-a) \frac{\partial}{\partial x} \left[E D_{\alpha}^{-(1-\lambda)} f + (G - \lambda E) (D_{\alpha}^{-(1-\lambda),1} f - \psi(1-\lambda) D_{\alpha}^{-(1-\lambda)} f) \right]. \quad (24)$$

Заметим, что определяя дифференциальный оператор D_{α}^G при $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda$ формально равенством (22)

$$D_{\alpha}^G f = \text{sign}(x-a) \left[E D_{\alpha}^{\lambda} f + (G - \lambda E) (D_{\alpha}^{\lambda,1} f - \psi(-\lambda) D_{\alpha}^{\lambda} f) \right]$$

и сопоставляя эту запись с формулой (24), получаем явное представление дифференциального оператора $D_{\alpha}^{\lambda,1}$ через дробные интегралы (см. (4)):

$$D_{\alpha}^{\lambda,1} f = \text{sign}(x-a) \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{\alpha}^{-(1-\lambda),1} f + \frac{1}{\lambda} D_{\alpha}^{-(1-\lambda)} f \right), \quad (25)$$

где использовано тождество $\psi(-z) - \psi(1-z) = 1/z$ [13].

Л е м м а 4. (Полугрупповое свойство). Пусть $G \in M_n$; $\alpha(z)$, $\beta(z)$ – любые аналитические функции, определенные на $\Lambda(A) = \{\lambda_i\}$. Пусть $\Lambda(A) = \{\alpha_i\}$ и $\Lambda(B) = \{\beta_i\}$ – спектры матриц $A = \alpha(G)$ и $B = \beta(G)$ соответственно, причем $\Lambda(A), \Lambda(B) \subset \mathbb{C}_+$. Тогда равенство

$$D_{\alpha}^{-A} D_{\alpha}^{-B} f = D_{\alpha}^{-B} D_{\alpha}^{-A} f = D_{\alpha}^{-(A+B)} f \quad (26)$$

выполняется для любой в.ф. $f(x) = (f_1; f_2; \dots; f_n)^T \in L(a, b)$.

Доказательство леммы 4. Ограничимся случаем $n=2$. Используя леммы 1-3 и записывая операторы D_{α}^{-A} и D_{α}^{-B} по определению (20) в терминах матрицы G , в случае $\lambda_1 \neq \lambda_2$ получим

$$\begin{aligned} D_{\alpha}^{-A} D_{\alpha}^{-B} f &= \frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} D_{\alpha}^{-\lambda_1} \left(\frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} D_{\alpha}^{-\beta_1} f + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} D_{\alpha}^{-\beta_2} f \right) + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} D_{\alpha}^{-\lambda_2} \times \\ &\times \left(\frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} D_{\alpha}^{-\beta_1} f + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} D_{\alpha}^{-\beta_2} f \right) = \frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} D_{\alpha}^{-\lambda_1} D_{\alpha}^{-\beta_1} f + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} D_{\alpha}^{-\lambda_2} D_{\alpha}^{-\beta_2} f = \\ &= \frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} D_{\alpha}^{-(\lambda_1 + \beta_1)} f + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} D_{\alpha}^{-(\lambda_2 + \beta_2)} f = D_{\alpha}^{-(A+B)} f. \end{aligned}$$

Коммутативность матричных интегральных операторов является очевидным следствием коммутативности дробных интегралов в скалярном случае.

В случае $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda$ с учетом (20) и (22) имеем

$$\begin{aligned} D_{\alpha}^{-A} D_{\alpha}^{-B} f &= ED_{\alpha}^{-\alpha} \left[ED_{\alpha}^{-\beta} f + (G - \lambda E) \frac{\partial}{\partial \beta} D_{\alpha}^{-\beta} f \right] + (G - \lambda E) \frac{\partial}{\partial \alpha} D_{\alpha}^{-\alpha} \times [ED_{\alpha}^{-\beta} f + \\ &+ (G - \lambda E) \frac{\partial}{\partial \beta} D_{\alpha}^{-\beta} f] = ED_{\alpha}^{-(\alpha+\beta)} f + (G - \lambda E) \left(D_{\alpha}^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} D_{\alpha}^{-\beta} f + \frac{\partial}{\partial \alpha} D_{\alpha}^{-\alpha} D_{\alpha}^{-\beta} f \right) = \\ &= ED_{\alpha}^{-(\alpha+\beta)} f + (G - \lambda E) \left[D_{\alpha}^{-\alpha} D_{\alpha}^{-\beta,1} f + D_{\alpha}^{-\alpha,1} D_{\alpha}^{-\beta} f - (\psi(\alpha) + \psi(\beta)) D_{\alpha}^{-(\alpha+\beta)} f \right]. \end{aligned}$$

Аналогично

$$D_{\alpha}^{-B} D_{\alpha}^{-A} f = ED_{\alpha}^{-(\beta+\alpha)} f + (G - \lambda E) \left[D_{\alpha}^{-\beta,1} D_{\alpha}^{-\alpha} f + D_{\alpha}^{-\beta} D_{\alpha}^{-\alpha,1} f - (\psi(\beta) + \psi(\alpha)) D_{\alpha}^{-(\beta+\alpha)} f \right].$$

Равенство правых частей полученных выражений теперь является следствием коммутативности операторов $D_{\alpha}^{-\alpha}, D_{\alpha}^{-\beta,1}$ и $D_{\alpha}^{-\beta}, D_{\alpha}^{-\alpha,1}$ и, следовательно, можно писать

$$D_{\alpha}^{-B} D_{\alpha}^{-A} f = ED_{\alpha}^{-(\alpha+\beta)} f + (G - \lambda E) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} D_{\alpha}^{-(\alpha+\beta)} f + \frac{\partial}{\partial \beta} D_{\alpha}^{-(\alpha+\beta)} f \right),$$

откуда вытекает утверждение леммы и для случая $\lambda_1 = \lambda_2$. $\square$

Л е м м а 5. Пусть выполнены все условия леммы 4, тогда равенство

$$D_{\alpha}^{-A} |x-a|^{-A} D_{\alpha}^{-B} |x-a|^{-B} f = D_{\alpha}^{-B} |x-a|^{-B} D_{\alpha}^{-A} |x-a|^{-A} f \quad (27)$$

выполняется для в.ф. $|x-a|^{-A} f, |x-a|^{-B} f = L(a, b)$ и $\Lambda(A) \cup \Lambda(B) \subset \{z: z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z \in (0,1)\}$ почти всюду на (a, b) .

Приведем доказательство этого свойства для левосторонних операторов с началом в нуле и $A, B \in M_2$.

В условиях леммы 4 матрицы A и B определены как функции от матрицы G . Для матрицы $G \in M_2$ и матриц $A = \alpha(G)$ и $B = \beta(G)$ по определению (20) в случае $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_i \in \Lambda(G)$ запишем левую часть равенства (27) при $a=0$:

$$\frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} D_{\alpha}^{-\alpha_1} x^{-\alpha_1} D_{\alpha}^{-\beta_1} x^{-\beta_1} f + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} D_{\alpha}^{-\alpha_2} x^{-\alpha_2} D_{\alpha}^{-\beta_2} x^{-\beta_2} f, \quad (28)$$

где $\alpha_i \in \Lambda(A)$, $\beta_i \in \Lambda(B)$.

Согласно определению (1) для каждой композиции дробных интегралов в (28) имеем

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_i) \Gamma(\beta_i)} \int_0^x (x-t)^{\alpha_i-1} t^{-\alpha_i} dt \int_0^x (t-s)^{\beta_i-1} s^{-\beta_i} f(s) ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha_i) \Gamma(\beta_i)} \times \\ &\times \int_0^x s^{-\beta_i} f(s) ds \int_0^x (x-t)^{\alpha_i-1} (t-s)^{\beta_i-1} t^{-\alpha_i} dt, \quad i=1,2. \end{aligned} \quad (29)$$

Полагая во внутреннем интеграле (29) $t=x-(x-s)z$ и воспользовавшись формулой (16), получим

$$J_1 = \frac{x^{-\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + \beta_i)} \int_0^x (x-s)^{\alpha_i+\beta_i-1} s^{-\beta_i} F\left(\alpha_i, \alpha_i; \alpha_i + \beta_i; \frac{x-s}{x}\right) f(s) ds. \quad (30)$$

Аналогично для правой части равенства (27) найдем

$$J_2 = \frac{x^{-\beta_i}}{\Gamma(\alpha_i + \beta_i)} \int_0^x (x-s)^{\alpha_i+\beta_i-1} s^{-\alpha_i} F\left(\beta_i, \beta_i; \alpha_i + \beta_i; \frac{x-s}{x}\right) f(s) ds. \quad (32)$$

После применения формулы автотрансформации [13] следует равенство $J_1 = J_2$. $\square$

Замечание 1. В процессе доказательства леммы возникли два интегральных оператора (31) и (32) с гипергеометрической функцией в ядре. Сопоставляя их с оператором M.Saigo (7), видим, что $J_1 = J_2 \Leftrightarrow I_{\alpha}^{\alpha_i+\beta_i, -\beta_i, -\alpha_i} x^{-\beta_i} f = I_{\alpha}^{\alpha_i+\beta_i, -\alpha_i, -\beta_i} x^{-\alpha_i} f$ и является одним из известных тождеств для операторов этого типа [15].

Замеченное обстоятельство позволяет ввести в рассмотрение матричный аналог оператора M.Saigo. Запись, дающая его определение, не отличается от (6), если положить в ней $\alpha = \alpha(G)$, $\beta = \beta(G)$, $\eta = \eta(G)$, где $G \in M_n$, а $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\eta(z)$ – произвольные аналитические функции.

В терминах матричного оператора M.Saigo свойство, доказанное в лемме 5, может быть записано так:

$$I_{\alpha}^{A+B, -B, -A} x^{-B} f = I_{\alpha}^{A+B, -A, -B} x^{-A} f, \quad (32)$$

где $A=\alpha(G)$, $B=\beta(G)$.

Замечание 2. Часто встречающаяся в нелокальных краевых задачах [26 - 32] композиция интегральных операторов $D_{\alpha}^{-A} x^{-A} D_{\alpha}^{-(E-A)} \varphi$ с учетом леммы 5 и замечания к ней может быть записана в терминах матричного оператора M.Saigo. Действительно,

$$D_{\alpha}^{-A} x^{-A} D_{\alpha}^{-(E-A)} \varphi = x^{-A} \int_0^x F\left(A, A; E; \frac{x-s}{x}\right) \varphi(s) ds = I_{\alpha}^{E, A-E, -A} \varphi. \quad (33)$$

Рассмотренные ниже свойства касаются основных композиционных тождеств с интегральными и дифференциальными матричными операторами.

Пусть матрица $A \in M_n$ и обладает следующим спектром:

$$\Lambda(A) = \{\alpha_i : \alpha_i \in C_+, n-1 \leq \operatorname{Re} \alpha_i \leq n, n \in N\}. \quad (34)$$

В этом случае, обобщая (23), матричный дифференциальный оператор можно определить формулой

$$D_{\alpha}^A f = \left(\operatorname{sign}(x-a) \frac{\partial}{\partial x} \right)^n D_{\alpha}^{-(nE-A)} f. \quad (35)$$

Как обычно класс абсолютно непрерывных на отрезке Ω в.ф. $f(x)$ обозначаем $AC(\Omega)$. Известно [33], что он совпадает с классом первообразных от суммируемых по Лебегу функций. Через $AC^n(\Omega)$, где $n=1,2,\dots$ обозначается класс в.ф. таких, что

$$f(x) \in AC^n(\Omega) \Leftrightarrow f(x) \in C^{n-1}(\Omega) \cap \{f(x) : f^{(n-1)}(x) \in AC(\Omega)\}.$$

Нижеследующие теоремы отражают основные полугрупповые свойства матричных интегродифференциальных операторов.

Теорема 1. Пусть матрица $A \in M_n$, а ее спектр $\Lambda(A) \subset C_+$. Тогда равенство

$$D_{\alpha}^A D_{\alpha}^{-A} f = f(x) \quad (36)$$

выполняется почти всюду на (a,b) для любой в.ф. $f(x) \in L(a,b)$, а равенство

$$D_{\alpha}^{-A} D_{\alpha}^A f = f(x) \quad (37)$$

- для в.ф. $f(x) \in I_{\alpha}^A(L)$.

Доказательство теоремы 1. В довольно частном, но весьма важном для приложений случае, когда собственные значения матрицы A удовлетворяют условию (35), доказательство теоремы 1 с учетом формулы (35) полностью повторяет аналогичные рассуждения в скалярном случае.

Действительно, равенство (36) немедленно следует из леммы 4, так как

$$D_{\alpha}^A D_{\alpha}^{-A} f = \left(\operatorname{sign}(x-a) \frac{\partial}{\partial x} \right)^n D_{\alpha}^{-(nE-A)} D_{\alpha}^{-A} f = \left(\operatorname{sign}(x-a) \frac{\partial}{\partial x} \right)^n D_{\alpha}^{-nE} f = f(x).$$

Теперь пусть $f(x) \in I_{\alpha}^A(L)$. Тогда существует в.ф. $\varphi(x) \in L(a,b) : f(x) \in D_{\alpha}^{-A} \varphi$ и равенство (38) $D_{\alpha}^{-A} (D_{\alpha}^A D_{\alpha}^{-A} \varphi) = D_{\alpha}^{-A} \varphi$ становится верным для любой в.ф. $\varphi(x)$ в силу (37).

Если же о спектре матрицы A известно лишь, что $\Lambda(A) \subset C_+$, то для доказательства теоремы нужно обратиться к определению (8).

Ограничиваясь для простоты множеством M_2 , заметим, что формулы (36) и (37) для $\alpha_1 \neq \alpha_2$ являются очевидным следствием аналогичных формул в скалярном случае.

Действительно, используя (20), получим

$$\begin{aligned} D_{\alpha}^{-A} D_{\alpha}^A f &= \frac{A - \alpha_2 E}{\alpha_1 - \alpha_2} D_{\alpha}^{\alpha_1} \left(\frac{A - \alpha_2 E}{\alpha_1 - \alpha_2} D_{\alpha}^{-\alpha_1} f + \frac{A - \alpha_1 E}{\alpha_2 - \alpha_1} D_{\alpha}^{-\alpha_2} f \right) + \\ &+ \frac{A - \alpha_1 E}{\alpha_2 - \alpha_1} D_{\alpha}^{\alpha_2} \left(\frac{A - \alpha_2 E}{\alpha_1 - \alpha_2} D_{\alpha}^{-\alpha_1} f + \frac{A - \alpha_1 E}{\alpha_2 - \alpha_1} D_{\alpha}^{-\alpha_2} f \right) = \\ &= \frac{A - \alpha_2 E}{\alpha_1 - \alpha_2} D_{\alpha}^{\alpha_1} D_{\alpha}^{-\alpha_1} f + \frac{A - \alpha_1 E}{\alpha_2 - \alpha_1} D_{\alpha}^{\alpha_2} D_{\alpha}^{-\alpha_2} f = \frac{A - \alpha_2 E}{\alpha_1 - \alpha_2} f + \frac{A - \alpha_1 E}{\alpha_2 - \alpha_1} f = f. \end{aligned}$$

Так же обосновывается (37) для $\alpha_1 \neq \alpha_2$ в классе в.ф. $I_{\alpha}^A(L)$.

В случае, когда собственные значения $\alpha_1 = \alpha_2 \equiv \alpha$, можно указать единичный отрезок, такой, что $\alpha \in [n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$. Но в этом случае имеет место формула (35) и справедливы рассуждения, приведенные в начале доказательства.

Теорема доказана. $\square$

Доказанное в теореме 1 свойство (36) матричных интегродифференциальных операторов имеет прямое отношение к проблеме разрешимости систем интегральных уравнений Абеля.

Пусть матрица $A \in M_m$, а ее спектр $\Lambda(A) \subset C_+$.

Систему интегральных уравнений (с.и.у.)

$$D_{\alpha}^{-A} \varphi = f(x), \quad (38)$$

где $x > a > -\infty$, $\varphi(x)$ и $f(x)$ - m - мерные в.ф., рассматриваемую на конечном отрезке $[a, b]$, будем называть матричным уравнением Абеля первого рода.

Рассмотрим вначале случай, когда $\operatorname{Re} \alpha_i \in (0, 1)$, $\alpha_i \in \Lambda(A)$.

Действуя, пока формально, оператором D_{α}^A на левую и правую части равенства (38) на основании теоремы 1 и формулы (36), получим

$$\varphi(x) = D_{\alpha}^A f,$$

или, учитывая (23),

$$\varphi(x) = \frac{\partial}{\partial x} D_{\alpha}^{-(E-A)} f. \quad (39)$$

Таким образом, если уравнение (38) имеет решение, то это решение необходимо имеет вид (39) и, следовательно, единственно.

Приведем одно достаточное условие разрешимости уравнения (38) в классе в.ф. $L(a, b)$.

Л е м м а 6. Если $f(x) \in AC([a, b])$, то и $D_{\alpha}^{-(E-A)} f \in AC([a, b])$, при этом

$$D_{\alpha}^{-(E-A)} f = [\Gamma(2E - A)]^{-1} (x - a)^{E-A} f(a) + D_{\alpha}^{-(2E-A)} f'. \quad (40)$$

Доказательство леммы 6. Так как $f(x) \in AC([a, b])$, то в.ф. $f(x)$ можно представить так [33]:

$$f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s) ds. \quad (41)$$

Подставляя (41) в левую часть равенства (40), получим

$$D_{\alpha}^{-(E-A)} f = [\Gamma(2E - A)]^{-1} (x - a)^{E-A} f(a) + [\Gamma(E - A)]^{-1} \int_a^x (x - t)^{-A} \left(\int_a^t f'(s) ds \right) dt. \quad (42)$$

Непосредственной перестановкой порядка интегрирования нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\int_a^x (x - t)^{-A} \left(\int_a^t f'(s) ds \right) dt = \int_a^x \left(\int_a^{t-s} (t - s)^{-A} f'(s) ds \right) dt. \quad (43)$$

Очевидно, что первое и второе слагаемые в (42) являются первообразными от суммируемых в.ф. и, следовательно, абсолютно непрерывны. Представление (40) следует из того, что

$$[\Gamma(E - A)]^{-1} \int_a^x \left(\int_a^{t-s} (t - s)^{-A} f'(s) ds \right) dt = \int_a^x (D_{\alpha}^{-(E-A)} f') dt = D_{\alpha}^{-E} D_{\alpha}^{-(E-A)} f'.$$

По лемме 4 $D_{\alpha}^{-E} D_{\alpha}^{-(E-A)} f' = D_{\alpha}^{-(2E-A)} f'$, что и доказывает лемму 6. $\square$

Т е о р е м а 2. Пусть матрица $A \in M_m$, а ее спектр $\Lambda(A) = \{\alpha_i : \alpha_i \in C_+, 0 < \operatorname{Re} \alpha_i < 1\}$.

Если $f(x) \in AC([a, b])$, то матричное уравнение Абеля (38) разрешимо в $L(a, b)$, а решение (39) можно представить в виде

$$\varphi(x) = [\Gamma(E - A)]^{-1} (x - a)^{-A} f(a) + D_{\alpha}^{-(E-A)} f'. \quad (44)$$

Доказательство теоремы 2. Так как в силу леммы 4 $D_{\alpha}^{-(E-A)} f \in AC([a, b])$, то, дифференцируя равенство (40), получим формулу (44). Разрешимость уравнения (38) теперь обосновывается непосредственной подстановкой (44) в (38), что и доказывает теорему. $\square$

Замечание. Пусть для простоты матрица $A \in M_2$. В теореме не охвачены случаи, когда одно или оба собственных значения матрицы A принимают значения 0 или 1. Эти случаи не являются особыми. Как следует из определения (20) они сводятся к очевидным соотношениям между скалярными операторами дробного интегрирования.

Случай, когда спектр матрицы A удовлетворяет условию (34), сводится к рассмотренному дифференцированию обеих частей (38).

Теорема 3. Пусть матрицы A и B удовлетворяют условиям леммы 4. Тогда равенство

$$D_{\alpha}^A D_{\alpha}^B f = D_{\alpha}^{A+B} f(x) \quad (45)$$

выполняется почти всюду на (a, b) в следующих случаях:

- 1) $\Lambda(B) \subset C_-, \Lambda(A+B) \subset C_-, f(x) \in L(a, b);$
- 2) $\Lambda(B) \subset C_+, \Lambda(A) \subset C_-, f(x) \in I_{\alpha}^B(L);$
- 3) $\Lambda(A) \subset C_+, \Lambda(A+B) \subset C_+, f(x) \in I_{\alpha}^{A+B}(L).$

Доказательство теоремы 3. 1) если $\Lambda(A), \Lambda(B) \subset C_-$, то равенство (46) установлено в лемме 4. Пусть $\Lambda(A) \subset C_+$. Тогда учитывая, что $\Lambda(B) \subset C_-$ и $\Lambda(A+B) \subset C_-$, по лемме 4 $D_{\alpha}^{-A} D_{\alpha}^{A+B} f = D_{\alpha}^{-A+(A+B)} = D_{\alpha}^B f$, откуда, используя (36), получим

$$D_{\alpha}^A D_{\alpha}^B f = D_{\alpha}^A D_{\alpha}^{-A} D_{\alpha}^{A+B} = D_{\alpha}^{A+B} f;$$

2) в этом случае существует в.ф. $\varphi(x) \in L(a, b): f(x) = D_{\alpha}^{-B} \varphi$. Поскольку $\Lambda(-B) \subset C_-$ и $\Lambda(A) \subset C_-$, следовательно, $\Lambda(A+B+(-B)) \subset C_-$, то согласно первому случаю получим $D_{\alpha}^{A+B} f = D_{\alpha}^{A+B} D_{\alpha}^{-B} \varphi = D_{\alpha}^{A+B-B} \varphi = D_{\alpha}^A \varphi = D_{\alpha}^A D_{\alpha}^B f$;

3) в этом случае существует в.ф. $\varphi(x) \in L(a, b): f(x) = D_{\alpha}^{-A-B} \varphi$. Тогда, замечая, что $\Lambda(B+(-A-B)) = \Lambda(-A) \subset C_-$ и $\Lambda(-A-B) \subset C_-$, в соответствии с первым случаем и (36), получим $D_{\alpha}^A D_{\alpha}^B f = D_{\alpha}^A D_{\alpha}^{-B} D_{\alpha}^{-A-B} \varphi = D_{\alpha}^A D_{\alpha}^{B-A-B} \varphi = D_{\alpha}^A D_{\alpha}^{-A} \varphi = \varphi = D_{\alpha}^{A+B} f$.

Теорема доказана. $\square$

Замечание. В теореме допустимы случаи $\alpha_i = 0, \beta_i = 0$ и $\alpha_i + \beta_i = 0$, при $\alpha_i, \beta_i \in R$, $\alpha_i \in \Lambda(A), \beta_i \in \Lambda(B)$, а при некоторых дополнительных требованиях и случаи, когда $Re \beta_i = 0, Re \alpha_i > 0; Re \alpha_i = 0, Re \beta_i < 0; Re(\alpha_i + \beta_i) = 0, Re \beta_i > 0$.

Теорема 4. Пусть матрицы A и B удовлетворяют условиям леммы 4. Пусть $Re \alpha_i \in [0, 1], Re \beta_i > 0, |Re(\alpha_i - \beta_i)| < 1$. Тогда формула

$$D_{\alpha}^A |x-a|^{A-B} D_{\alpha}^{-B} f = |x-a|^{-B} D_{\alpha}^{A-B} |x-a|^A f \quad (46)$$

справедлива для $f(x) \in L(a, b)$.

Доказательство этой теоремы в $L(a, b)$ достаточно громоздко и мы его здесь не приводим. В скалярном случае тождество (46) доказано, например, в [6]. В монографии [1] приведены и другие весовые формулы композиций трех интегродифференциальных операторов.

Приведем здесь простое доказательство формулы (47) в классе в.ф. $|x-a|^A f \in I_{\alpha}^A(L)$.

Доказательство теоремы 4. Если $|x-a|^A f \in I_{\alpha}^A(L)$, то существует вектор-функция $\varphi(x) \in L(a, b): f(x) = |x-a|^{-A} D_{\alpha}^{-A} \varphi$. Подставляя $f(x)$ в равенство (46) и учитывая лемму 5 и теорему 3, получим

$$D_{\alpha}^A |x-a|^{A-B} D_{\alpha}^{-B} |x-a|^{-A} D_{\alpha}^{-A} \varphi = D_{\alpha}^A |x-a|^A |x-a|^{-B} D_{\alpha}^{-B} |x-a|^{-A} D_{\alpha}^{-A} \varphi = D_{\alpha}^A |x-a|^A |x-a|^{-A} \times \\ \times D_{\alpha}^{-A} |x-a|^{-B} D_{\alpha}^{-B} \varphi = |x-a|^{-B} D_{\alpha}^{-B} \varphi = |x-a|^{-B} D_{\alpha}^{-B} D_{\alpha}^A |x-a|^A f = |x-a|^{-B} D_{\alpha}^{A-B} |x-a|^A f.$$

Теорема доказана. $\square$

Следствия.

1. Если в (46) положить $B=E-A$, получим матричный аналог известного при $a=0$ [34] тождества $D_{\alpha}^A x^{2A-E} D_{\alpha}^{-(E-A)} f = x^{-(E-A)} D_{\alpha}^{2E-A} x^A f$, справедливого для любых

$\alpha_i: Re \alpha_i \in (0, 1), \alpha_i \in \Lambda(A)$, причем при $\alpha_i: Re \alpha_i \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ оно верно для $x^A f(x) \in L(0, b)$.

2. Если в (46) положить $A=E-B$, то получим тождество $D_{\alpha}^{E-B} x^{E-2B} D_{\alpha}^{-B} f = x^{-B} D_{\alpha}^{E-2B} x^{E-B} f$, справедливое для любых $\beta_i : \operatorname{Re} \beta_i \in (0,1), \beta_i \in \Lambda(B)$, причем при $\beta_i : \operatorname{Re} \beta_i \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ оно верно для $x^{E-B} f(x) \in L(0,b)$.

В качестве одного из приложений матричных интегродифференциальных операторов рассмотрим систему обобщенных интегральных уравнений (с.о.и.у.) Абеля в матричной форме

$$A(x)I_{\alpha}^G U(x)u + B(x)I_{xb}^G V(x)u = f(x), \quad (47)$$

где $G \in M_n$, $A(x)$, $B(x)$, $U(x)$ и $V(x)$ – функциональные $[n \times n]$ -матрицы, $u=u(x)$ и $f(x)$ – вектор-функции, $I_{\alpha}^G = D_{\alpha}^{-G}$ и $I_{xb}^G = D_{xb}^{-G}$ – введенные выше матричные интегральные операторы.

Первая попытка решения с.о.и.у. Абеля содержится в работе N.Zeilon [35]. Более серьезные шаги были предприняты в уже упомянутых в начале статьи работах M.Lowengrub, J.Walton [11] и J.R.Walton [12]. В обеих работах рассматривается система двух уравнений ($n=2$) в весьма частных случаях. Так, в работе [11] $G=(1-\mu)E$, $0 < \mu < 1$;

$$A(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1(x) & 0 \\ 0 & \alpha_2(x) \end{pmatrix}; B(x) = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1(x) \\ \beta_2(x) & 0 \end{pmatrix}; U = V \equiv 0, \text{ а система уравнений (48) при-}$$

водится методом аналитического продолжения к задаче Римана для двух пар функций. Содержащееся в этой работе решение задачи Римана ошибочно. В работе [12] дано сведение системы уравнений (48) к полному сингулярному уравнению для следующих матриц:

$$G = \begin{pmatrix} 1-\mu_1 & 0 \\ 0 & 1-\mu_2 \end{pmatrix}, 0 < \mu < 1; A(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1(x) & 0 \\ 0 & \alpha_2(x) \end{pmatrix}, B(x) = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1(x) \\ \beta_2(x) & 0 \end{pmatrix};$$

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{12} \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

В работах И.Л. Васильева [36,37] система уравнений (48) для $G \in M_n$, $G=\alpha E$, $A(x)$ и $B(x)$ -матрицы-функции, $U=V \equiv 0$ сведена к системе сингулярных интегральных уравнений; аналогичное исследование проведено и для систем с матрицами $A(x)=B(x) \equiv 0$, $U, V \in M_n$.

В работе А.А. Андреева [8] система уравнений (48) рассмотрена в самом общем виде и указаны условия ее нормальной разрешимости.

Другим приложением матричных интегродифференциальных операторов является круг нелокальных краевых задач для вырождающихся систем дифференциальных уравнений с частными производными. Некоторые работы авторов [26-32] в этом направлении уже упоминались в начале данной статьи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688с.
2. Oldham K.B., Spanier J. The fractional calculus. N.Y.– London: Acad. Press, 1974. 234 p.
3. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
4. Nigmatullin R.R. The realization of the generalized transfer equation in a medium with the fractal geometry // Phis. Stst. Sol. (b) 133. 1986.
5. Нахушев А.М. Об уравнениях состояния непрерывных одномерных систем и их приложениях. Нальчик-Майкоп : Логос, 1995. 59 с.
6. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. школа, 1995. 301 с.
7. Андреев А.А. Нелокальные краевые задачи для одной модельной вырождающейся системы гиперболического типа // Краевые задачи для уравнений математической физики. Куйбышев: Куйбыш. пед. ин-т, 1990. С. 3-6.
8. Андреев А.А. Об одном обобщении операторов дробного интегродифференцирования и его приложениях // Интегральные уравнения и краевые задачи математической физики : Мат. Всесоюз. конф. Владивосток, 1990.. С. 91.
9. Самко С.Г. О сведении некоторых интегральных уравнений первого рода теории упругости и гидродинамики к уравнениям второго рода // Прикл. мат. и мех. 1967. Т.31. N2. С. 343-345.
10. Lowengrub M. Systems of Abel type equations // Function theoretic methods in defferencial equations / R.P. Gilbert, R.J. Weinacht, eds. Pitman Publ. 1976. P. 277-296.
11. Lowengrub M., Walton J. Systems of generalized Abel equations // SIAM J. Math. Anal. 1979. Vol.10. N4. P. 794-807.

12. *Walton J.* Systems of generalized Abel integral equations with applications to simultaneous dual relations // *SIAM J. Math. Anal.* 1979. Vol.10, N4. P. 808-822.
13. *Бейтман Г., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функции. В 3 т. Т.1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.
14. *Килбас А.А.* Степенно-логарифмические интегралы в пространствах гильбертовских функций // *Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.* 1975, N1. С.37-43.
15. *Saigo M.* A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions // *Math. Rep. Kyushu Univ.* 1978. Vol. 11, N2. P. 135-143.
16. *Saigo M.* A certain boundary value problem for the Euler-Darboux equation // *Math. Japon.* 1979. Vol.24, N4. P. 377-385.
17. *Репин О.А.* Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. Самара: Саратов. ун-т, Самар. филиал, 1992. 162 с.
18. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.
19. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
20. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.
21. *Лапто-Данилевский И.А.* Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1957.
22. *Андреев А.А.* Построение элементарных решений и решение задачи Коши для уравнений и систем уравнений гиперболического типа: Дис.... канд. физ.-мат. наук. Куйбышев, 1981. 100 с.
23. *Андреев А.А., Килбас А.А.* О решениях неоднородного гипергеометрического уравнения и вычислении интегралов // *Докл. АН БССР.* 1983. Т.27, N6. С. 493-496.
24. *Андреев А.А., Килбас А.А.* О некоторых ассоциированных гипергеометрических функциях // *Изв. вузов. Сер.-Мат.* 1984. N12. С.3-12.
25. *Андреев А.А.* О некоторых приложениях ассоциированных гипергеометрических функций // *Диффер. уравнения (математическая физика): Мат. Куйбыш. обл. межвуз. науч. совещ.-сем.* Куйбышев, 1984. N12. С.8-9.
26. *Огородников Е.Н.* О нелокальной краевой задаче для одной модельной вырождающейся системы гиперболического типа // *Некласс. уравн. мат. физики.* Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1988. С.150-151.
27. *Андреев А.А., Огородников Е.Н.* О некоторых нелокальных краевых задачах для одной модельной вырождающейся системы гиперболического типа // *Линейные операторы в функциональных пространствах: Мат. регион. конф./ Чечен.-ингуш. ун-т. Грозный,* 1989. С. 23-24.
28. *Андреев А.А., Огородников Е.Н.* Нелокальные краевые задачи для вырождающейся системы и интегральные уравнения третьего рода // *Интегральные уравнения и краевые задачи математической физики: Мат. Всесоюз. конф. Владивосток,* 1990. С. 97.
29. *Андреев А.А., Линьков А.В.* Нелокальные краевые задачи для модельной вырождающейся системы дифференциальных уравнений // *Дифференциальные уравнения и их применения: Мат. междунар. конф. Саранск: МГУ,* 1994. С.41.
30. *Огородников Е.Н.* Две нелокальные краевые задачи для вырождающейся системы гиперболического типа // *Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. пятой межвуз. конф. / Самар. техн. ун-т. Самара,* 1995. С. 81-82.
31. *Огородников Е.Н.* Краевые задачи со смещением для вырождающейся системы гиперболического типа // *Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. шестой межвуз. конф./ Самар. техн. ун-т. Самара,* 1996. С. 75-77.
32. *Огородников Е.Н.* Об одной нелокальной краевой задаче для вырождающейся системы гиперболического типа // *Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. седьмой межвуз. конф./ Самар. техн. ун-т. Самара,* 1997. С. 60-65.
33. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1986. 496с.
34. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 295 с.
35. *Zeilon N.* Sur quelque points de la theorie de l'equation integrale d'Abel // *Arkiv. for Mat., Astr. och Fysik.* 1924. Bd 18, N5. S.1-19.
36. *Васильев И.Л.* О единственности решения системы уравнений Абеля с постоянными коэффициентами // *Докл. АН БССР.* 1981. Т.25, N2. С. 105-107.
37. *Васильев И.Л.* Системы интегральных уравнений с ядром Абеля на отрезке вещественной оси // *Изв. АН БССР. Сер. мат.-физ. наук.* 1982. N2. С.47-53.