Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Б. Лаврова, Модель поведения упругопластического анизотропно упрочняющегося материала, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1999, выпуск 7, 86–91

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu211>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 17:03:48

МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО АНИЗОТРОПНО УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА

Предлагается модель описания поведения изотропного материала, приобретающего анизотропные свойства в процессе пластического деформирования. Эта модель - вариант теории течения анизотропно упрочняющихся материалов с первоначальным условием пластичности Треска. Показано, что принцип макродетерминизма приводит к ограничениям на выбор сингулярной поверхности нагружения и параметров истории. Проведено сравнение поведения материала, определяемого этой моделью, с экспериментальными данными при сложном нагружении.

В качестве начальной поверхности нагружения выберем поверхность текучести Треска

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = k \quad (i \neq j). \quad (1)$$

Изменения этой поверхности в процессе нагружения будут определяться следующим образом. Собственные значения тензора напряжений заменим на собственные значения тензора активных напряжений Кадашевича-Новожилова [3] $S_{ij} = \sigma_{ij} - qe_{ij}^p$, а константу k - на функцию материала $k(q)$, аргумент этой функции q - параметр упрочнения, а сама функциональная зависимость определяется с помощью экспериментальных данных. Способ определения этой функции будет предложен в дальнейшем.

В результате этих изменений уравнение поверхности нагружения примет вид

$$\max |S_i - S_j| = k(q) \quad (i \neq j). \quad (2)$$

Предположим, что приращения компонент тензора деформаций можно представить как сумму приращений компонент тензора упругих деформаций и приращений компонент тензора пластических деформаций $de_{ij} = de_{ij}^e + de_{ij}^p$, а приращения компонент тензора упругих деформаций связаны с приращениями компонент тензора напряжений законом Гука. Из ассоциированного закона течения следует соосность тензоров S_{ij} и de_{ij}^p .

Будем считать, что приращение параметра упрочнения линейная однородная функция приращений компонент тензора пластических деформаций

$$dq = A_{ij}(\sigma_{ij}, e_{ij}^p, q) de_{ij}^p. \quad (3)$$

В силу симметрии поверхности (2) в пространстве главных активных напряжений достаточно рассмотреть эволюцию в процессе нагружения её части, попадающей в область $S_1 \geq S_2 \geq S_3$ этого пространства. Поверхность (2) в рассматриваемой области кусочно-линейна, поэтому возникает необходимость различать её грани и ребра.

Уравнение грани поверхности (2), принадлежащей области $S_1 \geq S_2 \geq S_3$, имеет вид

$$S_1 - S_3 = k. \quad (4)$$

На этой грани соотношения ассоциированного закона течения дают возможность получить следующие формулы для приращений компонент тензора пластических деформаций:

$$de_{ij}^p = d\psi(l_i l_j - n_i n_j) \quad (5)$$

(здесь l_i, m_i, n_i - направляющие косинусы собственных осей тензоров S_{ij} и de_{ij}^p).

Тогда приращение параметра упрочнения на грани (4) можно вычислить следующим образом:

$$dq = B d\psi; \quad B = A_{ij}(l_i l_j - n_i n_j). \quad (6)$$

Формулы для компонент тензора напряжений имеют вид

$$\sigma_{ij} = (S_1 - S_2)(l_i l_j + n_i n_j) + S_2 \delta_{ij} - k n_i n_j + q e_{ij}^p. \quad (7)$$

Система уравнений (5), (6), (7) определяет поведение среды при напряженном состоянии, соответствующем грани поверхности нагружения. Функции $\psi, S_1, S_2, l_i, m_i, n_i$ характеризуют такое поведение среды.

Связь приращений этих функций с приращениями компонент тензора напряжений играет роль определяющих соотношений на рассматриваемой грани

$$d\psi = \frac{d\sigma_{ij}(l_i l_j - n_i n_j)}{2q + B(k' + e_{ij}^p(l_i l_j - n_i n_j))}, \quad dS_2 = d\sigma_{ij} m_i m_j - d\psi B e_{ij}^p m_i m_j;$$

$$dS_1 = d\sigma_{ij} n_i n_j - d\psi B e_{ij}^p n_i n_j + k' B d\psi;$$

$$dl_i = a m_i + b n_i; \quad dm_i = -a l_i + c n_i; \quad dn_i = -b l_i - c m_i;$$

$$a = \frac{(d\sigma_{ij} - d\psi B e_{ij}^p) l_i m_j}{k + S_3 - S_2}; \quad b = \frac{(d\sigma_{ij} - d\psi B e_{ij}^p) l_i n_j}{k}; \quad c = \frac{(d\sigma_{ij} - d\psi B e_{ij}^p) n_i m_j}{S_2 - S_3}$$

(здесь k' -производная $k(q)$ по параметру q .

Ребра поверхности нагружения (2), принадлежащие области $S_1 \geq S_2 \geq S_3$,получаются при выполнении условий $S_2 = S_3$ или $S_1 = S_2$.

При $S_2 = S_3$ уравнение ребра имеет вид

$$\begin{cases} S_1 - S_3 = k; \\ S_1 - S_2 = k. \end{cases} \quad (8)$$

На этом ребре с помощью ассоциированного закона течения можно получить следующие формулы для приращений компонент тензора пластических деформаций

$$de_{ij}^p = d\psi_1(l_i l_j - n_i n_j) + d\psi_2(l_i l_j - m_i m_j). \quad (9)$$

Для приращения параметра упрочнения на ребре (8) имеем:

$$dq = B_1 d\psi_1 + B_2 d\psi_2, \quad (10)$$

где

$$B_1 = A_{ij}(l_i l_j - n_i n_j); \quad (11)$$

$$B_2 = A_{ij}(l_i l_j - m_i m_j). \quad (12)$$

Компоненты тензора напряжений на ребре (8) выражаются через собственные значения тензора активных напряжений и направляющие косинусы его главных осей следующим образом:

$$\sigma_{ij} = S_1 \delta_{ij} - k(\delta_{ij} - l_i l_j) + q e_{ij}^p. \quad (13)$$

Система уравнений (9), (10), (13) определяет поведение среды при напряженном состоянии, соответствующем ребру (17) поверхности нагружения. Функции $\psi_1, \psi_2, S_1, l_i, m_i, n_i$ характеризуют такое поведение среды. Связь приращений этих функций с приращениями компонент тензора напряжений на рассматриваемом ребре задается формулами

$$d\psi_1 = \frac{d\sigma_{ij}(l_i l_j - n_i n_j)}{2q + B_1(k' + e_{ij}^p(l_i l_j - n_i n_j))}; \quad (14)$$

$$d\psi_2 = \frac{d\sigma_{ij}(l_i l_j - m_i m_j)}{2q + B_2(k' + e_{ij}^p(l_i l_j - m_i m_j))}; \quad (15)$$

$$dS_1 = \frac{1}{3}(d\sigma_{ij} \delta_{ij} + 2k'(B_1 d\psi_1 + B_2 d\psi_2)); \quad (16)$$

$$a = \frac{(d\sigma_{ij} - e_{ij}^p (B_1 d\psi_1 + B_2 d\psi_2)) l_i m_j}{k}; \quad (17)$$

$$b = \frac{(d\sigma_{ij} - e_{ij}^p (B_1 d\psi_1 + B_2 d\psi_2)) l_i n_j}{k}. \quad (18)$$

При $S_1 = S_2$ уравнение ребра имеет вид

$$\begin{cases} S_1 - S_3 = k; \\ S_2 - S_3 = k. \end{cases} \quad (19)$$

На этом ребре с помощью ассоциированного закона течения можно получить следующие формулы для приращений компонент тензора пластических деформаций:

$$de_{ij}^p = d\psi_1 (l_i l_j - n_i n_j) + d\psi_2 (m_i m_j - n_i n_j). \quad (20)$$

Приращение параметра упрочнения на ребре (19) можно вычислить следующим образом:

$$dq = B_3 d\psi_1 + B_4 d\psi_2, \quad (21)$$

где

$$B_3 = A_{ij} (l_i l_j - n_i n_j); \quad (22)$$

$$B_4 = A_{ij} (m_i m_j - n_i n_j). \quad (23)$$

Компоненты тензора напряжений на ребре (19) выражаются через собственные значения тензора активных напряжений и направляющие косинусы его главных осей следующим образом:

$$\sigma_{ij} = S_3 \delta_{ij} + k (\delta_{ij} - n_i n_j) + q e_{ij}^p. \quad (24)$$

Система уравнений (20), (21), (24) определяет поведение среды при напряженном состоянии, соответствующем ребру (19) поверхности нагружения. Функции $\psi_1, \psi_2, S_3, l_i, m_i, n_i$ характеризуют такое поведение среды.

Связь приращений этих функций с приращениями компонент тензора напряжений на рассматриваемом ребре можно получить из соотношений (14)-(18), если в них подставить B_3 вместо B_1 , B_4 вместо B_2 ; в (16) S_1 заменить на S_3 , k на $-k$; в (15) и (17) - l_i на m_i , m_i на n_i ; в (17) - a на c .

При напряженных состояниях, соответствующих ребрам поверхности нагружения, можно считать, что поворот собственных осей тензора активных напряжений происходит следующим образом: на ребре (8) поворот вектора l_i определяется соотношениями (17) и (18), а векторы m_i и n_i поворачиваются вместе с ним как жесткое целое. Аналогичным образом на ребре (20) определяется поворот вектора n_i , а векторы m_i и l_i поворачиваются вместе с ним как жесткое целое.

Уравнения, определяющие поведение среды, для напряженных состояний, которые не принадлежат области $S_1 \geq S_2 \geq S_3$, можно получить из приведенных выше круговой перестановкой индексов 1, 2, 3 у собственных значений тензора активных напряжений и соответствующей перестановкой собственных векторов l_i, m_i, n_i этого же тензора.

Для того чтобы завершить построение определяющих соотношений, необходимо конкретизировать определяющие приращения параметра истории свертки B, B_1, B_2, B_3, B_4 в формулах (6), (11), (12), (22) и (23).

В общем виде эти свертки могут быть определены с помощью принципа макродетерминизма [1] следующим образом.

Пусть ребро поверхности нагружения задано как пересечение граней

$$\begin{cases} f^{(1)}(\sigma_{ij}, e_{ij}^p, q) = 0; \\ f^{(2)}(\sigma_{ij}, e_{ij}^p, q) = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Ассоциированный закон течения на этом ребре имеет вид

$$de_{ij}^p = d\psi_1 \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \sigma_{ij}} + d\psi_2 \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (26)$$

Условия непрерывности изменения поверхности нагружения, тот факт, что точка нагружения принадлежит ребру (25), и ассоциированный закон течения (26) позволяют получить следующую связь между приращениями компонент тензора напряжений, параметрами $d\psi_i$ и $d\psi_2$, определяющими приращения компонент тензора пластических деформаций:

$$\begin{cases} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial e_{ij}^p} + \frac{\partial f^{(1)}}{\partial q} A_{ij} \right) \left(d\psi_1 \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \sigma_{ij}} + d\psi_2 \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \sigma_{ij}} \right) = 0; \\ \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \left(\frac{\partial f^{(2)}}{\partial e_{ij}^p} + \frac{\partial f^{(2)}}{\partial q} A_{ij} \right) \left(d\psi_1 \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \sigma_{ij}} + d\psi_2 \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \sigma_{ij}} \right) = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Рассмотрим два пути нагружения в пространстве напряжений, выходящих из ребра (25) поверхности нагружения. Один из них такой, что вдоль него $\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0$,

а $\frac{\partial f^{(2)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = \alpha(t) > 0$, т.е. он соответствует грани $f^{(2)}(\sigma_{ij}, e_{ij}^p, q) = 0$. Вдоль другого пути

$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = \varepsilon(t) > 0$, а $\frac{\partial f^{(2)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = \alpha(t) > 0$. Пусть $\varepsilon(t)$ принимает сколь угодно малые по-

ложительные значения. Согласно принципу макродетерминизма сколь угодно близким путям нагружения должны соответствовать сколь угодно близкие пути деформирования. Таким образом, если $\varepsilon(t) \rightarrow 0$, то $d\psi_1$, полученное при решении системы (27), тоже должно стремиться к нулю, а $d\psi_2$ должно быть положительным. Для того чтобы выполнялись эти условия, необходимо иметь

$$\left(\frac{\partial f^{(2)}}{\partial e_{ij}^p} + \frac{\partial f^{(2)}}{\partial q} A_{ij} \right) \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \sigma_{ij}} = 0. \quad (28)$$

Повторяя аналогичные рассуждения для второй из образующих ребро граней, получим

$$\left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial e_{ij}^p} + \frac{\partial f^{(1)}}{\partial q} A_{ij} \right) \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \sigma_{ij}} = 0. \quad (29)$$

Для ребра (8) поверхности (2) соотношения (28) и (29) приобретают вид

$$\begin{aligned} q + (k' + e_{ij}^p (l_i l_j - n_i n_j)) A_{st} (l_s l_t - m_s m_t) &= 0; \\ q + (k' + e_{ij}^p (l_i l_j - m_i m_j)) A_{st} (l_s l_t - n_s n_t) &= 0. \end{aligned}$$

С их помощью можно получить вид свертки B_1 и B_2 :

$$B_1 = -\frac{q}{k' + e_{ij}^p (l_i l_j - m_i m_j)}; \quad B_2 = -\frac{q}{k' + e_{ij}^p (l_i l_j - n_i n_j)}.$$

С помощью аналогичной процедуры можно получить свертки B_3 и B_4 для ребра (19)

$$B_3 = -\frac{q}{k' + e_{ij}^p (m_i m_j - n_i n_j)}; \quad B_4 = -\frac{q}{k' + e_{ij}^p (l_i l_j - n_i n_j)}.$$

Параметр истории q при переходе с грани поверхности нагружения на ребро должен изменяться непрерывно. Это условие позволяет получить следующий вид для свертки B :

$$B = -\frac{q}{k} \left(\frac{S_1 - S_2}{k' + e_{ij}^p (l_i l_j - m_i m_j)} + \frac{S_2 - S_3}{k' + e_{ij}^p (m_i m_j - n_i n_j)} \right).$$

Функция материала $k(q)$ может быть определена по данным эксперимента на чистое растяжение или на чистый сдвиг.

Рассмотрим процедуру определения $k(q)$ по данным эксперимента на чистое растяжение. Пусть отлична от нуля только компонента σ_{11} тензора напряжений. Тогда, исключив упругие составляющие компонент тензора деформаций, из диаграммы чистого растяжения можно получить зависимость $\sigma_{11} = f(e_{11}^p)$. В процессе чистого растяжения точка нагружения принадлежит ребру (8), соотношения (10) и (13) приобретают вид

$$f(e_{11}^p) = k + 1.5q e_{11}^p; \quad \frac{dk}{de_{11}^p} + 1.5e_{11}^p \frac{dq}{de_{11}^p} + q = 0.$$

Решениями этой системы уравнений будут следующие зависимости $k(e_{11}^p)$ и $q(e_{11}^p)$:

$$\begin{cases} k = f(e_{11}^p) - 3 f'(e_{11}^p); \\ q = 2 f'(e_{11}^p). \end{cases}$$

Исключая из этих зависимостей e_{11}^p , получим функцию материала $k(q)$, её вид зависит от аппроксимации начальной кривой $\sigma_{11} = f(e_{11}^p)$. В данной работе были использованы экспоненциальная, логарифмическая, степенная и линейная функции аппроксимации, их выбор продиктован свойствами кривой чистого растяжения. Эти аппроксимирующие функции и соответствующие им функции $k(q)$ представлены ниже:

$$f(e_{11}^p) = Ae_{11}^p + B + C \exp(De_{11}^p), \quad k(q) = \alpha \ln(q - 2A) + \beta q + \gamma;$$

$$f(e_{11}^p) = A \ln(e_{11}^p + 1) + B, \quad k(q) = A \ln q + 1.5q + \beta;$$

$$f(e_{11}^p) = A \sqrt{e_{11}^p + C} + B, \quad k(q) = \frac{A^2}{q} + B - 1.5q;$$

$$f(e_{11}^p) = Ae_{11}^p + B, \quad q = 2A, \quad k = -2A \max |e_i^p| \quad (i = 1, 2, 3).$$

В этих формулах α, β, γ - функции коэффициентов аппроксимирующей функции $f(e_{11}^p)$.

По предлагаемой теории был проведен численный эксперимент по следующим программам нагружения цилиндрических полых образцов осевой растягивающей силой и внутренним давлением: 1) пропорциональное нагружение; 2) нагружение образца осевой растягивающей силой за предел текучести до фиксированного значения, затем резкий излом траектории нагружения в пространстве главных напряжений на прямую догружения; 3) нагружение образца двухосным растяжением $\sigma_z = 2\sigma_\varphi$ до того же значения осевого напряжения, что и в случае 2), затем резкий излом с выходом на второй участок траектории, на котором параметр догружения принимал те же значения, что и в случае 2). Эта программа полностью повторяла программу натурных испытаний, проведенных на образцах из стали 12ХНЗА [2]. Для определения функции материала $k(q)$ были использованы степенная и логарифмическая аппроксимации $f(e_{11}^p)$. Различие результатов численных экспериментов для этих двух видов функции $k(q)$ оказалось незначительным. Максимальное расхождение результатов численного и натурального эксперимента не превышало 12%. На рисунке представлен характерный результат численного (сплошная кривая) и натурального (точки) экспериментов, проведенных по третьей программе. Здесь использованы следующие обозначения: σ_i — интенсивность касательных напряжений; ε_i — интенсивность сдвиговых деформаций; T — максимальное касательное напряжение; $\sigma'_2 = T\mu_\sigma$, где μ_σ — параметр Лоде. Верхняя кривая соответствует пропорциональному нагружению.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ключников В.Д. О законах пластичности для материалов с упрочнением // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 1. С. 59-63.
2. Жигалкин В.М., Усова О.М., Шемякин Е.И. Простое и сложное нагружение стали в условиях нормальных и низких температур // Физика прочности и пластичности : Сб.науч.тр. Л.: Наука, 1986. С. 129-141.
3. Кадашев Ю.И., Новожилов В.В. Теория пластичности, учитывающая остаточные напряжения // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 1. С. 78-89.