Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Лернер, Существенно нелокальные краевые задачи для уравнений эллиптического, параболического и гиперболического типов, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1999, выпуск 7, 178–180

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu223>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 14:43:37

Краткие сообщения

Дифференциальные уравнения

УДК 517.956

М.Е. Лернер

СУЩЕСТВЕННО НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО, ПАРАБОЛИЧЕСКОГО И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ

Ставятся краевые задачи, содержащие только нелокальные краевые условия и дополнительно заданные в граничной точке искомой функции.

В открытом квадрате D с вершинами в точках $O(0; 0)$, $A(0; 1)$, $B(1; 1)$, $C(1; 0)$ рассмотрим уравнения

$$Lu \equiv u_{xx} + u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0; \quad (1)$$

$$Mu \equiv u_y - u_{xx}a(x, y)u_x + c(x, y)u = 0; \quad (2)$$

$$Nu \equiv u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0; \quad (3)$$

$$a(x, y), b(x, y), c(x, y) \in C^0(\bar{D}).$$

Задача 1. Найти функцию $u(x, y)$ со свойствами:

- 1) $Lu \equiv 0$ в D ;
- 2) $u \in C^0(\bar{D}) \cap C^1[\bar{D} \setminus (O \cup A \cup B \cup C)] \cap C^2(D)$;
- 3) $u(1; y) - u(0, y) = \varphi_1(y)$, $0 \leq y \leq 1$, $\varphi_1(y) \in C^0[0; 1]$;
- 4) $u_x(1; y) - u_x(0, y) = \psi_1(y)$, $0 < y < 1$, $\psi_1(y) \in C^0(0; 1)$;
- 5) $u(x; 1) - u(x, 0) = \varphi_2(x)$, $0 \leq x \leq 1$, $\varphi_2(x) \in C^0[0; 1]$;
- 6) $u_y(x, 1) - u_y(x, 0) = \psi_2(x)$, $0 < x < 1$, $\psi_2(x) \in C^0(0; 1)$;
- 7) $u(0, 0) = u_0$.

Здесь $\varphi_1(y)$, $\psi_1(y)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_2(x)$ – заданные функции, u_0 – заданная константа, $\varphi_1(1) - \varphi_1(0) = \varphi_2(1) - \varphi_2(0)$ – условие согласования.

Теорема 1. Решение задачи 1 единственно, если $c(x, y) \leq 0$ в D .

Доказательство теоремы 1. Пусть $u(x, y)$ – решение однородной задачи 1, но $u(x, y) \not\equiv 0$ в D . Без ограничения общности можно считать $\max_{\bar{D}} u > 0$. В силу хорошо известного принципа максимума для эллиптических уравнений он не может достигаться в D и не может достигаться в точках O , A , B и C ввиду однородных для функции $u(x, y)$ краевых условий 3, 5 и 7.

1. Пусть $\max_{\bar{D}} u = u(0, y_0)$, $0 < y_0 < 1$. Тогда $u_x(0, y_0) < 0$ [2], а в силу однородного для функции $u(x, y)$ краевого условия 3 $\max_{\bar{D}} u = u(1, y_0)$ и $u_x(1, y_0) > 0$ [2], что вместе с предыдущим противоречит однородному краевому условию 4. К этому же противоречию придем, предположив, что $\max_{\bar{D}} u = u(1, y_0)$. Следовательно, $\max_{\bar{D}} u$ не может достигаться на $OA \cup BC$.

2. Пусть $\max_{\bar{D}} u = u(x_0, 0)$, $0 < x_0 < 1$. Тогда в силу [2] и однородного краевого условия 5 придем в противоречие с однородным краевым условием 6. Значит, $\max_{\bar{D}} u$ не может достигаться на $OC \cup AB$, а отсюда и предыдущего в $\bar{D}$. Следовательно, $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}$.

Задача 2. Найти функцию $u(x, y)$ со свойствами:

- 1) $Mu \equiv 0$ в D ;
- 2) $u \in C^0(\bar{D}) \cap C^1(\bar{D} \setminus \overline{OC}) \cap C^2(D)$;
- 3) $u(1; y) - u(0, y) = \varphi_1(y)$, $0 \leq y \leq 1$, $\varphi_1(y) \in C^0[0; 1]$;
- 4) $u_x(1; y) - u_x(0, y) = \psi(y)$, $0 < y < 1$, $\psi(y) \in C^0(0; 1)$;
- 5) $u(x; 1) - u(x, 0) = \varphi_2(x)$, $0 \leq x \leq 1$, $\varphi_2(x) \in C^0[0; 1]$;
- 6) $u(0, 0) = u_0$.

Здесь $\varphi_1(y)$, $\psi(y)$, $\varphi_2(x)$ – заданные функции, u_0 – заданная константа, $\varphi_1(1) - \varphi_1(0) = \varphi_2(1) - \varphi_2(0)$ – условие согласования.

Теорема 2. Решение задачи 2 единственно при $c(x, y) \geq 0$.

Доказательство теоремы 2. Пусть функция $u(x, y)$ – решение однородной задачи 2. Следовательно, она удовлетворяет однородным краевым условиям 1 – 6.

Предположим, что $u(x, y) \not\equiv 0$ в $\bar{D}$. Без ограничения общности можно считать $\max_{\bar{D}} u > 0$. Тогда в силу принципа максимума для параболических уравнений [2] он должен достигаться на $\overline{AO \cup OC \cup CB}$, а в силу однородных краевых условий 3, 5 и 6 он не может достигаться в точках O , A , B и C .

1. Пусть $\max_{\bar{D}} u = u(0, y_0)$, $0 < y_0 < 1$. Тогда $u_x(0, y_0) < 0$ [2] и в силу однородного краевого условия 3 $\max_{\bar{D}} u = u(1, y_0)$ и $u_x(1, y_0) > 0$ [2], что вместе с предыдущим противоречит однородному краевому условию 4. К этому же противоречию придем, предположив, что $\max_{\bar{D}} u = u(1, y_0)$, $0 < y_0 < 1$. Следовательно, $\max_{\bar{D}} u$ не может достигаться на $OA \cup CB$.

2. Пусть $\max_{\bar{D}} u = u(x_0, 0)$, $0 < x_0 < 1$. Тогда в силу однородного краевого условия 5 он должен достигаться в точке $(x_0, 1)$. Отсюда на основании сильного принципа максимума для параболических уравнений [2] $u(x, y) \equiv \text{const}$ в $\bar{D}$ и ввиду $u(0, 0) = 0$ должно быть $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}$, что приводит к противоречию с $u(x, y) \not\equiv 0$ в $\bar{D}$.

Из пп. 1 и 2 следует, что $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}$.

Задача 3. Найти функцию $u(x, y)$ со свойствами:

- 1) $Nu \equiv 0$ в D ;
- 2) $u \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D)$;
- 3) $u(1; y) + u(0, y) = \varphi_1(y)$, $0 \leq y \leq 1$, $\varphi_1(y) \in C^1[0; 1]$;
- 4) $u(x; 1) + u(x, 0) = \varphi_2(x)$, $0 \leq x \leq 1$, $\varphi_2(x) \in C^0[0; 1]$;
- 5) $u(0, 0) = u_0$.

Здесь $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(x)$ – заданные функции, подлежащие согласованию по непрерывности функции $u(x, y)$ в $\bar{D}$; u_0 – заданная константа.

Непосредственно можно убедиться, что справедливо следующее утверждение: для уравнения $u_{xy} = 0$ решение задачи 3 определяется формулой

$$u(x, y) = \frac{1}{2} [\varphi_1(y) + \varphi_2(x) - \varphi_1(0) - \varphi_2(0) + 2u_0]$$

при условиях согласования

$$\begin{aligned}\varphi_1(1) + \varphi_1(0) &= \varphi_2(1) + \varphi_2(0), \\ \varphi_1(1) - \varphi_1(0) - 2\varphi_2(0) + 4u_0 &= 0.\end{aligned}$$

Задачу 3, как и задачи 1 и 2, можно редуцировать к системе двух уравнений относительно следов искомой функции на двух смежных сторонах квадрата D .

Обзор работ по нелокальным краевым задачам содержится в [3] и др.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лернер М.Е. Две существенно нелокальные краевые задачи для уравнений эллиптического типа // Математическое моделирование и краевые задачи : Тр. восьмой межвуз. конф.. Самара, 1998. С. 63–67.
2. Ландис Е.М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971. 287 с.
3. Антоневич А.Б. Линейные функциональные уравнения. Операторный подход. Минск: Университетское, 1988. 231 с.