Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Козаченко, Подход к оптимальному проектированию индукционной системы на базе численных методов математического моделирования, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1999, выпуск 7, 188–190

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu226>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:34:47

УДК 517.977.5

Н.Н. Козаченко

ПОДХОД К ОПТИМАЛЬНОМУ ПРОЕКТИРОВАНИЮ ИНДУКЦИОННОЙ СИСТЕМЫ НА БАЗЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассматривается задача получения требуемой температуры в заданных зонах нагреваемой детали с помощью индукционного нагрева. Такие задачи возникают при необходимости разогрева торцов труб перед сваркой, нагрева подшипников перед съемом с вала, закалке шеек валов.

Процесс нагрева цилиндрических тел описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных электромагнитного поля и теплопроводности. Пространственная конфигурация такой системы позволяет рассматривать двумерную осесимметричную область.

Задача расчета электромагнитного поля формулируется уравнениями Максвелла:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{\delta} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}, \operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \bar{\delta} = \gamma \bar{E}, \operatorname{div} \bar{B} = 0, \operatorname{div} \bar{D} = \rho, \bar{B} = \mu \mu_0 \bar{H}, \bar{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \bar{E}, \quad (1)$$

где $\bar{H}$ - напряженность магнитного поля; $\bar{E}$ - напряженность электрического поля; $\bar{B}$ - магнитная индукция; $\bar{D}$ - электрическая индукция; $\bar{\delta}$ - плотность тока проводимости; γ - удельная проводимость проводника; μ - относительная магнитная проницаемость; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ - абсолютная магнитная проницаемость, Гн/м; ε - относительная диэлектрическая проницаемость; $\varepsilon_0 = 1/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^{19})$ - абсолютная диэлектрическая проницаемость вакуума, Ф/м; ρ - объемная плотность электрических зарядов.

С учетом ряда допущений (поле полагается квазистационарным, потери на гистерезис не учитываются из-за незначительности по сравнению с потерями от вихревых токов) и с учетом осевой симметрии уравнения (1) запишем для комплексной амплитуды векторного потенциала в виде

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\mu_a(r, z)} \frac{\partial \bar{A}(r, z)}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\mu_a(r, z)} \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{A}(r, z)}{\partial r} \right] - j\omega \bar{A}(r, z) - \bar{I}_0(r, z) = 0, \quad (2)$$

где $\bar{A}$ - векторный магнитный потенциал; $\bar{I}_0$ - плотность тока внешних источников; $\bar{B}$ - магнитная индукция; μ_a - абсолютная магнитная проницаемость среды; $\omega = 2\pi f$ - циклическая частота питающего тока; $j = \sqrt{-1}$ - мнимая единица.

Рассматриваемая область Q имеет границы S_1 и S_2 , на которых задаются граничные условия вида

$$\bar{A} = 0 \text{ при } S_1 \in S; \quad \frac{\partial \bar{A}}{\partial n} = 0 \text{ при } S_2 \in S.$$

Распространение тепла описывается уравнением теплопроводности

$$C(T) \gamma \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda(T) \operatorname{grad} T) + W. \quad (3)$$

Для конкретных задач уравнение в цилиндрических координатах можно записать в виде

$$C(T) \gamma \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial l} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial l} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\lambda(T) R \frac{\partial T}{\partial R} \right) + W(l, R, T), \quad (4)$$

где T - температура; R, l - радиальная и аксиальная координаты; C - удельная теплоемкость; γ - плотность; λ - теплопроводность; $W(l, R, t)$ - внутренние источники тепла, полученные в результате решения электромагнитной задачи (2).

Для однозначности задачи введем краевые условия:

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial l} \bigg|_{r=R} = \alpha(R) [T_c - T(R, t)], \quad \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial l} \bigg|_{l=L} = \alpha(l) [T_c - T(l, t)], \quad \frac{\partial T}{\partial r} \bigg|_{r=0} = 0.$$

Сложность формы заготовки не дает возможности описать аналитически процессы, происходящие в системе индуктор-загрузка. В таких задачах наибольшее распространение получил метод конечных элементов (МКЭ) [1-3].

Высокая инерционность тепловых процессов по сравнению с электромагнитными процессами позволяет решать тепловую и электромагнитную задачи отдельно.

Полученная таким образом математическая модель была использована для решения задачи поиска оптимальной конструкции индуктора для нагрева металлической детали, представленной на рис.1, в которой требуется нагреть точки: A(z_1, r_1) до температуры 180⁰С, B(z_2, r_2) – до 210⁰С, C(z_3, r_3) – до 300⁰С. Сложность контура не дает возможности описать аналитически процессы, происходящие в системе индуктор - нагрузка.

Цель оптимизации - минимизировать время нагрева и затраты энергии. Оптимизация проводилась по двум критериям: подбор конструкции индуктора и частоты питающего тока.

Нижний предел частоты 1кГц ограничен малыми размерами детали ($d_{max}=40\text{мм}$, $x_{max}=100\text{мм}$). При меньшей частоте глубина проникновения тока увеличивается и КПД индуктора недопустимо снижается [4].

За основу для оптимизации конструкции нагревателя был взят цилиндрический однослойный индуктор («а» на рис. 1), питающийся током при частоте 8кГц. В процессе подбора индуктора, рассматривались варианты: индуктор, состоящий из цилиндрической и конусной части («б» на рис. 1); двухслойный индуктор с несколькими витками во втором слое (1-5 витков от конца индуктора, «в» на рис.1). Такие конструкции индуктора не дали существенных результатов для улучшения процесса нагрева. По этой причине в дальнейшем исследовалось влияние заглубления загрузки и частоты питающего тока на затраты энергии. Результаты в виде графиков представлены на рис.2, 3.

Р и с. 1. Схема для решения задачи поиска оптимальной конструкции индуктора

Р и с. 2. Графики зависимости энергозатрат от частоты питающего тока

Р и с. 3. Графики зависимости времени нагрева от частоты питающего тока

На рис. 2 показаны графики зависимости энергозатрат системы, потребляемой установкой от частоты и заглубления (dz), где 1 - dz=25мм, 2 - dz=15мм, 3 - dz=35мм, 4 - dz=5мм, 5 - dz=-5мм, 6 - dz=-15мм. На рис. 3 представлены графики зависимости времени нагрева от частоты и заглубления, при dz=-15мм (кривая 1), dz=25мм (кривая 2). Кривые 1 и 2 приведены для граничных значений заглубления, так как зависимость времени нагрева от частоты при промежуточных значениях заглубления имеет аналогичный характер.

Из графиков видно, что наилучшие результаты по быстродействию и энергозатратам получены при заглублении dz=25мм. При увеличении частоты время нагрева уменьшается в 4 раза, но энергозатраты при этом увеличиваются. При нагреве на частоте 1кГц производительность установки снижается в четверо ($t_{нагр}=40,7\text{сек}$ при $f=1\text{кГц}$, $t_{нагр}=10,8\text{сек}$ при $f=8\text{кГц}$), а потребляемая мощность уменьшается почти в 5 раз ($P=4,3\text{кВт}$ и $P=19,95\text{кВт}$).

Таким образом, следует вывод, что наиболее эффективным является процесс нагрева на предельно низкой частоте 1кГц. При необходимости сохранения производительности на уровне можно использовать четыре таких установки. Такой вариант дает экономию энергозатрат 40,5кДж.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Немков В.С. Демидович В.Б. Теория и расчет устройств индукционного нагрева. Л.: Энергоатомиздат, 1988.
2. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986.
3. Норри Л., Ж де Фриз. Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981.
4. Слухоцкий А.Е. Установки индукционного нагрева. Л.: Энергоиздат, 1981.

УДК 62-40

Э.Я. Рапопорт, А.В. Сергеев

ЧЕБЫШЕВСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ АППРОКСИМАЦИИ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Проблема параметрического синтеза дробно-рациональной аппроксимации трансцендентных амплитудно-фазовых частотных характеристик объектов с распределёнными параметрами сводится к задаче минимизации ошибки равномерного приближения к нулю разности соответствующих характеристик мнимых частот на подходящем действительном отрезке. Предложенный метод синтеза базируется на чебышевских свойствах решения такой задачи и априорной информации в форме соответствующих характеристик. Приводится пример дробно-рациональной аппроксимации амплитудно-фазовой частотной характеристики объекта, описываемого уравнением теплопроводности.

При автоматизации сложных объектов управления часто возникает ситуация, когда адекватное описание динамики объекта можно дать только с помощью дифференциальных уравнений в частных производных. Амплитудно-фазовые частотные характеристики (АФЧХ) [1] таких объектов, получивших название объектов с распределёнными параметрами (ОРП), имеют сложный вид трансцендентной функции комплексного аргумента [2]. Анализ частотных характеристик в таком виде затруднён, в отличие от частотных характеристик объектов с сосредоточенными параметрами (ОСП), которые имеют вид дробно-рациональной функции комплексного аргумента [1].

Естественным образом возникает задача о приближённом представлении объекта с распределёнными параметрами в удобном для анализа виде объекта с сосредоточенными параметрами, т. е. возникает задача об аппроксимации АФЧХ ОРП некоторой дробно-рациональной функцией комплексного аргумента.

В роли критерия качества приближения естественно взять максимальное значение ошибки равномерного приближения

$$J(\Delta) = \max_{\omega} |S(j\omega, \Delta) - W(j\omega)|, \quad (1)$$

где $W(j\omega)$ - есть АФЧХ ОРП, а $S(j\omega, \Delta)$ - дробно-рациональная функция, заданная нами с точностью до размерности вектора неизвестных параметров $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1 \dots \Delta_n)$.

Задача наилучшего приближения формулируется как отыскание такого вектора параметров Δ , который бы минимизировал критерий (1):

$$J(\Delta) = \max_{\omega} |S(j\omega, \Delta) - W(j\omega)| \rightarrow \min_{\Delta}. \quad (2)$$

Решение непосредственно задачи (2) является сложной процедурой и требует большого объёма вычислений. Поэтому, используя аппарат вещественных интегральных δ -преобразований [3, 4], можно перейти в (2) от частотных характеристик к их аналогам в форме соответствующих вещественных изображений $S(\delta, \Delta)$ и $W(\delta)$, получивших название характеристик мнимых частот (ХМЧ) [3], путём простой формальной замены комплексного аргумента на действительную переменную δ . Кроме того, будем рассматривать приближение на конечном отрезке $[\delta_H, \delta_B]$. Тогда вместо (2) получаем более простую чебышевскую задачу минимизации ошибки равномерного приближения к нулю [5] на подходящем действительном отрезке разности соответствующих ХМЧ ОСП и ОРП:

$$J(\Delta) = \max_{\delta \in [\delta_H, \delta_B]} |S(\delta, \Delta) - W(\delta)| \rightarrow \min_{\Delta}. \quad (3)$$

Правомерность подобного перехода обосновывается однозначно устанавливаемой связью между амплитудно-фазовыми частотными характеристиками и ХМЧ системы [3], обеспечивающей необходимую