Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Дилигенский, Применение методов возмущений в теории производственных функций, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1999, выпуск 7, 204–206

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu232>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 13:22:09

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ВОЗМУЩЕНИЙ В ТЕОРИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Применены методы возмущений в теории производственных функций для решения задачи асимптотической идентификации факторных эластичностей.

Наиболее распространенными конструкциями для описания экономических процессов в макроагрегированных переменных являются производственные функции [1,2]. Далее для определенности рассмотрим производственные функции, зависящие от двух ресурсов, имея в виду, что суть предлагаемого подхода не зависит от числа определяющих параметров.

Введем следующие обозначения. В качестве входных воздействий возьмем основные фонды производства - $K(t)$ и трудовые ресурсы, используемые в производственном процессе, $L(t)$. Выходной величиной будем считать количество производственного продукта $Y(t)$. Тогда под производственной функцией F будем понимать оператор, отвечающий отображению входных воздействий $K(t) \in \hat{K}$ и $L(t) \in \hat{L}$ в выходную величину $Y(t) \in \hat{Y}$:

$$Y = F(K, L). \quad (1)$$

Положим, что функциональными пространствами $\hat{K}$, $\hat{L}$, $\hat{Y}$ и оператором F в (1) могут быть достаточно произвольные конструкции, отвечающие требуемой содержательной интерпретации.

Задачу нахождения производственной функции $Y = F(K, L)$ сформулируем как задачу построения оператора F , когда задана тройка элементов $Y(t)$, $K(t)$, $L(t)$ в соответствующих функциональных пространствах $\hat{K}$, $\hat{L}$, $\hat{Y}$. Далее в качестве функциональных пространств $\hat{K}$, $\hat{L}$, $\hat{Y}$ возьмем пространство $C^2[0, T]$ гладких дифференцируемых функций времени, имеющих всюду первую и вторую производные. Отображение F будем полагать всюду дифференцируемым по K и L .

Найдем асимптотическое представление, описывающее отображение исходных элементов K, L в Y в окрестности произвольной регулярной точки K^*, L^*, Y^* . Разлагая в окрестности точки $\{K^*, L^*\}$ отображения в двумерный ряд Тейлора по независимым переменным K и L и ограничиваясь двумя первыми членами разложения, запишем следующее представление:

$$F(K^* + \Delta K, L^* + \Delta L) = F(K^*, L^*) + \left. \frac{\partial F}{\partial K} \right|_{K=K^*, L=L^*} \Delta K + \left. \frac{\partial F}{\partial L} \right|_{K=K^*, L=L^*} \Delta L + o(\Delta K, \Delta L). \quad (2)$$

В формуле (2) член $o(\Delta K, \Delta L)$ отвечает величинам, асимптотически малым относительно $\Delta K, \Delta L \rightarrow 0$. Вводя в (2) обозначение $\Delta Y = F(K^* + \Delta K, L^* + \Delta L) - F(K^*, L^*)$, опуская для простоты записей символы у частных производных и пренебрегая асимптотически малыми членами, запишем следующее соотношение:

$$\Delta Y \cong \frac{\partial F}{\partial K} \Delta K + \frac{\partial F}{\partial L} \Delta L; \quad \Delta K, \Delta L \rightarrow 0. \quad (3)$$

Асимптотическое представление (3) далее будем полагать приближенным описанием отображения F в приращениях $\Delta K, \Delta L, \Delta Y$.

Осуществляя в (3) преобразование к относительным переменным путем деления (3) на Y , получим следующее представление:

$$\frac{\Delta Y}{Y} \cong \frac{K}{Y} \frac{\partial F}{\partial K} \times \frac{\Delta K}{K} + \frac{L}{Y} \frac{\partial F}{\partial L} \times \frac{\Delta L}{L}. \quad (4)$$

В формуле (4) коэффициентами пропорциональности между относительными приращениями ресурсов $\Delta K/K$, $\Delta L/L$ и выпуском продукции $\Delta Y/Y$ являются логарифмические функции чувствительности

$$\alpha = \frac{K}{Y} \frac{\partial Y}{\partial K}; \quad (5)$$

$$\beta = \frac{L}{Y} \frac{\partial Y}{\partial L}, \quad (6)$$

имеющие макроэкономический смысл факторных эластичностей выпуска продукции по отношению соответственно к материальным и трудовым ресурсам.

Переходя в (4) к дифференциалам, полагая равенство асимптотически точным при $\Delta Y, \Delta K, \Delta L \rightarrow 0$, уравнение (4) для характеристик производственной функции с использованием α и β запишем в виде

$$\frac{Y'}{Y} = \alpha \frac{K'}{K} + \beta \frac{L'}{L}. \quad (7)$$

В формуле (7) величины Y, K, L полагаются зависящими от времени, а f' означает $\frac{\partial f}{\partial t}$. При этом при произвольных временных зависимостях $Y(t), K(t), L(t)$ величины α и β будут также зависеть от времени.

Для этой ситуации проблема идентификации производственной функции F редуцируется к следующей задаче: для заданных временных функций $Y(t), K(t), L(t)$ найти эластичности производства $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, обеспечивающие выполнение соотношения (7). При такой формулировке задача отыскания двух неизвестных α и β из одного уравнения (7) не имеет единственного решения, и необходимы дополнительные соотношения, описывающие функциональную связь между характеристиками производственной функции.

Простейшим дополнительным предположением является принятие факторных эластичностей постоянными: $\alpha = const$ и $\beta = const$. При этом уравнение (7) непосредственно интегрируется и решением является широко известная функция Кобба-Дугласа [1,2]

$$Y = AK^\alpha L^\beta. \quad (8)$$

При стремлении получить возможную зависимость эластичностей α и β от времени в теории производственных функций обычно применяются дополнительные качественные соображения, вытекающие из макроэкономического анализа изучаемых процессов: слабая замещаемость одного вида ресурса другим, низкая эластичность выпуска по отношению к другому ресурсу и тому подобные ситуации [3]. Такие предположения несут в себе значительную долю субъективности, на стадии постановки формулируются предположения, которые затем обосновываются решениями, получаемыми из этих допущений, и такой подход не дает возможности корректно поставить задачу идентификации в общем виде.

Сформулируем, используя методы теории возмущений, задачу асимптотической идентификации характеристик $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ в модели (7). Введем следующее предположение. Будем считать, что факторные эластичности α и β , характеризующие технологический уровень производства, вообще говоря, изменяются с течением времени. При этом положим, что скорость изменения характеристик α и β существенно меньше, чем скорость изменения величин K, L, Y , характеризующих динамику протекания анализируемого реального производственного процесса.

С позиции методов возмущения будем считать, что процессы изменения величин K, L, Y протекают в реальном масштабе времени t , а характеристики α и β являются функциями медленного времени τ

[4,5]. Медленное время τ введем соотношением $\tau = \frac{t}{T}$, где T - характерный масштаб времени, отвечающий срокам реализации технологических изменений производственного процесса. Будем считать $T \gg 1$. Вводя величину, обратную временному масштабу, $\varepsilon = \frac{1}{T}$, где $\varepsilon \ll 1$, медленное время определим следующим образом:

$$\tau = t\varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 1. \quad (9)$$

На основе сделанного допущения соотношение (7) в двухмасштабном временном представлении запишем в следующем виде:

$$\bar{Y}'(t) = \alpha(t\varepsilon)\bar{K}'(t) + \beta(t\varepsilon)\bar{L}'(t). \quad (10)$$

В (10) для упрощения записей использовано представление $\bar{f}' = f'/f$. Соотношение (10) определяет функциональную связь искомых технологических характеристик $\alpha(t\varepsilon)$ и $\beta(t\varepsilon)$ с известными временными процессами $Y(t), K(t), L(t)$. Для отыскания двух неизвестных величин α и β соотношение (10) необходимо дополнить новой функциональной связью между характеристиками производственного процесса.

Дополнительное уравнение связи найдем, считая известными вторые производные динамических процессов $\bar{Y}'', \bar{K}'', \bar{L}''$. Выполняя дифференцирование в (10), группируя однопорядковые величины в

двухмасштабном временном представлении и ограничиваясь двумя первыми членами асимптотического разложения при $\varepsilon \rightarrow 0$, запишем

$$\bar{Y}''(t) = \alpha(t\varepsilon)\bar{K}''(t) + \beta(t\varepsilon)\bar{L}''(t) + \varepsilon(\alpha'(t\varepsilon)\bar{K}'(t) + \beta'(t\varepsilon)\bar{L}'(t)). \quad (11)$$

Выражение (11) отвечает уравнению связи между известными характеристиками $\bar{Y}''$, $\bar{K}''$, $\bar{L}''$ и искомыми величинами α и β , в котором присутствуют члены $o(1)$ и $o(\varepsilon)$. Пренебрегая в (11) при $\varepsilon \rightarrow 0$ величинами малости $o(\varepsilon)$ и полагая при этом равенство асимптотически точным, запишем следующее представление:

$$\bar{Y}''(t) = \alpha(t\varepsilon)\bar{K}''(t) + \beta(t\varepsilon)\bar{L}''(t). \quad (12)$$

Соотношения (10), (12) определяют систему двух уравнений относительно искомых характеристик - факторных эластичностей α и β . Разрешая её, получим следующие соотношения

$$\alpha = \frac{\bar{Y}'\bar{L}'' - \bar{Y}''\bar{L}'}{\bar{K}'\bar{L}'' - \bar{K}''\bar{L}'}, \quad (13)$$

$$\beta = \frac{\bar{K}'\bar{Y}'' - \bar{K}''\bar{Y}'}{\bar{K}'\bar{L}'' - \bar{K}''\bar{L}'}. \quad (14)$$

Выражения (13), (14) являются асимптотическими представлениями для факторных эластичностей α и β . Они справедливы для описания экономических ситуаций, характеризующихся более стабильными показателями технологического уровня производств $\alpha(t\varepsilon)$ и $\beta(t\varepsilon)$ по отношению к изменению динамических характеристик производственных процессов - $Y(t)$, $K(t)$, $L(t)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Иванов Ю.П., Лотов А.В.* Математические модели в экономике. М.: Наука, 1983.
2. *Петров А.А.* Экономика. Модели. Вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1996.
3. *Воронцова О.В., Иванов Ю.П., Колдаева Н.Т.* Некоторые вопросы теории и использования производственных функций. М.: ВЦ АН СССР, 1988.
4. *Найфэ А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976.
5. *Андрюханов А.В., Маневич И.В.* Асимптотология: идеи, методы, результаты. М.: Аслан, 1994.