Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Я. Рапопорт, М. Ю. Лившиц, Ю. Э. Плешивцева, Конечномерные приближения в одном классе задач оптимизации систем с распределенными параметрами, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1996, выпуск 4, 24–36

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu234>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 12:56:14

30. Фокин М. В. Об оценках решений некоторых краевых задач для уравнения колебания струны//Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1983. С. 151—154.
31. Кальменов Т. Ш., Садыбеков М. А. О задаче Дирихле и нелокальных краевых задачах для волнового уравнения//Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26, № 1. С. 60—65.
32. Кальменов Т. Ш. О регулярных краевых задачах и спектре для уравнений гиперболического и смешанного типов: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1982. 27 с.
33. Лернер М. Е. Принцип максимума модуля для систем уравнений с производными первого и высоких порядков в многосвязных областях//Уравнения неклассического типа. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1986. С. 88—92.
34. Сабитов К. Б. О принципе максимума для уравнений смешанного типа//Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24, № 11. С. 1967—1975.
35. Сабитов К. Б. Некоторые вопросы качественной и спектральной теории уравнений смешанного типа: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1992. 21 с.
36. Лернер М. Е. О двух новых качественных свойствах функции Римана//Докл. АН СССР. 1989. Т. 307, № 4. С. 807—811.
37. Лернер М. Е. О качественных свойствах функции Римана//Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 12. С. 2106—2120.
38. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука. 1973. 711 с.
39. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. М.: Гостехиздат, 1947. 192 с.
40. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1957. 442 с.
41. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 164 с.
42. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 449 с.
43. Бабич В. М., Капилевич М. Б. и др. Линейные уравнения математической физики. М.: Наука, 1964. 368 с.
44. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 295 с.
45. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Высш. школа, 1985. 304 с.
46. Салахитдинов М. С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: ФАН, 1974. 156 с.
47. Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа. Ташкент: ФАН, 1979. 180 с.
48. Моисеев Е. И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: МГУ, 1988. 150 с.
49. Кузьмин А. Г. Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газовой динамике. Л.: ЛГУ, 1990. 204 с.
50. Репин О. А. Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типа. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1992. 161 с.

УДК 519.31

Э. Я. РАПОПОРТ, М. Ю. ЛИВШИЦ, Ю. Э. ПЛЕШИВЦЕВА

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Устанавливается сходимость и предлагаются оценки погрешностей конечномерных приближений по методу Галеркина в одном классе задач оптимизации распределенных систем, описываемых линейными уравнениями в частных производных параболического типа.

Особенностью рассматриваемых задач является формулировка краевых условий на правом конце траектории в соответствующем бесконечномерном фазовом пространстве, предусматривающая выполнение априори фиксируемых требований в равномерной метрике по точности приближения результирующего состояния распределенной системы к заданному при управлении как исходной, так и аппроксимированной моделями объекта с удержанием (в последнем случае) любого конечного числа фазовых координат.

ВВЕДЕНИЕ

Многие известные методы численного решения задач оптимального управления объектами с распределенными параметрами (ОРП), описываемыми уравнениями в частных производных, используют различные способы аппроксимации возникающих здесь краевых задач, включая конечно-разностные и дифференциально-разностные схемы, методы конечных элементов и др. [1].

Наиболее естественный путь перехода к подобной упрощенной модели ОРП при возможности представления функции его состояния в характерной форме разложения в бесконечный сходящийся ряд Фурье по полной системе соответствующих собственных функций [1—5] состоит согласно общему методу Галеркина [6] в «усечении» этого ряда путем учета лишь конечного числа N первых его членов. Такая операция эквивалентна соответствующей конечномерной аппроксимации точного описания ОРП бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов указанного разложения [1—5].

Подобный подход оказывается тесно связанным с теорией сингулярно-возмущенных бесконечномерных систем, если в роли малого параметра рассматривать величину $\frac{1}{N}$, обратную числу удерживаемых гармоник [4]. На этом пути удается, в частности, использовать известные идеи приближенного агрегирования динамических моделей объектов для аналитического конструирования конечномерных оптимальных регуляторов [5], что позволяет распространить метод «усечения» на актуальные задачи синтеза замкнутых систем управления ОРП.

Традиционной и достаточно сложной проблемой при применении методов конечномерной аппроксимации является исследование сходимости итерационного процесса при $N \rightarrow \infty$ и оценок погрешности получаемых приближений по оптимизируемым функционалам качества и управляющим воздействиям в зависимости от величины N . Некоторые типичные задачи такого рода при аппроксимации моделей ОРП по методу Галеркина рассматривались, например, в работах [2—5]. Известные результаты получены в этом направлении, как правило, для случая квадратичных интегральных оценок отклонения конечного состояния ОРП от требуемого, вычисляемых для каждого N по соответствующей конечномерной модели ОРП, что приводит при описании в этих терминах краевых условий к возникновению на каждом шаге итерационной процедуры дополнительной зависящей от N погрешности по точности приближения к заданному результирующему распределению [3].

Существенный интерес представляют менее изученные подобные задачи с подвижным правым концом траектории при использовании характерных чебышевских оценок отклонения функции состояния ОРП в конце оптимального процесса от заданной точки в соответствующем функциональном пространстве [7, 8], рассматриваемые в условиях сохранения требований по допустимой величине этого отклонения в равномерной метрике при управлении «усеченной» моделью объекта для всех рассматриваемых значений N [9].

В данной ситуации на любом шаге итерационного процесса без погрешностей удовлетворяются исходные краевые условия по точности приближения к требуемому конечному состоянию ОРП, оцениваемой в

нормах, наиболее адекватных потребностям достаточно широкого круга прикладных задач [9]. Именно указанное обстоятельство позволяет ограничиться здесь анализом качества конечномерных приближений только по соответствующим потерям оптимизируемых функционалов.

В настоящей работе исследуются в указанной постановке вопросы сходимости и предлагаются конструктивные способы вычисления верхних оценок погрешностей конечномерных приближений для ряда модельных процессов оптимального управления распределенными системами, описываемыми уравнениями в частных производных параболического типа.

1. Постановка задачи оптимального быстрогодействия

Рассмотрим характерную задачу оптимального по быстродействию управления ОРП, функция состояния которого $\Theta(l, t)$ в зависимости от пространственной координаты $l \in [0, 1]$ и времени $t \in [0, t_0]$ описывается параболическим уравнением в частных производных с линейным дифференциальным оператором при соответствующих краевых условиях [1—3, 8]. В качестве математической модели такого объекта используем его эквивалентное представление в виде бесконечной системы уравнений первого порядка

$$\frac{dz_m}{dt} = -\mu_m^2 z_m + b_m f_m(u) + g_m(t), \quad z_m(0) = z_m^0, \quad t \in [0, t_0] \quad (1)$$

$$m = 1, 2, \dots$$

относительно коэффициентов (временных мод) $z_m(t)$ разложения $\Theta(l, t)$ в сходящийся ряд Фурье по собственным функциям $K(\mu_m l)$ соответствующей задачи Штурма—Лиувилля [1—4]:

$$\Theta(l, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m z_m(t) K(\mu_m l), \quad l \in [0, 1]. \quad (2)$$

Здесь μ_m — собственные числа; A_m — нормирующие множители, определяемые краевыми условиями; значения z_m^0 определяются разложением в ряд вида (2) известной функции $\Theta(l, 0)$ начального состояния ОРП; $u = u(t) \in E^1$ — кусочно-непрерывное управляющее воздействие, подчиненное ограничению

$$u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}, \quad (3)$$

где $u_{\min}$ и $u_{\max}$ — заданные величины; $g_m(t)$, $f_m(u)$ — известные кусочно-непрерывные функции своих аргументов, причем

$$|f_m(u)| \leq C_m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3')$$

для всех $u(t)$, удовлетворяющих неравенствам (3); b_m , C_m — заданные константы.

Необходимо найти такое допустимое в условиях (3) управление $u^*(t)$, которое за минимально возможное время $t_0 = t^*_0$ обеспечивает для объекта (1) требуемую достижимую точность $\varepsilon > 0$ равномерного приближения конечного состояния $\Theta(l, t_0)$ к заданному $\Theta_k(l)$:

$$\max_{l \in [0, 1]} |\Theta(l, t_0) - \Theta_k(l)| \leq \varepsilon. \quad (4)$$

Используем далее для приближенного описания ОРП «усеченную» модель, ограничиваясь учетом конечного числа $N < \infty$ гармоник в (1):

$$\frac{dz_m}{dt} = -\mu_m^2 z_m + b_m f_m(u) + g_m(t), \quad z_m(0) = z_m^0, \quad t \in (0, t_{0N}),$$

$$m = \overline{1, N}. \quad (5)$$

В качестве приближенного решения сформулированной выше задачи оптимального быстрогодействия будем искать такое управляющее воздействие $u^*_N(t)$, удовлетворяющее ограничению (3), которое переводит конечномерный объект (5) в некоторую неизвестную априори точку $Z^N(t_{0N}) = (z_m(t_{0N}))$, $m = \overline{1, N}$, обеспечивающую выполнение требования (4) к конечному состоянию объекта (1) за минимально возможное время t^*_{0N} , причем $t^*_{0N} \geq t^*_0$ по определению t^*_0 . Тем самым осуществляется переход к поиску приближенных решений на существенно более простом классе управляющих воздействий, реализующих оптимальное по быстродействию управление конечномерной моделью (5) для всевозможных фиксированных конечных состояний $Z^N(t_{0N})$. Последующий выбор экстремального элемента на этом множестве должен производиться из условия выполнения основного ограничения (4) на допустимую величину чебышевской оценки отклонения результирующего распределения $\Theta(l, t_0)$ от заданного $\Theta_k(l)$, вычисляемой при точном описании ОРП бесконечной системой уравнений (1). Всюду далее предполагается, что искомые управления $u^*(t)$ и $u^*_N(t)$ существуют. Для целого ряда характерных ситуаций описанная задача поиска $u^*_N(t)$ легко параметризуется с помощью известных условий оптимальности, после чего сводится к специальной негладкой задаче математического программирования с основным ограничением вида (4), которая может быть решена методом, предложенным в [10]. Разработанные конструктивные алгоритмы обеспечивают возможность эффективного вычисления $u^*_N(t)$ указанным путем для достаточно широкого круга прикладных задач [9, 10].

Для оценки погрешностей получаемых приближений необходимо исследовать их сходимость к точным решениям при $N \rightarrow \infty$ и оценить потери по минимизируемому функционалу в зависимости от величины N . Существенной особенностью предлагаемого подхода к приближенному решению задачи оптимального по быстродействию управления ОРП является отсутствие погрешности в достижении требуемого, согласно (4), конечного состояния системы для всех рассматриваемых значений N в противовес традиционным схемам, согласно которым краевая задача для каждого N формулируется в рамках соответствующей конечномерной модели [1, 3], что приводит к возникновению допустимой ошибки по отклонению $\Theta(l, t_0)$ от $\Theta_k(l)$, зависящей от выбора N . Указанное обстоятельство порождает определенную специфику используемых ниже процедур вывода оценок для погрешностей приближенных решений задач оптимизации рассматриваемых систем с распределенными параметрами.

2. Эквивалентная задача минимаксной оптимизации

Подобно [10, 11] нетрудно показать, что для сформулированной выше задачи быстрогодействия минимальное время процесса при точном и приближенном моделировании ОРП бесконечной и «усеченной» системами (1) и (5) (соответственно t^*_0 и t^*_{0N}) является непрерывной строго убывающей функцией ε (соответственно $t^*_0(\varepsilon)$ и $t^*_{0N}(\varepsilon)$) на всем интервале изменения достижимых значений этой величины в (4).

На этом основании можно установить эквивалентность решений задач оптимального управления рассматриваемыми ОРП по критериям быстродействия и минимакса. Точнее, имеет место следующий результат [9, 11].

Пусть для ОРП, описываемого бесконечной системой уравнений (1), требуется найти допустимое в условиях (3) управляющее воздействие $u^{**}(t)$, минимизирующее за фиксированное время $t_0 = t^{**}_0 \leq t^*_0(\varepsilon_{\text{inf}})$ функционал

$$I(t^{**}_0, u) = \max_{l \in [0, 1]} |\Theta(l, t^{**}_0) - \Theta_k(l)| \rightarrow \min_u, \quad (6)$$

где ε_{inf} — точная нижняя граница достижимых значений ε в (4) [8—10]. Тогда искомое управление $u^{**}(t)$ совпадает с оптимальным по быстродействию $u^*(t)$ в задаче (1)—(4) при $\varepsilon = \varepsilon^*$, где ε^* — минимальный корень уравнения $t^*_0(\varepsilon) = t^{**}_0$, и, следовательно, $I(t^{**}, u^{**}) = \varepsilon^*$. Пусть далее требуется на множестве управляющих воздействий $u_N(t)$ для конечномерной модели (5), реализующих за минимальное время всевозможные заданные конечные состояния объекта в соответствующем N -мерном фазовом пространстве, найти управление $u_N^{**}(t)$, минимизирующее в условиях (3) за фиксированное время $t_{0N} = t^{**}_{0N} \leq t^*_{0N}(\varepsilon_{\text{inf}})$ функционал

$$I_N(t^{**}_{0N}, u_N) = \max_{l \in [0, 1]} |\Theta(l, t^{**}_{0N}) - \Theta_k(l)| \rightarrow \min_{u_N}. \quad (7)$$

Тогда аналогичным образом получаем, что $u_N^{**}(t)$ совпадает с оптимальным по быстродействию управлением $u^*_N(t)$ для такого конечного состояния объекта (5), при котором выполняется равенство $\varepsilon = \varepsilon^*_N$ в (4), где ε^*_N — минимальный корень уравнения $t^*_{0N}(\varepsilon) = t_{0N}^{**}$, и, следовательно, $I_N(t^{**}_{0N}, u_N^{**}) = \varepsilon^*_N$.

Введем следующие обозначения:

$$I^0 = I^0(t^{**}_0) = I(t^{**}_0, u^{**}) = \min_{u \in [u_{\text{min}}, u_{\text{max}}]} I(t^{**}_0, u),$$

$$I^0_N = I^0_N(t^{**}_{0N}) = I_N(t^{**}_{0N}, u_N^{**}) = \min_{u_N \in [u_{\text{min}}, u_{\text{max}}]} I_N(t^{**}_0, u_N).$$

Полагая $t^{**}_0 = t^{**}_{0N} = t_a$, найдем оценку неотрицательной в этих условиях (по определению I^0) разности $I^0_N - I^0 \geq 0$. Согласно (6), (7) и (2), будем иметь:

$$I^0_N = \max_{l \in [0, 1]} \left| \sum_{m=1}^{\infty} A_m K(\mu_m l) [z^N_{0m} - z^*_{0m}] \right|, \quad (8)$$

$$I^0 = \max_{l \in [0, 1]} \left| \sum_{m=1}^{\infty} A_m K(\mu_m l) [z_{0m} - z^*_{0m}] \right|, \quad (9)$$

где z^N_{0m} и z_{0m} — значения $z_m(t_a)$ при управлениях $u_N^{**}(t)$ и $u^{**}(t)$ соответственно, а z^*_{0m} — коэффициенты разложения в ряд Фурье по функциям $K(\mu_m l)$ заданной функции $\Theta_k(l)$ конечного состояния ОРП в (4).

На классе управляющих воздействий $u_N(t)$ выделим управление $\tilde{u}_N(t)$, $0 \leq t \leq t_a$, при котором достигается конечное состояние $\tilde{z}_m = z_m(t_a)$, $m = 1, 2, \dots$ для ОРП, совпадающее по первым N гармоникам для «усеченной» модели (5) с конечным состоянием полной системы (1) при оптимальном управлении $u^{**}(t)$:

$$\tilde{z}_m = z_{0m}; \quad m = \overline{1, N}. \quad (10)$$

Управляемость объекта (5) в классе воздействий $u_N(t)$ по конечной точке (10) гарантируется существованием $u^{**}(t)$.

Поскольку $I^0_N \leq I_N(t_a, \tilde{u}_N)$ по определению I^0_N , то в силу (8)–(10) получаем

$$\begin{aligned} 0 \leq I^0_N - I^0 \leq I_N(t_a, \tilde{u}_N) - I^0 &= \max_{l \in [0, 1]} \left| \sum_{m=1}^{\infty} A_m K(\mu_m l) [\tilde{z}_m - \right. \\ &\left. - z^*_m] \right| - \max_{l \in [0, 1]} \left| \sum_{m=1}^{\infty} A_m K(\mu_m l) [z_{0m} - z^*_m] \right| \leq \max_{l \in [0, 1]} \left| \sum_{m=1}^{\infty} A_m \times \right. \\ &\left. \times K(\mu_m l) [\tilde{z}_m - z_{0m}] \right| = \max_{l \in [0, 1]} \left| \sum_{m=N+1}^{\infty} A_m K(\mu_m l) [\tilde{z}_m - z_{0m}] \right|. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя здесь для вычисления $\tilde{z}_m$ и z_{0m} известные решения системы уравнений (1) при произвольном кусочно-непрерывном управлении $u(t)$

$$z_m(t) = z^0_m e^{-\mu_m^2 t} + \int_0^t e^{-\mu_m^2(t-\tau)} g_m(\tau) d\tau + \int_0^t e^{-\mu_m^2(t-\tau)} b_m f_m(u) d\tau, \quad (12)$$

$$m = 1, 2, \dots,$$

приведем оценку (11) с учетом ограничения на $|f_m(u)|$ по (3) к следующему виду:

$$\begin{aligned} 0 \leq I^0_N - I^0 &\leq \max_{l \in [0, 1]} \left| \sum_{m=N+1}^{\infty} A_m K(\mu_m l) [\tilde{z}_m - z_{0m}] \right| \leq \\ &\leq \max_{l \in [0, 1]} \sum_{m=N+1}^{\infty} \left| A_m b_m K(\mu_m l) \left| \int_0^{t_a} e^{-\mu_m^2(t_a-\tau)} |f_m(\tilde{u}_N(\tau)) - \right. \right. \\ &\left. \left. - f_m(u^{**}(\tau))| d\tau \right| \right| \leq \max_{l \in [0, 1]} \sum_{m=N+1}^{\infty} 2 \left| \frac{A_m b_m C_m}{\mu_m^2} K(\mu_m l) \right|. \end{aligned} \quad (13)$$

Ввиду сходимости ряда (2) при любом кусочно-непрерывном управлении, удовлетворяющем ограничению (3), находим, что здесь

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\max_{l \in [0, 1]} \sum_{m=N+1}^{\infty} 2 \left| \frac{A_m b_m C_m}{\mu_m^2} K(\mu_m l) \right| \right] = 0 \quad (14)$$

и, следовательно, в силу (13), (14) имеет место сходимость рассматриваемых конечномерных приближений по оптимизируемому функционалу качества

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (I^0_N - I^0) = 0. \quad (15)$$

Теорема 1. Последовательность управляющих воздействий $\{u^{**}_N(t)\}$, $N = 1, 2, \dots$ при $t^{**}_{0N} = t^{**}_0$ является минимизирующей для функционала качества (6). Оценка сверху погрешности приближения к минимальному значению критерия оптимальности для любого конечного значения N определяется неравенством (13):

$$0 \leq I^0_N - I^0 \leq \delta_N = \max_{l \in [0, 1]} \sum_{m=N+1}^{\infty} 2 \left| \frac{A_m b_m C_m}{\mu_m^2} K(\mu_m l) \right|. \quad (16)$$

3. Конечномерные приближения в задаче быстрогодействия

Пусть $u^*_{N1}(t)$, t^*_{0N1} и $u^*_{N2}(t)$, t^*_{0N2} — приближенные решения и соответствующие им длительности процессов управления ОРП в сформулированной выше задаче быстрогодействия для различных достижимых значений ε в (4), равных соответственно ε_1 и ε_2 , где будем далее считать $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ и, следовательно, $t^*_{0N2} < t^*_{0N1}$. Тогда согласно сказанному в п. 2, получим для эквивалентных задач на минимум функционала (7) при $t^{**}_{0N} = t^*_{0N1}$ и $t^{**}_{0N} = t^*_{0N2}$

$$I_N(t^*_{0N1}, u^*_{N1}) = I^0_N(t^*_{0N1}) = \varepsilon_1; I_N(t^*_{0N2}, u^*_{N2}) = I^0_N(t^*_{0N2}) = \varepsilon_2, \quad (17)$$

откуда по теореме 1 имеют место следующие оценки для точных величин минимакса $I^0(t^*_{0N1})$ и $I^0(t^*_{0N2})$ в соответствующих задачах минимизации функционала (6) за время $t^{**}_0 = t^*_{0N1}$ и $t^{**}_0 = t^*_{0N2}$ при управлении объектом (1):

$$\varepsilon_1 - \delta_N = I^0_N(t^*_{0N1}) - \delta_N \leq I^0(t^*_{0N1}) \leq I^0_N(t^*_{0N1}) = \varepsilon_1, \quad (18)$$

$$\varepsilon_2 - \delta_N = I^0_N(t^*_{0N2}) - \delta_N \leq I^0(t^*_{0N2}) \leq I^0_N(t^*_{0N2}) = \varepsilon_2. \quad (19)$$

Из соотношений (18) и (19), в свою очередь, следуют неравенства

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \delta_N &= I^0_N(t^*_{0N2}) - I^0_N(t^*_{0N1}) - \delta_N \leq I^0(t^*_{0N2}) - \\ &- I^0(t^*_{0N1}) \leq I^0_N(t^*_{0N2}) - I^0_N(t^*_{0N1}) + \delta_N = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 + \delta_N, \end{aligned} \quad (20)$$

где всегда можно считать, что $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \delta_N > 0$ для всех конечных значений N , выбирая надлежащим образом величины ε_1 и ε_2 .

Так как аналогично (17) $I^0(t^*_{01}) = I^0_N(t^*_{0N1}) = \varepsilon_1$, где t^*_{01} — точная величина оптимального времени процесса в задаче быстрогодействия при $\varepsilon = \varepsilon_1$ в (4), то на основании (18) будем иметь

$$0 \leq I^0(t^*_{01}) - I^0(t^*_{0N1}) \leq \delta_N. \quad (21)$$

В свою очередь, полагая

$$I^0_N(t^*_{0N2}) - I^0_N(t^*_{0N1}) = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 2\delta_N, \quad (22)$$

где без потери общности дальнейших выводов будем считать, что $\max_l |\Theta(l, 0) - \Theta_k(l)| > 2\delta_N$, получим в силу (20)

$$\delta_N \leq I^0(t^*_{0N2}) - I^0(t^*_{0N1}) \leq 3\delta_N. \quad (23)$$

На основании сказанного в п. 2 можно утверждать, что зависимости $I^0(t^*_0)$ и $I^0_N(t^*_{0N})$ представляют собой непрерывные строго убывающие функции своих аргументов на интервале $[t^*_{0N2}, t^*_{0N1}]$. Сравнивая теперь неравенства (21) и (23), найдем, что в таком случае

$$t^*_{0N2} \leq t^*_{01} \leq t^*_{0N1}, \quad (24)$$

и, следовательно,

$$0 \leq t^*_{0N1} - t^*_{01} \leq t^*_{0N1} - t^*_{0N2}. \quad (25)$$

Переходя здесь к пределу при $N \rightarrow \infty$, получим, что $\lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N = 0$ согласно теореме 1, $\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_1$ в соответствии с условием (22), $t^*_{0N2} \rightarrow t^*_{0N1}$ по определению t^*_{0N1} и из неравенств (25) следует предельное соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (t_{0N}^* - t_{01}^*) = 0, \quad (26)$$

свидетельствующее о сходимости рассматриваемых конечномерных приближений для задачи быстрогодействия.

Теорема 2. Последовательность управляющих воздействий $\{u_N^*(t)\}$, $N=1, 2, \dots$ является минимизирующей для задачи оптимального управления ОРП (1) по критерию быстрогодействия. Оценка сверху погрешности приближения к минимальному времени процесса при любом конечном значении N определяется неравенствами (25), где значения t_{0N1}^* и t_{0N2}^* соответствуют для каждого N управлениям $u_{N1}^*(t)$ и $u_{N2}^*(t)$, первое из которых находится при заданном $\varepsilon = \varepsilon_1$ в (4), а второе — при $\varepsilon = \varepsilon_2 = \varepsilon_1 + 2\delta_N$.

4. Некоторые обобщения

Рассмотрим для ОРП (1)–(4) задачу на минимум функционала более общего вида

$$J(u) = \int_0^{t_a} F(Z, u) dt \rightarrow \min_{u(t)}, \quad (27)$$

где $Z = (z_m)$, $m=1, 2, \dots$ и $F(Z, u)$ — заданная непрерывная функция своих аргументов.

Нетрудно видеть, что при соответствующем выборе F функционал (27) сводится к рассмотренным выше критериям быстрогодействия и минимакса.

Требуется определить стесняемое ограничением (3) управляющее воздействие $u_{\text{opt}}(t)$, обеспечивающее перевод объекта (1) из заданного начального состояния $Z^0 = (z_m^0)$ в требуемое конечное, согласно (4) за время $t_0 = t_a$ при минимальном значении критерия оптимальности (27).

Аналогично предыдущему, в качестве приближенного решения задачи будем рассматривать стесняемое ограничением (3) управляющее воздействие $u_{N\text{opt}}(t)$, переводящее объект (5) за время $t_{0N} = t_a$ из начального состояния $Z^N(0) = (z_m^0)$, где $m = \overline{1, N}$, в некоторое конечное ОРП, с минимально возможным значением функционала качества $J^N(t_{0N})$, при котором выполняется условие (4) для точной модели

$$J_N(u) = \int_0^{t_a} F(Z^N, u) dt \rightarrow \min_{u(t)}, \quad Z^N = (z_m), \quad m = \overline{1, N}. \quad (28)$$

Будем всюду считать, что функционалы (27), (28) имеют в точках $u = u_{\text{opt}}$ и $u = u_{N\text{opt}}$ отрицательные производные Гато по некоторым допустимым в условиях (3) направлениям h и h_N :

$$\frac{\partial J(u_{\text{opt}})}{\partial h} < 0, \quad \frac{\partial J_N(u_{N\text{opt}})}{\partial h_N} < 0. \quad (29)$$

Предположим далее, что аналогичные неравенства имеют место для производных Гато функционалов (6) и (7) по допустимым направлениям h' и h'_N :

$$\frac{\partial I(t_a, u_{\text{opt}})}{\partial h'} < 0, \quad \frac{\partial I_N(t_a, u_{N\text{opt}})}{\partial h'_N} < 0. \quad (30)$$

Тогда, подобно задаче быстрогодействия, нетрудно убедиться, что

$J(u_{\text{opt}}) = J^0$ и $J_N(u_{N\text{opt}}) = J^0_N$ являются непрерывными строго убывающими функциями соответственно $J^0(\varepsilon)$ и $J^0_N(\varepsilon)$ аргумента ε на всем интервале изменения достижимых значений ε в (4). Отсюда, в свою очередь, следует эквивалентность решений задач оптимизации ОРП как в точной, так и в приближенной постановках по минимаксным и рассматриваемым интегральным критериям оптимальности.

Действительно, если $u_{\text{opt}}(t)$ — решение задачи (1)–(4), (27) при $\varepsilon = \varepsilon_1$ в (4), то $I(t_a, u_{\text{opt}}) < \varepsilon$ для всех $\varepsilon > \varepsilon_1$ и, следовательно, в силу непрерывности зависимости $\Theta(l, t_0)$ от управляющего воздействия, для всякого $\varepsilon = \varepsilon_2 > \varepsilon_1$ в условиях (29) найдется управление $\tilde{u}(t)$, для которого $J(\tilde{u}) < J(u_{\text{opt}})$ при $I(t_a, \tilde{u}) \leq \varepsilon_2$. Отсюда следует, что $J^0(\varepsilon_2) < J^0(\varepsilon_1)$, причем в условиях (30) подобно [10] устанавливается непрерывность монотонно убывающей функции $J^0(\varepsilon)$.

Теперь очевидно, что $I(t_a, u_{\text{opt}}) = \min_u I(t_a, u) = I^0(t_a) = \varepsilon^*$ в условиях $J(u) \leq J^*$, где $J^* = J^0(\varepsilon^*)$, для всех достижимых значений $\varepsilon = \varepsilon^*$ в (4) и значит, $u_{\text{opt}}(t)$ совпадает с управлением $u^{**}(t)$, минимизирующим функционал (6) за время $t_0^{**} = t_a$ при дополнительном ограничении

$$J(u) - J^* \leq 0, \quad J^* = J^0(\varepsilon^*). \quad (31)$$

Совершенно аналогично показывается, что $u_{N\text{opt}}(t)$ совпадает с управлением $u^{**}_N(t)$, минимизирующим за время $t_{0N} = t_a$ функционал (7) на множестве управляющих воздействий $u_N(t)$, оптимальных по критерию (28) для всевозможных конечных состояний объекта (5) при ограничении

$$J_N(u) - J^*_N \leq 0, \quad J^*_N = J^0_N(\varepsilon^*). \quad (32)$$

При этом зависимости $J^0(J^*)$, $J^0_N(J^*_N)$ так же, как $J^0(\varepsilon)$ и $J^0_N(\varepsilon)$, являются непрерывными, строго убывающими функциями своих аргументов.

Ограничимся далее рассмотрением некоторых частных случаев. Пусть в (27) $F(Z, u) \equiv F(P(\Theta(l, t)))$ есть непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов, где P — некоторый оператор, заданный на множестве функций состояния ОРП таким образом, что он определяется в силу разложения (2) в виде сходящегося ряда с известными коэффициентами A^*_m :

$$P(\Theta(l, t)) = \sum_{m=1}^{\infty} A^*_m z_m(t). \quad (33)$$

Тогда подынтегральная функция в (27) не зависит явно от управления, а функционалы качества $J(u)$ и $J_N(u)$ при фиксированном времени процесса $t_0 = t_a$ задаются в следующей форме:

$$J(u) = \int_0^{t_a} F\left(\sum_{m=1}^{\infty} A^*_m z_m(t)\right) dt, \quad J_N(u) = \int_0^{t_a} F\left(\sum_{m=1}^N A^*_m z_m(t)\right) dt. \quad (34)$$

Если, например, $P(\Theta(l, t)) \equiv \Theta(l_1, t)$ для некоторой фиксированной точки $l_1 \in [0, 1]$, то здесь $A^*_m = A_m K(\mu_m l_1)$. В случае, когда P — оператор усреднения функции состояния на отрезке $[0, 1] \equiv l$, нетрудно найти $A^*_m = A_m K_1(\mu_m) / \mu_m$, где $-K_1(y) = K'(y)$. Поскольку $J_N(u_{N\text{opt}}) = J^0_N \leq J_N(u_{\text{opt}})$ и $J(u_{\text{opt}}) = J^0 \leq J(u_{N\text{opt}})$ по определению u_{opt} и $u_{N\text{opt}}$, то для разности $J^0_N - J^0$ получим:

$$J^0_N - J(u_{N\text{opt}}) \leq J^0_N - J^0 \leq J_N(u_{\text{opt}}) - J^0. \quad (35)$$

Подставляя сюда соответствующие выражения для J и J_N согласно (34), приведем неравенства (35) к виду

$$\begin{aligned} \int_0^{t_a} [F(\sum_{m=1}^N A^*_m z^N_{m,\text{opt}}(t)) - F(\sum_{m=1}^\infty A^*_m z^N_{m,\text{opt}}(t))] dt &\leq J^0_N - J^0 \leq \\ &\leq \int_0^{t_a} [F(\sum_{m=1}^N A^*_m z_{m,\text{opt}}(t)) - F(\sum_{m=1}^\infty A^*_m z_{m,\text{opt}}(t))] dt, \end{aligned} \quad (36)$$

где $z^N_{m,\text{opt}}(t)$, $m=1, N$, и $z_{m,\text{opt}}(t)$, $m=1, 2, \dots$ — траектории временных мод $z_m(t)$ функции состояния (2) при управлениях соответственно $u_{N\text{opt}}(t)$ и $u_{\text{opt}}(t)$. Используя здесь для дифференцируемой функции $F(y)$, $y \in S$ условие Липшица $|F(y_2) - F(y_1)| \leq D|y_2 - y_1|$, $\forall y_1, y_2 \in S$ с константой

$$D = \max_{y \in S} \left| \frac{dF(y)}{dy} \right|, \quad (37)$$

будем иметь вместо (36)

$$-D \int_0^{t_a} \left| \sum_{m=N+1}^\infty A^*_m z^N_{m,\text{opt}}(t) \right| dt \leq J^0_N - J^0 \leq D \int_0^{t_a} \left| \sum_{m=N+1}^\infty A^*_m z_{m,\text{opt}}(t) \right| dt, \quad (38)$$

откуда, в свою очередь, находим, что

$$|J^0_N - J^0| \leq \Delta_N, \quad \Delta_N = D \int_0^{t_a} \sum_{m=N+1}^\infty |A^*_m| \cdot \max_u |z_m(t)| dt. \quad (39)$$

Здесь $\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_N = 0$ и, следовательно, в силу (39) $\lim_{N \rightarrow \infty} |J^0_N - J^0| = 0$.

Теорема 3. Последовательность управляющих воздействий $\{u_{N\text{opt}}(t)\}$, $N=1, 2, \dots$ является минимизирующей для функционала качества $J(u)$ в (34) при фиксированном времени процесса $t_0 = t_a$. Оценка погрешности приближения к минимальному значению функционала J^0 для любого конечного значения N определяется неравенством (39).

Конкретные оценки для Δ_N легко получить, определяя $\max_u |z_m(t)|$ согласно (12) по аналогии с (13). В частности, для типичного случая $z^0_m = 0$; $g_m(t) \equiv 0$ $m=N+1, N+2, \dots$ будем иметь после простых вычислений

$$\Delta_N = D \sum_{m=N+1}^\infty \frac{1}{\mu^2_m} |A^*_m b_m C_m| \left(t_a - \frac{1}{\mu^2_m} (1 - e^{-\mu^2_m t_a}) \right). \quad (40)$$

Рассмотрим далее другой частный случай $F(Z, u) \equiv F(u)$, когда подынтегральная функция в (27) не зависит от Z . Пусть $u^{(1)\text{opt}}(t)$ и $u^{(2)\text{opt}}(t)$ — точные, а $u^{(1)N\text{opt}}(t)$ и $u^{(2)N\text{opt}}(t)$ — приближенные решения рассматриваемой задачи оптимизации для различных достижимых значений $\varepsilon = \varepsilon'$ и $\varepsilon = \varepsilon''$ в (4), где $\varepsilon'' > \varepsilon'$. Пусть далее $J^*_1 = J^0(\varepsilon')$, $J^*_2 = J^0(\varepsilon'')$ и $J^*_{N1} = J^0_N(\varepsilon')$, $J^*_{N2} = J^0_N(\varepsilon'')$ — соответствующие этим управлениям минимальные значения J^* и J^*_N функционалов (27) и (28) в соотношениях (31) и (32), где, следовательно, $J^*_1 > J^*_2$, $J^*_{N1} > J^*_{N2}$. Тогда для эквивалентных минимаксных задач на минимум функционала (7) с ограничениями (32) будем иметь подобно равенствам (17) для задачи быстрогодействия

$$I_N(t_a, u^{(1)}_{\text{Nopt}}) = I^0_N(J^*_{N1}) = \varepsilon', \quad I_N(t_a, u^{(2)}_{\text{Nopt}}) = I^0_N(J^*_{N2}) = \varepsilon''. \quad (41)$$

Поскольку в рассматриваемом случае $J(u) \equiv J_N(u)$, то, по существу, сохраняются одинаковые ограничения (31), (32) при точном и приближенном моделировании ОРП, что обеспечивает управляемость «усеченной» модели объекта по конечному состоянию (10) при существовании соответствующих точных решений $u^{(1)}_{\text{opt}}(t)$ и $u^{(2)}_{\text{opt}}(t)$. Тогда, повторяя выводы п. 2, опять находим для разностей $I^0_N(J^*_{N1}) - I^0(J^*_{N1})$ и $I^0_N(J^*_{N2}) - I^0(J^*_{N2})$ те же оценки вида (16), и, учитывая, что $I^0_N(J^*_N)$ и $I^0(J^*)$ — строго убывающие функции своих аргументов, по схеме доказательства теоремы 2 получаем следующее утверждение.

Теорема 4. Последовательность управляющих воздействий $\{u_{N\text{opt}}(t)\}$, $N=1, 2, \dots$ является минимизирующей для функционала качества (27) с подынтегральной функцией $F(u)$, не зависящей от вектора фазовых переменных ОРП (1). Оценка погрешности приближения к минимальному значению J^0 критерия оптимальности при любом конечном значении N определяется неравенствами

$$0 \leq J^0_N(\varepsilon') - J^0(\varepsilon') \leq J^0_N(\varepsilon') - J^0_N(\varepsilon''), \quad (42)$$

где $\varepsilon'' = \varepsilon' + 2\delta_N$.

5. Сходимость конечномерных приближений по управляющим воздействиям

Предположим далее, что точные и приближенные решения $u_{\text{opt}}(t)$ и $u_{N\text{opt}}(t)$, $N=1, 2, \dots$ рассмотренной выше задачи оптимизации ОРП (1) по критериям $J(u)$ и $J_N(u)$ достаточно общего вида (27), (28) (в рамках изученных в пп. 2—4 частных случаев) существуют на допустимом множестве U управляющих воздействий в классе функций ограниченной вариации с полными изменениями, не превышающими одного и того же числа M :

$$\bigvee_0^{t_a}(u_{\text{opt}}) \leq M, \quad \bigvee_0^{t_a}(u_{N\text{opt}}) \leq M = \text{const}. \quad (43)$$

Тогда, согласно теореме Хелли о выборе сходящейся подпоследовательности [12], можно выделить такую подпоследовательность $\{u_{N_r\text{opt}}\}$, которая поточно сходится к некоторой функции $u_*(t) \in U$ на всем интервале $[0, t_a] \ni t$:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_{N_r\text{opt}}(t) = u_*(t) \in U, \quad \bigvee_0^{t_a}(u_*) \leq M. \quad (44)$$

Поскольку $J_N(u) \rightarrow J(u)$ при $N \rightarrow \infty$ по определению J_N и последовательность $\{u_{N\text{opt}}(t)\}$ — минимизирующая для соответствующего критерия оптимальности в силу теорем 1—4, будем иметь для полунепрерывных снизу функционалов (27) и (28) с учетом (44)

$$J^0 \leq J(u_*) \leftarrow J_N(u_*) \leq \lim_{r \rightarrow \infty} J_N(u_{N_r\text{opt}}) = \lim_{N \rightarrow \infty} J_N(u_{N\text{opt}}) = J^0. \quad (45)$$

Отсюда следует, что $J(u_*) = J^0$ и, следовательно,

$$u_*(t) \equiv u_{\text{opt}}(t) \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \{u_{N\text{opt}}(t)\} = u_{\text{opt}}, \quad \forall t \in [0, t_a].$$

Таким образом, в условиях исходных предположений имеет место сильная сходимость последовательности приближенных решений $\{u_{N\text{opt}}(t)\}$ задачи оптимизации ОРП к оптимальному управлению $u_{\text{opt}}(t)$ для точной модели объекта.

Пример

Рассмотрим в качестве примера задачу оптимального по быстродействию управления температурным полем $\Theta(l, t)$ неограниченной пластины, описываемым одномерным линейным неоднородным уравнением теплопроводности при краевых условиях второго рода с требованиями (4) к конечному температурному состоянию [13].

В качестве управляющего воздействия выбирается линия переключения $l=u(t) \in [0, 1]$ на плоскости (l, t) с одного предельно допустимого уровня на другой пространственно-временного распределения $W_{\text{opt}}(l, t)$ мощности источников тепловыделения оптимальной кусочно-постоянной формы [13]:

$$W_{\text{opt}}(l, t) = \begin{cases} W_{\max}, & \forall (l, t): u(t) < l \leq 1; \\ W_{\min}, & \forall (l, t): 0 \leq l < u(t), \end{cases} \quad (46)$$

где $W_{\max}$ и $W_{\min}$ — заданные константы. Объект управления моделируется здесь следующей бесконечной системой уравнений вида (1) при $\mu_m = \pi \cdot m$; $b_m = \frac{1}{\mu_m}$; $f_m(u) = -\sin(\mu_m u)$; $W_{\max} = 1$; $W_{\min} = 0$ [13]:

$$\begin{cases} \frac{dz_0}{dt} = 1 - u(t) + g(t); & z_0(0) = 0; \\ \frac{dz_m}{dt} = -\mu_m^2 z_m - \frac{1}{\mu_m} \sin(\mu_m u) + \cos \mu_m \cdot g(t); & z_m(0) = 0, \\ & m = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (47)$$

а температурное поле представляется разложением вида (2) в ряд Фурье:

$$\Theta(l, t) = z_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\cos^2 \mu_m} z_m(t) \cos \mu_m l \quad (48)$$

при $A_m = \frac{2}{\cos^2 \mu_m}$; $K(\mu_m l) = \cos \mu_m l$.

При этом ограничения на управляющее воздействие (3) и (3') задаются неравенствами

$$0 \leq u(t) \leq 1; \quad |f_m(u)| \leq C_m = 1, \quad \forall m = 1, 2, \dots \quad (49)$$

Приближенные решения описанной задачи быстродействия $u_N^*(t)$ при учете наряду с z_0 лишь $N=1$ и $N=2$ гармоник ряда (48) могут быть получены в явной форме [13] с помощью стандартной процедуры принципа максимума Понтрягина [14] и последующего вычисления неизвестных параметров при заданном ϵ в (4) по методу [9, 10]. Показано, в частности, что при этом $u_N^*(t)$ на некотором промежутке $[0, t']$, $t' \leq t_0$ представляет собой обратную тригонометрическую функцию сложного аргумента, в роли которого фигурируют некоторые функции времени экспоненциального типа [13]. Верхняя оценка δ_N погрешности по функционалу (6) для эквивалентной минимаксной

задачи определяется для любого конечного N согласно (16) с помощью соответствующей дзета-функции Римана $\xi(y)$ от действительного аргумента y [15] ($\xi(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^y}$):

$$\delta_N = \max_{t \in [0, 1]} \sum_{m=N+1}^{\infty} 2 \left| \frac{A_m b_m C_m}{\mu^2 m} K(\mu m t) \right| = \frac{4}{\pi^3} \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{m^3} = \\ = \frac{4}{\pi^3} (\xi(3) - \sum_{m=1}^N \frac{1}{m^3}). \quad (50)$$

Отсюда, в частности, получаем $\delta_1=0,026$; $\delta_2=0,01$; $\delta_3=0,005$ [15]. Решая сформулированную задачу быстродействия при фиксированном N для заданного значения $\varepsilon=\varepsilon_1$ в (4) и для $\varepsilon=\varepsilon_2=\varepsilon_1+2\delta_N$, получим верхнюю оценку погрешности по времени оптимального процесса в виде неравенства (25).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бутковский А. Г. Теория оптимального уравнения системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с.
2. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
3. Плотников В. И. О сходимости конечномерных приближений (в задаче об оптимальном нагреве неоднородного тела произвольной формы)//Журн. вычислит. математ. и мат. физики. 1968. Т 8, № 1. С. 136—157.
4. Первозванский А. А., Гайцгори В. Г. Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация. М.: Наука, 1979. 342 с.
5. Первозванский А. А., Солонина Н. В. Субоптимальный конечномерный регулятор для объекта с распределенными параметрами. I. Детерминированная задача аналитического конструирования//Автоматика и телемеханика. 1984. № 4. С. 48—59.
6. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988. 352 с.
7. Коллатц Л., Крабс В. Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения. М.: Наука, 1978. 236 с.
8. Рапопорт Э. Я. Задача равномерного приближения при оптимизации распределенной системы, описываемой уравнением параболического типа//Сиб. мат. журнал. 1982. Т. 23, № 5. С. 168—191.
9. Рапопорт Э. Я. Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. М.: Металлургия, 1993. 279 с.
10. Рапопорт Э. Я. Чебышевские приближения в задачах параметрической оптимизации управляемых процессов. I—III//Автоматика и телемеханика. 1992. № 2, с. 60—67; № 3, с. 59—64; № 4, с. 49—56.
11. Рапопорт Э. Я. Точный метод в задачах оптимизации нестационарных процессов теплопроводности//Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. 1978. № 4. С. 137—145.
12. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 415 с.
13. Плешивцева Ю. Э., Каргов А. И., Гуцин Б. Л., Сипухин Р. И. Пространственно-временное управление процессами нестационарной теплопроводности//Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Технические науки. 1994. Вып. 1. С. 102—112.
14. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
15. Якке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1964. 344 с.