Общероссийский математический портал

О. А. Репин, Смешанная задача для нагруженного уравнения Геллерстедта с оператором М. Сайго в краевом условии, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2000, выпуск 9, 13–18

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu25>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 06:02:08

Дифференциальные уравнения

УДК. 517. 956

О.А. Репин

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА С ОПЕРАТОРОМ М.САЙГО В КРАЕВОМ УСЛОВИИ

Целью работы является доказательство существования единственного решения нелокальной задачи для нагруженного уравнения Геллерстедта. Краевое условие исследуемой задачи содержит линейную комбинацию обобщенных операторов дробного интегро-дифференцирования от следа искомой функции и ее нормальной производной на линии вырождения уравнения. Проблема разрешимости поставленной смешанной задачи с помощью преобразования Меллина эквивалентно сводится к вопросу разрешимости интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

Пусть D - конечная область евклидовой плоскости независимых переменных x и y , ограниченная характеристиками $AC: \xi = 0, BC: \eta = 1$, где

$$\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}, \quad \eta = x + \frac{2}{(m+2)}(-y)^{\frac{m+2}{2}}, \quad (1)$$

оператора

$$L(u) = u_{yy} - (-y)^m u_{xx}, \quad m = \text{const} > 0$$

и отрезком $AB: 0 \leq x \leq 1$ прямой $y=0$.

В области D рассмотрим линейное нагруженное интегро-дифференциальное уравнение Геллерстедта

$$L(u) - \mu(I_{0+}^{a,b,c} u(t,0))(x) = f(x,y), \quad \mu = \text{const}. \quad (2)$$

Здесь $(I_{0+}^{a,b,c} f)(x)$ - обобщенный оператор дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$, введенный в [1] (см. также [2] и [3]).

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n z^n}{(\gamma)_n n!};$$

$$(I_{0+}^{a,b,c}) = \frac{x^{-a-b}}{\Gamma(a)} \int_0^x (x-t)^{a-1} F\left(a+b-c; a; 1-\frac{t}{x}\right) f(t) dt, \quad (0 < x < 1, \alpha > 0, \beta, \eta \in C);$$

$$(I_{0+}^{a,b,c} f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{0+}^{a+n, b-n, c-n} f)(x), \quad (0 < x < 1, \alpha \leq 0, b, c \in C, n = [-\alpha] + 1).$$

В дальнейшем через I будем обозначать единичный интервал $(0,1)$, а через $\bar{D}$ - замыкание D . Отметим, что с исследованием задач оптимального управления агроэкосистемой и логическом законе изменения вязкоупругих свойств полимера за последние годы вновь повысился интерес к нагруженным уравнениям [4–9]. В [10–12] дано (общее) определение нагруженных интегральных, функциональных и дифференциальных уравнений. Приведем это определение.

Определение. Заданное в n -мерной области D евклидова пространства точек $z = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ уравнение $L(\omega) = f(z)$ называется нагруженным, если оно содержит некоторые операции от следа искомого решения $\omega = \omega(z)$ на принадлежащих замыканию $\bar{D}$ многообразиях размерности меньше n .

Заметим, что в [13–15] для уравнения (2) рассматривались задачи Гурса, Дарбу и задача А с краевым условием, включающим оператор $(I_{0+}^{a,b,c} f)(x)$.

Настоящая работа продолжает эти исследования.

Ниже под регулярным решением уравнения (2) в области D будем понимать функцию $u(x, y) \in C^2(D)$ и удовлетворяющую уравнению (2) в области D.

Задача А₁(смешанная задача). Найти регулярное в области D решение уравнения (2) из класса $C(\bar{D}) \cap C'(D \cup I)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{AC} = \varphi(\eta), \quad \eta \in \bar{I}; \quad (3)$$

$$A(I_{0+}^{a_1, b_1, c_1} u(t, 0))(x) + B(I_{0+}^{a_2, b_2, c_1} u_y(t, 0))(x) = C(I_{0+}^{a_3, b_3, c_1} \psi)(x), \quad x \in I, \quad (4)$$

где A, B, C - действительные числа, $B \neq 0$.

Будем предполагать, что

$$f(x, y) \in C'(D) \cap C^3(D), \quad \varphi(\eta), \psi(\eta) \in C'(\bar{I}) \cap C^2(I).$$

Пусть, как и принято, введены обозначения

$$\tau(x) = \lim_{y \rightarrow 0-0} u(x, y), \quad \nu(x) = \lim_{y \rightarrow 0-0} u_y(x, y).$$

Уравнение (2) и краевые условия (3), (4) в характеристических координатах (1) принимают вид

$$EV = V_{\xi\eta} + \frac{\beta}{\eta - \xi} (V_{\xi} - V_{\eta}) = \frac{-1}{(\eta - \xi)^{4\beta}} [\mu(I_{0+}^{a,b,c} \tau)(\xi) + F(\xi, \eta)], \quad (6)$$

$$\beta = \frac{m}{2m+4}, \quad 0 < \beta < \frac{1}{2};$$

$$V|_{\xi=0} = \varphi(\eta), \quad \eta \in \bar{I}; \quad (7)$$

$$A(I_{0+}^{a_1, b_1, c_1} \tau)(\xi) + B(I_{0+}^{a_2, b_2, c_1} \nu)(\xi) = C(I_{0+}^{a_3, b_3, c_1} \psi)(\xi). \quad (8)$$

$$V(\xi, \eta) = u\left[\frac{\xi + \eta}{2}, -\left(\frac{\eta - \xi}{2 - 4\beta}\right)^{1-2\beta}\right], \quad F(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \left(\frac{4}{m+2}\right)^{4\beta} f\left[\frac{\xi + \eta}{2}, -\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\beta} (\eta - \xi)^{1-2\beta}\right].$$

Имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а. Пусть при $m > 0$

$$a > 0, \quad b \leq \frac{2-m}{2+m}, \quad c < 1-a; \quad (9)$$

$$a_2, a_3 > 0, \quad a_1 > a_2, \quad a_3 > a_2, \quad b_1 - b_2 + 2\beta > 0, \quad c_1 + a_2 + 2\beta > 0, \quad b_3 - b_2 + 2\beta > 0 \quad (10)$$

и

$$-1 < a \leq 0, \quad b < c < \frac{2-m}{2+m}, \quad \text{если } 0 < m < 2.$$

Тогда задача А₁ всегда разрешима и притом единственным образом.

Доказательство. Предположим существование решения задачи Дарбу

$$\left[(\eta - \xi)^{2\beta} (V_{\eta} - V_{\xi})\right]_{\eta=\xi} = -\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta} \nu(\xi), \quad \xi \in I, \quad (11)$$

$$V|_{\xi=0} = \varphi(\eta), \quad \eta \in \bar{I} \quad (12)$$

для уравнения (2) в области $\Delta = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \eta < 1\}$, являющейся образом области D при преобразованиях (1). Тогда оно удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}
V(\xi, \eta) + \gamma_0 \mu \int_0^\xi d\xi_1 \int_{\xi_1}^\eta \frac{I_{0+}^{a,b,c}(\tau)}{(\eta_1 - \xi_1)^{4\beta}} H(\xi_1, \eta_1, \xi, \xi) d\eta_1 = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2\beta} \int_0^\xi v(\xi_1) [(\xi - \xi_1)(\eta - \xi_1)]^\beta d\xi_1 + \\
+ \int_0^\eta \left[\varphi'(\eta_1) + \beta \frac{\varphi_1(\eta_1)}{\eta} \right] H(0, \eta_1, \xi, \xi) d\eta_1 + \gamma_0 \int_0^\xi d\xi_1 \int_{\xi_1}^\eta \frac{F(\xi_1, \eta_1)}{(\eta_1 - \xi_1)^{4\beta}} H(\xi_1, \eta_1, \xi, \xi) d\eta_1,
\end{aligned} \quad (13)$$

где
$$\gamma_0 = -\frac{1}{4}(2-4\beta)^{4\beta}; \quad \gamma = \frac{\partial(\beta)}{\partial(2\beta)\partial(1-\beta)},$$

$H(\xi_1, \eta_1, \xi, \eta)$ - функция Грина - Адамара задачи (11) - (12) для оператора EV , определяемая формулой [16]

$$H(\xi_1, \eta_1, \xi, \eta) = \begin{cases} (\eta_1 - \xi_1)^\beta (\eta - \xi_1)^{-\beta} F(\beta, 1-\beta; 1; \sigma_1), & \eta_1 \geq \xi, \\ \gamma (\eta_1 - \xi_1)^{2\beta} (\xi - \xi_1)^{-\beta} (\eta - \eta_1)^{-\beta} F\left(\beta, \beta; 2\beta; \frac{1}{\sigma_1}\right), & \eta_1 \leq \xi, \end{cases}$$

$$\sigma_1 = \frac{(\xi - \xi_1)(\eta - \eta_1)}{(\eta_1 - \xi_1)(\eta - \xi)}.$$

Применив к обеим частям (8) оператор $(I_{0+}^{-a_2, -b_2, a_2+c_1} f)(x)$ и воспользовавшись формулой [1]–[3]

$$(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} (I_{0+}^{\gamma, \delta, \alpha+\eta} f)(t))(x) = (I_{0+}^{\alpha+\gamma, \beta+\delta, \eta} f)(x) (\gamma > 0),$$

определим функцию $v(\xi)$:

$$v(\xi) = -\frac{A}{B} \left(I_{0+}^{a_1-a_2, b_1-b_2, a_2+c_1} \tau \right)(\xi) + \frac{C}{B} \left(I_{0+}^{a_3-a_2, b_3-b_2, a_2+c_1} \psi \right)(\xi). \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13), после перехода в полученном выражении к пределу при $\eta \rightarrow \xi, 0 < \xi < 1$, получим интегральное уравнение относительно функции $\tau(\xi)$:

$$\tau(\xi) + \gamma_{11} \int_0^\xi \frac{(I_{0+}^{a,b,c} \tau) dt}{(\xi - t)^{4\beta-1}} + \gamma_{12} \int_0^\xi \frac{(I_{0+}^{a_3-a_2, b_3-b_2, a_2+c_1} \tau) dt}{(\xi - t)^{2\beta}} = g(\xi), \quad (15)$$

где
$$\gamma_{11} = \gamma \gamma_0 \mu e(1-\beta, 1-2\beta), \quad \gamma_{12} = \frac{A}{e} \frac{\gamma}{2} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2\beta},$$

$$\begin{aligned}
g(\xi) = \gamma_{13} \int_0^\xi \frac{(I_{0+}^{a_3-a_2, b_3-b_2, a_2+c_1} \psi) dt}{(\xi - t)^{2\beta}} + \gamma \xi^{-\beta} \int_0^\xi \left[\varphi'(t) + \beta \frac{\varphi(t)}{t} \right] t^{2\beta} (\xi - t)^{-\beta} dt + \\
+ \gamma_0 \gamma \int_0^\xi (\xi - t)^{-\beta} dt \int_t^\xi F(t, s) (s - t)^{-2\beta} (\xi - s)^{-\beta} ds, \\
\gamma_{13} = \frac{C}{B} \frac{\gamma}{2} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2\beta}.
\end{aligned} \quad (16)$$

В работе [14] был рассмотрен оператор

$$T(\tau(x)) = \int_0^x (x-t)^{1-4\beta} (I_{0+}^{a,b,c} \tau)(s) dt.$$

Доказано, что если $a > 0, b \leq \frac{2-m}{2+m}, c < 1-a$ при $m > 0$, то справедливо следующее представление:

$$T(\tau(\xi)) = \int_0^\xi s^{1-4\beta-b} K(\sigma) \tau(s) ds, \quad (17)$$

где
$$\sigma = \frac{\xi}{s}, \quad K(\sigma) = \frac{\partial(2-4\beta)}{\partial(2+ -4\beta)} (\sigma-1)_+^{1+a-4\beta} F(a+b, a+c; 2+a-4\beta; 1-\sigma).$$

$$z_+^l = \begin{cases} z^l, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

Если же $-1 < a \leq 0, b < c < 1-4\beta$ при $0 < m < 2$, то

$$T(\tau(\xi)) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\xi s^{1-4\beta-b} k(\sigma) \tau(s) ds. \quad (18)$$

Для получения формул (17), (18) была использована методика вычисления интегралов с помощью преобразования Меллина, разработанная в [17].

Аналогично исследованию оператора $T(\tau(x))$ рассмотрим оператор

$$T_1(\tau(\xi)) = \int_0^\xi \frac{(I_{0+}^{\alpha_1-a_2, b_1-b_2, a_2+c_1} \tau) dt}{(\xi-t)^{2\beta}}, \quad (19)$$

который после смены порядков интегрирования представим в виде

$$\begin{aligned} T_1(\tau(\xi)) &= \frac{1}{\Gamma(a_1-a_2)} \int_0^\xi \tau(s) ds \int_s^\xi ((\xi-t))^{-2\beta} t^{a_2+b_2-a_1-b_1} (t-s)^{a_1-a_2-1} \times \\ &\times F\left(a_1+b_1-a_2-b_2, -a_2-c_1; a_1-a_2; 1-\frac{s}{t}\right) dt. \end{aligned}$$

Известное свойство [18]

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = (1-z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta; \gamma; \frac{z}{z-1}\right)$$

гипергеометрической функции Гаусса дает право записать

$$\begin{aligned} T_1(\tau(\xi)) &= \frac{1}{\Gamma(a_1-a_2)} \int_0^\xi \tau(s) s^{a_2+b_2-a_1-b_1} ds \int_s^\xi (\xi-t)^{-2\beta} (t-s)^{a_1-a_2-1} \times \\ &\times F\left(a_1+b_1-a_2-b_2, a_1+c_1; a_1-a_2; \frac{s-t}{s}\right) dt. \end{aligned}$$

Произведя во внутреннем интеграле замену $t = \xi z$, $\sigma = \frac{\xi}{s}$, получим

$$\begin{aligned} T_1(\tau(\xi)) &= \frac{1}{\Gamma(a_1-a_2)} \int_0^\xi s^{1-2\beta} s^{b_2-b_1-1} \tau(s) ds \int_{\frac{1}{\sigma}}^1 (1-z)^{-2\beta} (\sigma z-1)^{a_1-a_2-1} \times \\ &\times F(a_1+b_1-a_2-b_2, a_1+c_1; a_1-a_2; 1-\sigma z) dz = \\ &= \frac{1}{\Gamma(a_1-a_2)} \int_0^\xi s^{b_2-b_1-2\beta} \tau(s) ds (\sigma)^{1-2\beta} \int_{\frac{1}{\sigma}}^1 (1-z)^{-2\beta} (\sigma z-1)^{a_1-a_2-1} \times \\ &\times F(a_1+b_1-a_2-b_2, a_1+c_1; a_1-a_2; 1-\sigma z) dz. \end{aligned}$$

Для вычисления внутреннего интеграла введем в рассмотрение функцию

$$K_1(\sigma) = \sigma^{1-2\beta} \int_0^\infty f_1(\sigma z) f_2(z) dz,$$

где $f_1(\sigma z) = (\sigma z-1)_+^{a_1-a_2-1} F(a_1+b_1-a_2-b_2, a_1+c_1; a_1-a_2; 1-\sigma z)$, $f_2(z) = (1-z)_+^{-2\beta}$.

Для нахождения $K_1(\sigma)$ воспользуемся преобразованием Меллина [17]:

$$f(x) \leftrightarrow f^*(s) = \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx.$$

Учитывая формулу [2]

$$x^\alpha \int_0^\beta f_1(xt) f_2(t) dt \leftrightarrow f_1^*(s+\alpha) f_2^*(1-s-\alpha+\beta),$$

имеем

$$K_1^*(s) = f_1^*(s+1-2\beta) f_2^*(2\beta-s).$$

Теперь, применяя последовательно формулы [17]

$$\begin{aligned} (x-1)_+^{c-1} F(a, b; c; 1-x) &\leftrightarrow \Gamma(c) \Gamma\left[\begin{matrix} 1+a-c-s, & 1+b-c-s \\ 1-s, & 1+a+b-c-s \end{matrix}\right]; \\ (\operatorname{Re} > 0, \operatorname{Re} s < 1 + \operatorname{Re}(a-c); & 1 + \operatorname{Re}(b-c)); \end{aligned} \quad (20)$$

$$(1-x)_+^{c-1} \leftrightarrow \Gamma(c) \Gamma \left[\begin{matrix} s \\ s+c \end{matrix} \right], (\operatorname{Re} c > 0, \operatorname{Re} s > 0),$$

находим

$$K_1^*(s) = \Gamma(a_1 - a_2) \Gamma(1 - 2\beta) \Gamma \left[\begin{matrix} b_1 - b_2 + 2\beta - s, c_1 + a_2 + 2\beta - s \\ 1 - s, a_1 + c_1 + b_1 - b_2 + 2\beta - s \end{matrix} \right].$$

Откуда, опираясь на (19), получим

$$K_1(\sigma) = \frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(1+a_1-a_2-2\beta)} (\sigma-1)_+^{a_1-a_2-2\beta} \times \\ \times F(a_1+b_1-a_2-b_2, a_1+c_1; 1+a_1-a_2-2\beta; 1-\sigma). \quad (21)$$

Тогда

$$T_1(\tau(\xi)) = \int_0^\xi s^{b_2-b_1-2\beta} K_1(\sigma) \tau(s) ds.$$

Далее, на основании (10), (19) и (20) можем записать

$$T_2(\psi(\xi)) = \int_0^\xi \frac{\left(I_{0+}^{a_3-a_2, b_3-b_2, a_2+c_1} \psi \right) dt}{(\xi-t)^{2\beta}} = \int_0^\xi s^{b_2-b_3-2\beta} K_2(\sigma) \psi(s) ds, \quad (22)$$

$$\text{где } K_2(\sigma) = \frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(1+a_3-a_2-2\beta)} (\sigma-1)_+^{a_3-a_2-2\beta} F(a_3+b_3-a_2-b_2, a_3+c_1; 1+a_3-a_2-2\beta; 1-\sigma). \quad (23)$$

Учитывая условия (5), соотношения (16) и (22), получаем

$$g(\xi) \in C(\bar{I}) \cap C^2(I).$$

Принимая во внимание (17) - (21) заключаем, что уравнение (15) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, которое однозначно и безусловно разрешимо в пространстве $C(\bar{I})$ и его решение $\tau(\xi) \in C^2(I)$.

Таким образом, задача A_1 эквивалентно редуцируется к задаче Дарбу для уравнения (2), единственное решение которой было получено в работе [14].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Saigo M. A certain boundary value problem for the Euler -Darboux equation // Math. Japan, 1980. Vol. 25. №2. P.211 - 220.
2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 668 с.
3. Репин О.А. Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. Саратов: Саратов. гос. ун-т, 1992. 161 с.
4. Елеев В.А. О некоторых краевых задачах для смешанных нагруженных уравнений второго и третьего порядка // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 2. С. 230-237.
5. Дженалиев М.Т. Об одной краевой задаче для линейного нагруженного параболического уравнения с нелокальными граничными условиями // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27. №10. С. 1825-1827.
6. Нахушев А.М., Кенетова Р.О., К проблеме математического моделирования социально-исторических и этнических процессов. Нальчик: Эль-фа, 1998. 171 с.
7. Нахушев А.М., Тхакахов Р.Б. О континуальных аналогах реологических уравнений состояния и логическом законе изменения вязкоупругих свойств полимера // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. АН. Майкоп: Меоты, 1995. Т.1. №2. С. 6-11.
8. Нахушев А.М. Об уравнениях состояния непрерывных одномерных систем и их аналогах в дробном исчислении // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. АН, 1994. Майкоп: из-во "Меоты". С.22 - 26.
9. Кереев А.А., Кумышев Р.М. О краевых задачах для нагруженного уравнения теплопроводности // Доклады Адыгской (Черкесской) Межд. АН. Майкоп: Меоты, 1996. Т.2. №1. С. 13-15.
10. Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегродифференциального уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12. №1. С. 103-108.
11. Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференциальные уравнения. 1982. Т.18. №1. С.72 - 81.
12. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференциальные уравнения. 1983. Т.19. №1. С.86 - 94.
13. Репин О.А. О задаче Гурса для нагруженного уравнения Геллерстедта // Дифференциальные уравнения и их приложения Тр. 2-ого Междунар. сем. Самара, 1988. С. 133 - 139.

14. *Virchenko N.A., Repin O.A.* On Darboux problem for the weighed Gellerstedts equation // Докл.: НАН Украины. 1996. №7. С.21 - 25.
15. *Репин О.А.* О смешанной задаче для вырождающегося нагруженного интегродифференциального уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения и их приложения: Тр. 3 -й междунар. конф. Саранск, 1998. С. 161 - 162.
16. *Gellerstedt S.* Sur une equation lineaire aux derivees partielles de type mixte. // Arciv Mat., Astr. Och Fisik, 1937. 25 A. 29. P. 1 -23.
17. *Маричев О.И.* Метод вычисления интегралов от специальных функций. Минск: Наука и техника, 1978. 310 с.
18. *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функции. Т1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.