Общероссийский математический портал

Е. А. Зарубин, Краевая задача для дифференциально-разностного уравнения эллипτικο-параболического типа третьего порядка, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2000, выпуск 9, 19–24

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu26>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 18:12:15

Е.А.Зарубин

**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ
ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА
ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**

Для уравнения смешанного эллиптико – параболического типа $Lu = H(x - \tau)u(x - \tau, y)$, $Lu = L^1u$ при $y > 0$, $Lu = L^2u$ при $y < 0$, $L^1u = u_{xxx}(x, y) - u_y(x, y)$, $L^2u = u_{xxx}(x, y) + u_{yy}(x, y)$ H – функция Хевисайда доказана однозначная разрешимость краевой задачи R в области $D = D_1 \cup D_2 \cup J$, где

$D_1 = \{(x, y) : x > 0, 0 < y \leq 1\}$, $D_2 = \bigcup_{k=0}^{+\infty} D_{2k}$, где D_{2k} – односвязная область, ограниченная отрезком $J_k = \{(x, y) : k\tau \leq x \leq (k+1)\tau, y = 0\}$ оси x и непрерывной "нормальной" кривой $\rho_k^2 = (x - (2k+1)\tau/2)^2 + y^2 = \tau^2/4$, лежащей в полуплоскости $y < 0$ и опирающейся на ось x в точках $(k\tau, 0)$ и $((k+1)\tau, 0)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Пусть $D = D_1 \cup D_2 \cup J$, где $J = \bigcup_{k=0}^{+\infty} J_k$, и $Lu(x, y) \equiv \begin{cases} u_{xxx}(x, y) - u_y(x, y), & y > 0; \\ u_{xxx}(x, y) + u_{yy}(x, y), & y < 0 \end{cases}$ –

эллиптико-параболический оператор.

Рассмотрим в области D уравнение

$$Lu(x, y) = H(x - \tau)u(x - \tau, y), \quad (1)$$

где $0 < \tau \equiv \text{const}$, $H(\xi)$ – функция Хевисайда [1].

Пусть $D_1 = \bigcup_{k=0}^{+\infty} D_{1k}$, где $D_{1k} = \{(x, y) : k\tau \leq x \leq (k+1)\tau, 0 < y \leq 1\}$.

З а д а ч а R. Найти непрерывную в замкнутой области $\bar{D}$ функцию $u(x, y)$ с непрерывными внутри D производными $u_x(x, y)$ и $u_y(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области D при $y \neq 0$ и граничным условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_2(y), \quad u(+\infty, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$u(x, y)|_{\rho_k} = f_k(s), \quad k\tau \leq x \leq (k+1)\tau \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

где $\varphi_i(y)$ ($i = 1, 2$) – заданные непрерывные, а $f_k(s)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции, причем $\varphi_1(0) = f_0(0)$, $f_k(l) = f_{k+1}(0)$. Длина s отсчитывается от точек $(k\tau, 0)$ в положительном направлении; l – длина полуокружности $\rho_k = \tau/2$, а $l = \pi\tau/2$.

Пусть $\omega(x) = u(x, 0)$, $\nu(x) = u_y(x, 0)$.

Единственность решения.

Т е о р е м а. Однородная задача R ($\varphi_1 = \varphi_2 = f_k = 0$) имеет в области $\bar{D}$ тривиальное решение.

Доказательство. В силу непрерывности первых производных от $u(x, y)$ из параболической части D_1 области D получим на $y = 0$ соотношение

$$\omega'''(x) = \nu(x) + H(x - \tau)\omega(x - \tau), \quad x > 0, \quad (2)$$

причем

$$\omega(k\tau) = 0, \quad \omega'(0) = 0, \quad \omega(+\infty) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Исходя из (2), при $0 < x < \tau$, имеем $H(x - \tau) = 0$, $\omega'''(x) = \nu(x)$ и потому, в силу (3), имеем

$$\beta_0 = \int_0^\tau \omega(x) \nu(x) dx = \int_0^\tau \omega(x) \omega'''(x) dx = -\frac{1}{2}(\omega'(\tau))^2 \leq 0. \quad (4)$$

С другой стороны, интегрируя по области D_{20} тождество

$$\begin{aligned} u(x, y) L u(x, y) &\equiv u(x, y) (u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y)) = \\ &= (u(x, y) u_x(x, y))_x + (u(x, y) u_y(x, y))_y - u_x^2(x, y) - u_y^2(x, y) = 0 \end{aligned}$$

и учитывая, что $u|_{\rho_0} = 0$, найдем

$$\beta_0 = \iint_{D_{20}} (u_x^2(x, y) + u_y^2(x, y)) dx dy. \quad (4')$$

Так как из (4), (4') следует, что $\beta_0 = 0$, то из (4') имеем $u_x(x, y) \equiv 0$, $u_y(x, y) \equiv 0 \quad \forall (x, y) \in D_{20}$. Значит $u(x, y) \equiv \text{const} \quad \forall (x, y) \in D_{20}$. Но $u(x, y) \in C(\bar{D})$ и $u|_{\rho_0} = 0$, поэтому $u(x, y) \equiv 0 \quad \forall (x, y) \in \bar{D}_{20}$. Следовательно, в частности, $u(x, 0) = \omega(x) = 0$ при $0 \leq x \leq \tau$ и $\omega'(\tau) = 0$.

Аналогично, учитывая, что $\omega(x) = 0$ при $0 \leq x \leq \tau$, $\omega(\tau) = \omega'(\tau) = 0$, $\omega(2\tau) = 0$, можно показать, что $u(x, y) \equiv 0 \quad \forall (x, y) \in \bar{D}_{21}$ и, значит, $u(x, 0) = \omega(x) = 0$, когда $\tau \leq x \leq 2\tau$, причем $\omega'(2\tau) = 0$.

Продолжая процесс, найдем

$$u(x, y) \equiv 0 \quad \forall (x, y) \in \bar{D}_2 \text{ и } u(x, 0) = \omega(x) \equiv 0 \quad \forall x \geq 0. \quad (5)$$

В области D_1 рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} u(x, y) e^{-\alpha y} L u(x, y) &\equiv u(x, y) e^{-\alpha y} (u_{xx}(x, y) - u_y(x, y) - H(x - \tau) u(x - \tau, y)) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-\alpha y} u(x, y) u_{xx}(x, y) - \frac{1}{2} e^{-\alpha y} u_x^2(x, y) \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (e^{-\alpha y} u^2(x, y)) - \\ &- \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha y} u^2(x, y) - e^{-\alpha y} u(x, y) H(x - \tau) u(x - \tau, y) = 0, \quad \alpha \equiv \text{const}. \end{aligned}$$

Интегрируя его по области $D_{1\varepsilon\delta} = \{(x, y) : 0 < x < \delta, \varepsilon < y \leq 1\}$, где $\delta > 0$, $0 < \varepsilon < 1$, применяя формулу Грина, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow +\infty$, используя однородности граничных условий и (5), получим

$$\begin{aligned} &\int_0^1 e^{-\alpha y} u_x^2(+\infty, y) dy + e^{-\alpha} \int_0^{+\infty} u^2(x, 1) dx + (\alpha - 1) \iint_{D_{10}} e^{-\alpha y} u^2(x, y) dx dy + \\ &+ (\alpha - 2) \iint_{D_1 \setminus D_{10}} e^{-\alpha y} u^2(x, y) dx dy + \iint_{D_1 \setminus D_{10}} e^{-\alpha y} (u(x, y) + u(x - \tau, y))^2 dx dy = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, при $\alpha > 2$, $u(x, y) \in C(\bar{D})$ и из однородности граничных условий имеем $u(x, y) \equiv 0 \quad \forall (x, y) \in \bar{D}_1$. Последнее утверждение вместе с (5) доказывает теорему, т.е. $u(x, y) \equiv 0 \quad \forall (x, y) \in \bar{D}$.

Из теоремы непосредственно следует, что задача R имеет единственное решение в D .

Существование решения задачи R .

Решение уравнения (1) в области D_{2k} , удовлетворяющее условиям

$$u(x, y)|_{\rho_k} = f_k(s), \quad u_y(x, y)|_{y=0} = v(x), \quad x \in J_k,$$

выражается формулой

$$u_k(x, y) = u_{0k}(x, y) - \iint_{D_{2(k-1)}} u_{k-1}(\xi, \eta) G_k(\xi + \tau, \eta; x, y) d\xi d\eta, \quad (x, y) \in D_{2k}, \quad (6)$$

($k = 0, 1, 2, \dots$), где

$$u_{0k}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} v(t) G_k(t, 0; x, y) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\rho_k} f_k(s) \frac{\partial}{\partial N} G_k(\xi(s), \eta(s); x, y) ds$$

и

$$G_k(x, y; x_0, y_0) = \ln \frac{4\bar{r}_k \bar{r}_{1k} \rho_k^2}{\tau^2 r r_1};$$

$$\left. \begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix} \right\} = (x - x_0)^2 + (y \mp y_0)^2, \quad \left. \begin{matrix} \bar{r}_k^2 \\ \bar{r}_{1k}^2 \end{matrix} \right\} = \left(x - (2k+1)\tau/2 - \bar{x}_0 \right)^2 + \left(y \mp \bar{y}_0 \right)^2,$$

$$\bar{x}_0 = \frac{\tau^2}{4\rho_k^2} (x_0 - (2k+1)\tau/2), \quad \bar{y}_0 = \frac{\tau^2}{4\rho_k^2} y_0,$$

причем $u_{(-1)}(x, y) = 0$ и, без ограничения общности, $f_k(0) = f'_k(0) = f_{k+1}(l) = f'_{k+1}(l) = 0$. N – внутренняя нормаль границы.

Полагая в (6) $y = 0$, найдем функциональное соотношение

$$\omega(x) = \frac{1}{\pi} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \nu(t) \ln \frac{|x-t|}{|2x/\tau - 2k - 1|(x_k - t)} dt + P_k(x), \quad k\tau < x < (k+1)\tau, \quad (7)$$

где $x_k = \frac{(2k+1)x - 2\tau k(k+1)}{2x/\tau - 2k - 1}$, а

$$P_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\rho_k} f_k(s) \frac{\partial}{\partial N} G_k(\xi(s), \eta(s); x, 0) ds - \iint_{D_2(k-1)} u_{k-1}(\xi, \eta) G_k(\xi + \tau, \eta; x, 0) d\xi d\eta.$$

Известными методами [2] можно показать, что $P_k(x) \in C^1[k\tau, (k+1)\tau] \cap C^2(k\tau, (k+1)\tau)$, причем $\rho_k''(x)$ при $x \rightarrow k\tau$ или $x \rightarrow (k+1)\tau$ обращается в бесконечность порядка меньше единицы.

Дифференцируя (7), получим

$$\omega'(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \nu(t) \left(\frac{1}{t-x} + \frac{2k+1-2t/\tau}{(2k+1)(t+k)-2tx/\tau-2\tau k(k+1)} \right) dt + P'_k(x), \quad (8)$$

$$k\tau < x < (k+1)\tau.$$

Функциональное соотношение между $\omega(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из параболической области D_1 на $y = 0$, определяется из решения задачи (2)-(3) относительно $\omega(x)$ и имеет вид рекуррентной формулы

$$\begin{aligned} \omega(x) = & \frac{1}{2} \int_{k\tau}^x (x-t)^2 [\nu(t) + H(t-\tau) \omega(t-\tau)] dt - \\ & - \frac{(x-k\tau)^2}{2\tau^2} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} ((k+1)\tau - t)^2 [\nu(t) + H(t-\tau) \omega(t-\tau)] dt + \\ & + \frac{1}{\tau} H(x-\tau) (x-k\tau)((k+1)\tau - x) \omega'(k\tau), \quad k\tau \leq x \leq (k+1)\tau \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \omega'(x) = & \int_{k\tau}^x (x-t) [\nu(t) + H(t-\tau) \omega(t-\tau)] dt - \\ & - \frac{x-k\tau}{\tau^2} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} ((k+1)\tau - t)^2 [\nu(t) + H(t-\tau) \omega(t-\tau)] dt + \\ & + \frac{1}{\tau} H(x-\tau) ((2k+1)\tau - 2x) \omega'(k\tau), \quad k\tau \leq x \leq (k+1)\tau. \end{aligned} \quad (10)$$

Исключая $\omega'(x)$ из (8) и (10), приходим к сингулярному интегральному уравнению первого рода для определения функции $\nu(x)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \nu(t) \left(\frac{1}{t-x} + \frac{2k+1-2t/\tau}{(2k+1)(t+x)-2tx/\tau-2\tau k(k+1)} \right) dt = g_k(x), \quad (11)$$

$k\tau \leq x \leq (k+1)\tau$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), где $g_k(x) = P'_k(x) - \int_{k\tau}^x (x-t) [\nu(t) + H(t-\tau) \omega(t-\tau)] dt +$

$$+ \frac{x-k\tau}{\tau^2} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} ((k+1)\tau - t)^2 [\nu(t) + H(t-\tau) \omega(t-\tau)] dt - \frac{1}{\tau} H(x-\tau) ((2k+1)\tau - 2x) \omega'(k\tau).$$

Исследования показывают, что $g_k(x)$ ($g'_k(x)$) при $x \rightarrow k\tau$ и $x \rightarrow (k+1)\tau$ стремится к конечному пределу (обращается в бесконечность порядка не выше единицы).

Предполагая, что $g_k(x)$ известна, будем искать решение $v(x)$ уравнения (11) в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера на интервале $k\tau < x < (k+1)\tau$. Тогда функция $g_k(x)$ также удовлетворяет условию Гельдера.

Произведя в уравнении (11) замену переменных и функций по формулам

$$v(x) = v_1(y), \quad g_k(x) = \beta_k(y), \quad y = \frac{x - k\tau}{\tau}, \quad (12)$$

получим уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 v_1(\xi) \left(\frac{1}{\xi - y} + \frac{1 - 2\xi}{\xi + y - 2\xi y} \right) d\xi = \beta_k(y), \quad 0 < y < 1. \quad (13)$$

Для решения уравнения (13) применим метод аналитического продолжения в комплексную область.

Пусть z – произвольная точка комплексной плоскости. Следуя идее Карлемана [3], положим

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 v_1(\xi) \left(\frac{1}{\xi - z} + \frac{1 - 2\xi}{\xi + z - 2\xi z} \right) d\xi. \quad (14)$$

Функция $\Phi(z)$ голоморфна как в верхней, так и в нижней полуплоскости, принимает соответствующие предельные значения $\Phi^+(y)$, $\Phi^-(y)$, когда z стремится к точке y действительной оси. Кроме того, $\Phi(z)$ из (14) обладает свойством

$$\Phi\left(\frac{z}{2z-1}\right) = (2z-1)^2 \Phi(z). \quad (15)$$

Следовательно,

$$\Phi^\pm\left(\frac{y}{2y-1}\right) = (2y-1)^2 \Phi^\mp(y). \quad (16)$$

Используя формулы Сохоцкого [4], при $0 < y < 1$, имеем

$$\Phi^+(y) + \Phi^-(y) = \frac{1}{\pi i} \int_0^1 v_1(\xi) \left(\frac{1}{\xi - y} + \frac{1 - 2\xi}{\xi + y - 2\xi y} \right) d\xi; \quad (17)$$

$$\Phi^+(y) - \Phi^-(y) = v_1(y). \quad (18)$$

Уравнение (13) с помощью (17) можно переписать в виде

$$\Phi^+(y) + \Phi^-(y) = -i \beta_k(y), \quad 0 < y < 1. \quad (19)$$

При $y < 0$ или $y > 1$, производя замену y на $\frac{y}{2y-1}$ в (19) и учтя (16), получим

$$\Phi^+(y) + \Phi^-(y) = -\frac{i}{(2y-1)^2} \beta_k\left(\frac{y}{2y-1}\right), \quad -\infty < y < 0, \quad 1 < y < +\infty. \quad (20)$$

Таким образом, решение сингулярного интегрального уравнения первого рода (13) сводится к следующей задаче Римана на комплексной плоскости: найти функцию $\Phi(z)$, голоморфную в верхней и нижней полуплоскости, удовлетворяющую тождеству (15), исчезающую на бесконечности по граничному, согласно (19)-(20), условию

$$\Phi^+(y) - G(y) \Phi^-(y) = r(y), \quad (21)$$

где

(22)

$$G(y) = -1;$$

$$r(y) = \begin{cases} -i\beta_k(y), & 0 < y < 1; \\ -\frac{i}{(2y-1)^2} \beta_k\left(\frac{y}{2y-1}\right), & -\infty < y < 0, \quad 1 < y < +\infty. \end{cases} \quad (23)$$

Индекс задачи (21): $\kappa = \text{Jnd } G(y) = 0$.

Функция $\Phi(z)$ может быть построена в явном виде.

Решим предварительно соответствующую задаче (21) однородную задачу, что позволит провести факторизацию коэффициента $G(y)$ из (22).

Найдем функцию $\chi(z)$, голоморфную как в верхней, так и в нижней полуплоскости, удовлетворяющую на действительной оси условию

$$\chi^+(y) = G(y)\chi^-(y), \quad (24)$$

или, что то же, $\ln \chi^+(y) - \ln \chi^-(y) = \ln G(y)$.

Одно из частных решений последнего уравнения есть функция

$$\ln \chi(z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N \frac{\ln G(\xi)}{\xi - z} d\xi = [\ln G(\xi) = \ln(-1) = i\pi] = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1 - 2z}{\xi + z - 2\xi z} \right) d\xi, \quad (25)$$

которая удовлетворяет условию

$$\chi\left(\frac{z}{2z-1}\right) = \frac{1}{\chi(z)}.$$

$$\text{Из (25) находим } \ln \chi^\pm(y) = \frac{1}{2} \ln \frac{y}{1-y} \pm i \frac{\pi}{2}.$$

Под $\ln \frac{z}{1-z}$ следует понимать ту ветвь логарифма, которая голоморфна в плоскости, разрезанной вдоль лучей $(-\infty, 0)$ и $(1, +\infty)$, и принимающую действительные значения на отрезке $[0, 1]$.

Следовательно,

$$\chi^\pm(y) = \pm i \sqrt{\frac{y}{1-y}} \quad (26)$$

- решение однородной задачи (24).

Перейдем к решению неоднородной задачи (21)-(23).

С помощью (24) коэффициент $G(y)$ из (22) задачи (21) факторизуется и потому краевое условие (21) приводится к виду

$$\frac{\Phi^+(y)}{\chi^+(y)} - \frac{\Phi^-(y)}{\chi^-(y)} = \frac{r(y)}{\chi^+(y)}. \quad (27)$$

Так как индекс задачи (21) равен нулю, то, на основании (27), решение задачи (21) с учетом (23) можно записать в форме

$$\frac{\Phi(z)}{\chi(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r(\xi)}{\chi^+(\xi)} \frac{d\xi}{\xi - z} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\beta_k(\xi)}{\chi^+(\xi)} \left(\frac{1}{\xi - z} + \frac{1 - 2\xi}{\xi + z - 2\xi z} \right) d\xi.$$

На основании (18), (26), найдем

$$\nu_1(y) = \Phi^+(y) - \Phi^-(y) = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \beta_k(\xi) \sqrt{\frac{y(1-\xi)}{\xi(1-y)}} \left(\frac{1}{\xi - y} + \frac{1 - 2\xi}{\xi + y - 2\xi y} \right) d\xi, \quad 0 < y < 1.$$

Возвращаясь к старым переменным и функциям по формулам (12), получим решение уравнения (11) в форме

$$\begin{aligned} \nu(x) = & -\frac{1}{\pi} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} g_k(t) \sqrt{\frac{(x - k\tau)((k+1)\tau - t)}{(t - k\tau)((k+1)\tau - x)}} \left(\frac{1}{t - x} + \right. \\ & \left. + \frac{2k + 1 - 2t/\tau}{(2k + 1)(t + x) - 2xt/\tau - 2\tau k(k + 1)} \right) dt, \quad k\tau < x < (k + 1)\tau. \end{aligned}$$

Подставляя вместо $g_k(t)$ правую часть уравнения (11), получим для определения функции $\nu(x)$ уравнение Фредгольма

$$v(x) - \frac{1}{\pi} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} v(t) M_k(x, t) dt = h_k(x), \quad k\tau < x < (k+1)\tau, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \text{где } M_k(x, t) &= \int_t^{(k+1)\tau} Q_k(x, \xi) (\xi - t) d\xi - \frac{((k+1)\tau - t)^2}{\tau^2} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} Q_k(x, \xi) (\xi - k\tau) d\xi; \\ h_k(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} Q_k(x, \xi) \left[P'_k(\xi) - \int_{k\tau}^{\xi} (\xi - t) H(t - \tau) \omega(t - \tau) dt + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\xi - k\tau}{\tau^2} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} ((k+1)\tau - t)^2 H(t - \tau) \omega(t - \tau) dt - \frac{1}{\tau} H(\xi - \tau) ((2k+1)\tau - 2\xi) \omega'(k\tau) \right] d\xi; \\ Q_k(x, \xi) &= \sqrt{\frac{(x - k\tau)((k+1)\tau - \xi)}{(\xi - k\tau)((k+1)\tau - x)}} \left(\frac{1}{\xi - x} + \frac{2k+1 - 2\xi/\tau}{(2k+1)(\xi + x) - 2x\xi/\tau - 2\tau k(k+1)} \right). \end{aligned}$$

Задача R имеет единственное решение. Следовательно, уравнение (28), безусловно, разрешимо.

Найденное решение $v(x)$ уравнения (28) дает возможность определить с помощью (9) функцию $\omega(x)$, а это позволяет известными методами [5] построить решение задачи R в области D_1 , что в совокупности с (6) решает задачу R для уравнения (1) в области D .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Маричев О.И.* Метод вычисления интегралов от специальных функций. Минск: Наука и техника, 1978. 310 с.
2. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 164 с.
3. *Carleman T.* Arkiv for Mat., Astr. och Fysik. Bd 16, 26. 1922, P. 1-19.
4. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
5. *Зарубин Е.А.* Краевая задача для дифференциально-разностного уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка // Изв. Самар. гос. экон. акад. Самара: СГЭА, 1999. № 2.