Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Овчинников, Алгоритм типа покоординатного спуска на обладающем свойством усиленной замены множестве точек координатной решетки, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 27, 14–19

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu260>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 16:17:44

Методы оптимизации

УДК 519.3

В.Г. Овчинников

АЛГОРИТМ ТИПА ПОКООРИНАТНОГО СПУСКА НА ОБЛАДАЮЩЕМ СВОЙСТВОМ УСИЛЕННОЙ ЗАМЕНЫ МНОЖЕСТВЕ ТОЧЕК КООРИНАТНОЙ РЕШЕТКИ

Для задачи минимизации сепарабельной координатно-выпуклой функции на конечном и обладающем свойством усиленной замены множестве точек координатной решетки предлагается и обосновывается алгоритм типа покоординатного спуска.

Введение. В настоящей работе продолжены исследования работ [1-4]. Для нахождения решения основной задачи (задачи минимизации сепарабельной координатно-выпуклой функции на конечном и обладающем свойством усиленной замены множестве точек координатной решетки) рассматривается семейство вспомогательных задач, устанавливаются лемма о связи между оптимальными решениями этих задач (аналог леммы 1 из работы [5]), лемма о соотношениях между их оптимальными значениями (аналог леммы 2 той же работы) и с помощью этих лемм показывается, как эффективный (в терминологии для матроидов [6] - «жадный») алгоритм покоординатного спуска и подход к его обоснованию для задачи [5] используются в их некоторой модификации для основной задачи.

Определения. В дальнейшем будут использоваться обозначения и терминология работ [1-4].

Под координатной решеткой $(\Gamma, \prec)$ понимается множество $\{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \Gamma_i, \forall i \in N\}$ с отношением порядка, определяемым условием: $(x_1, \dots, x_n) \prec (y_1, \dots, y_n)$ тогда и только тогда, когда $x_i \prec_i y_i, \forall i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$, где Γ_i - цепь с отношением порядка $\prec_i$, в которой конечны все интервалы $[a_i, b_i] = \{x_i \in \Gamma_i : a_i \prec_i x_i \prec_i b_i\}$, т.е. $|[a_i, b_i]| < \infty$. Следовательно, для всякой точки $x = (x_1, \dots, x_n)$ решетки и любого индекса $j \in N$, если элемент x_j не минимален, существует единственная точка $\tau_j(x) = (x_1^{\tau_j}, \dots, x_n^{\tau_j})$, где $x_i^{\tau_j} = x_i$ при $i \neq j$ и $x_j^{\tau_j}$ - элемент, непосредственно предшествующий x_j в цепи Γ_j , а если x_j не максимален - существует единственная точка $\pi_j(x) = (x_1^{\pi_j}, \dots, x_n^{\pi_j})$, где $x_i^{\pi_j} = x_i$ при $i \neq j$ и $x_j^{\pi_j}$ - элемент, непосредственно следующий за x_j в цепи Γ_j .

Сепарабельной координатно-выпуклой функцией (СКВФ) называем заданную на множестве точек решетки $(\Gamma, \prec)$ функцию $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$, для которой всякий ее i - градиент $f(\pi_i(x)) - f(x)$ не убывает при переходе от x к точке $\pi_i(x)$.

Лемма 1. Для СКВФ $f(x)$ выполняются следующие условия:

$$(w_j \neq v_j \prec_j w_j) \Rightarrow f_j(v_j^{\pi_j}) - f_j(v_j) \leq f_j(w_j) - f_j(w_j^{\tau_j}), \quad \forall v_j, w_j \in \Gamma_j, \quad \forall j \in N.$$

Доказательство. Из условий $v_j, w_j \in \Gamma_j, w_j \neq v_j \prec_j w_j$ следует, что v_j не максимален в Γ_j и $v_j^{\pi_j} \in \Gamma_j$, w_j не минимален в Γ_j и $w_j^{\tau_j} \in \Gamma_j$, $|[v_j, w_j]| \geq 2$.

При $|[v_j, w_j]| = 2$ из определения $v_j^{\pi_j}$ имеем $v_j^{\pi_j} \neq v_j \prec_j v_j^{\pi_j} \prec_j w_j$ и поэтому $v_j^{\pi_j} = w_j$, а из определения $w_j^{\tau_j}$ имеем $v_j \prec_j w_j^{\tau_j} \prec_j w_j \neq w_j^{\tau_j}$ и потому $w_j^{\tau_j} = v_j$. Отсюда следует, что при $k = 1$ установлена справедливость следующего предложения.

Предложение $T(k)$. Для СКВФ $f(x)$ выполняются следующие условия:

$$(v_j \prec_j w_j) \wedge ([v_j, w_j] = k+1) \Rightarrow f_j(v_j^{\pi_j}) - f_j(v_j) \leq f_j(w_j) - f_j(w_j^{\tau_j}), \quad \forall v_j, w_j \in \Gamma_j, \quad \forall j \in N.$$

Выбирая натуральное m , для которого справедливо $T(m)$, а затем полагая $k = m+1$ и выбирая по произволу индекс $j \in N$ и элементы $x_j, y_j \in \Gamma_j$ из условий $x_j \prec_j y_j, [x_j, y_j] = k+1 = m+2$, покажем, что $f_j(x_j^{\pi_j}) - f_j(x_j) \leq f_j(y_j) - f_j(y_j^{\tau_j})$, т.е. установим справедливость предложения $T(m+1)$ и, таким образом, по индукции, получим лемму.

Из условий выбора $x_j, y_j \in \Gamma_j$, т.е. из соотношений $x_j \prec_j y_j, [x_j, y_j] = m+2$, следует, что $x_j \neq y_j$, $x_j^{\pi_j} \in \Gamma_j$, $x_j^{\pi_j} \neq x_j \prec_j x_j^{\pi_j} \prec_j y_j$, $[x_j, y_j] = 1 + [x_j^{\pi_j}, y_j]$, $[x_j^{\pi_j}, y_j] = m+1$.

Положим $z_j = x_j^{\pi_j}$. Из предыдущего абзаца имеем $z_j \prec_j y_j$, $[z_j, y_j] = m+1$, $z_j \in \Gamma_j$. Отсюда с помощью предложения $T(m)$, справедливого по выбору m , получаем

$$f_j(z_j^{\pi_j}) - f_j(z_j) \leq f_j(y_j) - f_j(y_j^{\tau_j}).$$

Из равенства $z_j = x_j^{\pi_j}$ и определения $f(x)$ имеем

$$f_j(x_j^{\pi_j}) - f_j(x_j) \leq f_j(z_j^{\pi_j}) - f_j(z_j).$$

Отсюда и из предыдущего неравенства следует требуемое неравенство. Лемма доказана. Аналогично проверяется и следующая лемма.

Лемма 2. Если точки v, w решетки $(\Gamma, \prec)$ и индексы j, k удовлетворяют включениям $j \in I(v, w)$, $k \in I(w, v)$, то $j \neq k$ и равенства $x_j = v_j^{\pi_j}, x_k = v_k^{\tau_k}, x_s = v_s, \forall s \in N \setminus \{j, k\}$, по координатам задают такую точку x решетки $(\Gamma, \prec)$, что $x = \pi_j(\tau_k(v))$.

Свойство усиленной замены. Для множества Q точек решетки $(\Gamma, \prec)$ следующее свойство замены – это усиленный вариант известной аксиомы Штейница о замене (см. 6.10 (ii) [7]):

для любой пары x, y различных точек множества Q и всякого индекса $j \in I(x, y) = \{i \in N : x_i \prec_i y_i, x_i \neq y_i\}$ найдется такой индекс $k \in I(y, x)$, что $\pi_j(\tau_k(x)) \in Q$ и $\pi_k(\tau_j(y)) \in Q$.

В случае, когда решетку $(\Gamma, \prec)$ образуют булевы n -векторы, этим свойством обладает множество Q характеристических векторов баз в матроиде $M(N)$ (ср. с упражнением VI.1.9 на странице 312 [7]).

Задача А. Основной задачей настоящей статьи является следующая задача.

При предположениях, что $f(x)$ есть СКВФ, а множество Q точек решетки $(\Gamma, \prec)$ является конечным и обладает свойством усиленной замены, требуется минимизировать $f(x)$ на множестве Q , т.е. найти такую точку $x \in Q$, что $f(x) = \min\{f(y) : y \in Q\}$.

Для нахождения решения этой задачи рассмотрим семейство вспомогательных задач следующего вида.

Задача $A_m^{x_L}(\sigma_m)$. Для индекса m собственного подмножества $L \subset N \setminus \{m\}$, точки x множества Q и параметра $\sigma_m \in P_m^{x_L} = \{y_m : y = (y_1, \dots, y_n) \in Q, i \in L \Rightarrow y_i = x_i, \forall i \in N\}$ названная вспомогательная задача формулируется следующим образом.

При предположениях задачи А требуется минимизировать $f(x)$ на множестве $Q_m^{x_L}(\sigma_m) = \{(y_1, \dots, y_n) \in Q : y_m = \sigma_m, i \in L \Rightarrow y_i = x_i, \forall i \in N\}$, т.е. найти такую точку $w \in Q_m^{x_L}(\sigma_m)$, что $f(w) = F_m^{x_L}(\sigma_m)$, где $F_m^{x_L}(\sigma_m) = \min\{f(y) : y \in Q_m^{x_L}(\sigma_m)\}$.

Лемма 3 (ср. с леммой 1 [5]). Если для функции $f(x)$ и множества Q точек решетки $(\Gamma, \prec)$ выполняются предположения задачи А, x - точка множества Q , а индекс $m \in N$ и подмножество индексов L удовлетворяют строгому включению $L \subset N \setminus \{m\}$, то справедливы следующие предложения о связи между решениями вспомогательных задач:

1. Если параметр $\sigma_m \in P_m^{x_L}$ и точка $w \in Q_m^{x_L}(\sigma_m)$ удовлетворяют равенству $f(w) = F_m^{x_L}(\sigma_m)$, и, кроме того, выполняется включение $\sigma_m^{\tau_m} \in P_m^{x_L}$, то найдутся такой индекс $j \in N$ и такая точка $v \in Q$, что

$$v \in Q_m^{x_L}(\sigma_m^{\tau_m}), f(v) = F_m^{x_L}(\sigma_m^{\tau_m}), v_j = w_j^{\pi_j}, v_m = w_m^{\tau_m}, v_s = w_s, \forall s \in N \setminus \{j, m\}, m \neq j \notin L.$$

2. Если параметр $\sigma_m \in P_m^{x_L}$ и точка $w \in Q_m^{x_L}(\sigma_m)$ удовлетворяют равенству $f(w) = F_m^{x_L}(\sigma_m)$, и, кроме того, выполняется включение $\sigma_m^{\pi_m} \in P_m^{x_L}$, то найдутся такой индекс $j \in N$ и такая точка $v \in Q$, что

$$v \in Q_m^{x_L}(\sigma_m^{\pi_m}), f(v) = F_m^{x_L}(\sigma_m^{\pi_m}), v_j = w_j^{\tau_j}, v_m = w_m^{\pi_m}, v_s = w_s, \forall s \in N \setminus \{j, m\}, m \neq j \notin L.$$

Доказательство. При условиях леммы докажем, что справедливо предложение 1 (справедливость предложения 2 доказывается аналогично).

Из условий леммы имеем $w \in Q_m^{x_L}(\sigma_m)$, $f(w) = F_m^{x_L}(\sigma_m)$, $\sigma_m^{\tau_m} \in P_m^{x_L}$. Из последнего включения следует, что множество $Q_m^{x_L}(\sigma_m^{\tau_m})$ является непустым. Из этого множества, как подмножества конечного множества Q , выберем такую точку $u \in Q_m^{x_L}(\sigma_m^{\tau_m})$, что $f(u) = F_m^{x_L}(\sigma_m^{\tau_m})$.

Из включений $u \in Q_m^{x_L}(\sigma_m^{\tau_m})$, $w \in Q_m^{x_L}(\sigma_m)$ имеем $u \in Q$, $w \in Q$, $u_m = \sigma_m^{\tau_m}$, $w_m = \sigma_m$. Отсюда (по определению $\sigma_m^{\tau_m}$) получаем $u_m \prec_m w_m \neq u_m$, $m \in I(u, w)$, $u \neq w$. Так как по условиям леммы множество Q обладает свойством усиленной замены, то для различных точек u , w множества Q по индексу $m \in I(u, w)$ найдется такой индекс $j \in I(w, u)$, что $\pi_m(\tau_j(u)) \in Q$, $\pi_j(\tau_m(w)) \in Q$. Заметим, что из включений $u \in Q_m^{x_L}(\sigma_m^{\tau_m})$, $w \in Q_m^{x_L}(\sigma_m)$ следует также, что $j, m \notin L$. Полагая здесь $v = \pi_j(\tau_m(w))$, $y = \pi_m(\tau_j(u))$, с помощью леммы 2 находим:

$$v_j = w_j^{\pi_j}, v_m = w_m^{\tau_m}, v_s = w_s, y_j = u_j^{\tau_j}, y_m = u_m^{\pi_m}, y_s = u_s, \forall s \in N \setminus \{j, m\}, m \neq j \notin L. \quad (1)$$

Из (1) с помощью равенств $u_m = \sigma_m^{\tau_m}$, $w_m = \sigma_m$ (имеющихся по выбору u и w), равенства $u_m^{\pi_m} = \sigma_m$, вытекающего из них, как при доказательстве леммы 1, получаем

$$v_j = w_j^{\pi_j}, y_j = u_j^{\tau_j}, v_m = \sigma_m^{\tau_m} = u_m, y_m = \sigma_m = w_m, v_s = w_s, y_s = u_s, \forall s \in N \setminus \{j, m\}, m \neq j \notin L. \quad (2)$$

Поэтому $v \in Q_m^{x_L}(\sigma_m^{\tau_m})$, $y \in Q_m^{x_L}(\sigma_m)$. Отсюда непосредственно, т.е. с помощью определений $F_m^{x_L}(\sigma_m^{\tau_m})$ и $F_m^{x_L}(\sigma_m)$, следует $f(v) \geq F_m^{x_L}(\sigma_m^{\tau_m})$, $f(y) \geq F_m^{x_L}(\sigma_m)$, и, таким образом, с учетом выбора точек u и w имеем

$$f(v) \geq F_m^{x_L}(\sigma_m^{\tau_m}) = f(u), \quad f(y) \geq F_m^{x_L}(\sigma_m) = f(w). \quad (3)$$

Отсюда и из (1) следует, что для доказательства леммы достаточно получить неравенство

$$f(v) \leq f(u). \quad (4)$$

По выбору функции $f(x)$, используя (2), получаем

$$f(v) = f(w) + f_j(v_j) - f_j(w_j) + f_m(v_m) - f_m(w_m) = f(w) + f_j(w_j^{\pi_j}) - f_j(w_j) + f_m(\sigma_m^{\tau_m}) - f_m(\sigma_m).$$

Отсюда, используя неравенство $f(w) \leq f(y)$, имеющееся в (3), с помощью (2) получаем

$$\begin{aligned} f(v) &\leq f(y) + f_j(w_j^{\pi_j}) - f_j(w_j) + f_m(\sigma_m^{\tau_m}) - f_m(\sigma_m) = f(u) + f_j(y_j) - f_j(u_j) + f_m(y_m) - f_m(u_m) + \\ &+ f_j(w_j^{\pi_j}) - f_j(w_j) + f_m(\sigma_m^{\tau_m}) - f_m(\sigma_m) = f(u) + f_j(u_j^{\tau_j}) - f_j(u_j) + f_m(\sigma_m) - f_m(\sigma_m^{\tau_m}) + \\ &+ f_j(w_j^{\pi_j}) - f_j(w_j) + f_m(\sigma_m^{\tau_m}) - f_m(\sigma_m) = f(u) + f_j(u_j^{\tau_j}) - f_j(u_j) + f_j(w_j^{\pi_j}) - f_j(w_j). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$f(v) \leq f(u) + f_j(u_j^{\tau_j}) - f_j(u_j) + f_j(w_j^{\pi_j}) - f_j(w_j).$$

Замечая теперь, что индекс j выбирался из включения $j \in I(w, u)$, т.е. условий $w_j \prec_j u_j \neq w_j$,

с помощью леммы 1 получаем $f_j(w_j^{\pi_j}) - f_j(w_j) \leq f_j(u_j) - f_j(u_j^{\tau_j})$. Отсюда и из предыдущего неравенства следует требуемое неравенство (4). Лемма доказана.

Лемма 4 (ср. с леммой 2 [5]). Если для функции $f(x)$ и множества Q точек решетки $(\Gamma, \prec)$ выполняются предположения задачи A , x - точка множества Q , а индекс m и подмножество индексов L удовлетворяют строгому включению $L \subset N \setminus \{m\}$, то $F_m^{x_L}(\sigma_m)$ является выпуклой функцией параметра $\sigma_m \in P_m^{x_L}$, т.е.

$$(\theta_m \prec_m \omega_m \neq \theta_m) \wedge ([\theta_m, \omega_m] \subseteq P_m^{x_L}) \Rightarrow F_m^{x_L}(\theta_m^{\pi_m}) - F_m^{x_L}(\theta_m) \leq F_m^{x_L}(\omega_m) - F_m^{x_L}(\omega_m^{\tau_m}), \forall \theta_m, \omega_m \in \Gamma_m.$$

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно убедиться, что разность $F_m^{x_L}(\theta_m^{\pi_m}) - F_m^{x_L}(\theta_m)$ не убывает при переходе от параметра $\theta_m \in P_m^{x_L}$ к параметру $\theta_m^{\pi_m} \in P_m^{x_L}$ (поскольку с помощью этого свойства заключение леммы получается аналогично доказательству леммы 1).

Полагая $\sigma_m = \theta_m^{\pi_m}$ и, следовательно, получая $\theta_m = \sigma_m^{\tau_m}$, выразим указанное свойство с помощью неравенства $F_m^{x_L}(\sigma_m) - F_m^{x_L}(\sigma_m^{\tau_m}) \leq F_m^{x_L}(\sigma_m^{\pi_m}) - F_m^{x_L}(\sigma_m)$ или равносильного ему неравенства $F_m^{x_L}(\sigma_m^{\pi_m}) - 2F_m^{x_L}(\sigma_m) + F_m^{x_L}(\sigma_m^{\tau_m}) \geq 0$, предполагая, что $\{\sigma_m^{\tau_m}, \sigma_m, \sigma_m^{\pi_m}\} \subseteq P_m^{x_L}$, т.е. при предположении, что множества $Q_m^{x_L}(\sigma_m^{\tau_m})$, $Q_m^{x_L}(\sigma_m)$, $Q_m^{x_L}(\sigma_m^{\pi_m})$ не пусты. Таким образом, для доказательства леммы достаточно при указанном предположении получить неравенство

$$F_m^{x_L}(\sigma_m^{\pi_m}) - 2F_m^{x_L}(\sigma_m) + F_m^{x_L}(\sigma_m^{\tau_m}) \geq 0. \quad (5)$$

Поскольку множество $Q_m^{x_L}(\sigma_m)$ является подмножеством конечного множества, найдется такая точка $w \in Q_m^{x_L}(\sigma_m)$, что $f(w) = F_m^{x_L}(\sigma_m)$.

По предположению 1 леммы 3 найдутся такой индекс $j \in N$ и такая точка $v \in Q$, что $v \in Q_m^{x_L}(\sigma_m^{\tau_m})$, $f(v) = F_m^{x_L}(\sigma_m^{\tau_m})$, $v_j = w_j^{\pi_j}$, $v_m = w_m^{\tau_m}$, $v_s = w_s$, $\forall s \in N \setminus \{j, m\}$, $m \neq j \notin L$. (6)

По предположению 2 леммы 3 найдутся такой индекс $k \in N$ и такая точка $u \in Q$, что $u \in Q_m^{x_L}(\sigma_m^{\pi_m})$, $f(u) = F_m^{x_L}(\sigma_m^{\pi_m})$, $u_k = w_k^{\tau_k}$, $u_m = w_m^{\pi_m}$, $u_s = w_s$, $\forall s \in N \setminus \{k, m\}$, $m \neq k \notin L$. (7)

Поэтому

$$\begin{aligned} F_m^{x_L}(\sigma_m^{\tau_m}) - 2F_m^{x_L}(\sigma_m) + F_m^{x_L}(\sigma_m^{\pi_m}) &= [f(v) - f(w)] + [f(u) - f(w)] = \\ &= [f_j(w_j^{\pi_j}) - f_j(w_j) + f_m(w_m^{\tau_m}) - f_m(w_m)] + [f_k(w_k^{\tau_k}) - f_k(w_k) + f_m(w_m^{\pi_m}) - f_m(w_m)] = \\ &= [f_j(w_j^{\pi_j}) - f_j(w_j)] + [f_k(w_k^{\tau_k}) - f_k(w_k)] + [f_m(w_m^{\tau_m}) - 2f_m(w_m) + f_m(w_m^{\pi_m})]. \end{aligned}$$

Поскольку здесь слагаемое $[f_m(w_m^{\tau_m}) - 2f_m(w_m) + f_m(w_m^{\pi_m})]$ неотрицательно по выбору функции $f(x)$, из предыдущего выражения получаем следующее неравенство

$$F_m^{x_L}(\sigma_m^{\tau_m}) - 2F_m^{x_L}(\sigma_m) + F_m^{x_L}(\sigma_m^{\pi_m}) \geq f_j(w_j^{\pi_j}) - f_j(w_j) + f_k(w_k^{\tau_k}) - f_k(w_k). \quad (8)$$

Поскольку при $j=k$ правая часть этого неравенства неотрицательна по выбору функции $f(x)$, то в этом случае требуемое неравенство (5) и лемма очевидны. Поэтому считаем, что $j \neq k$, и с учетом этого равенства (6) и (7), представляющие по координатам точки u и v , перепишем в следующем виде.

$$\begin{aligned} v_j &= w_j^{\pi_j}, v_k = w_k, v_m = w_m^{\tau_m}, v_s = w_s, \forall s \in N \setminus \{j, k, m\}, j \neq k \neq m \neq j, \\ u_j &= w_j, u_k = w_k^{\tau_k}, u_m = w_m^{\pi_m}, u_s = w_s, \forall s \in N \setminus \{j, k, m\}, \{j, k, m\} \cap L = \emptyset. \end{aligned} \quad (9)$$

Из этих равенств и определений $I(v, u)$, $I(u, v)$ последовательно получаем:

$$\{m\} \subseteq I(v, u), \{j, k\} \subseteq I(u, v), I(v, u) \cap I(u, v) = \emptyset, \{m\} = I(v, u), \{j, k\} = I(u, v).$$

С помощью этих равенств по свойству усиленной замены множества Q для различных точек u и v , выбранных из условий (6) и (7), по индексу $j \in \{j, k\} = I(u, v)$ находим такой индекс $l \in I(v, u) = \{m\}$, что $\pi_j(\tau_m(u)) = \pi_j(\tau_l(u)) \in Q$. Полагая $y = \pi_j(\tau_m(u))$, по лемме 2 имеем:

$$y_j = u_j^{\pi_j}, \quad y_k = u_k, \quad y_m = u_m^{\tau_m}, \quad y_s = u_s, \quad \forall s \in N \setminus \{j, k, m\}, \quad \{j, k, m\} \cap L = \emptyset. \quad (10)$$

Покажем теперь, неотрицательность правой части (8). Из (9) и (10) имеем:

$$y_j = u_j^{\pi_j} = w_j^{\pi_j}, \quad y_k = u_k = w_k^{\tau_k}, \quad y_m = u_m^{\tau_m} = w_m, \quad y_s = u_s = w_s, \quad \forall s \in N \setminus \{j, k, m\}. \quad (11)$$

С помощью этих равенств из включения $w \in Q_m^{x_L}(\sigma_m)$ и равенства $\{j, k, m\} \cap L = \emptyset$ следует, что $y \in Q_m^{x_L}(\sigma_m)$. Отсюда по выбору w имеем $f(y) \geq f(w)$. С помощью этого неравенства из (11) по выбору функции $f(x)$ следует $f_j(w_j^{\pi_j}) - f_j(w_j) + f_k(w_k^{\tau_k}) - f_k(w_k) = f(y) - f(w) \geq 0$. Теперь из (8) вытекает требуемое неравенство (5). Лемма доказана.

Из доказанных лемм вытекают следствия.

Дополнительные обозначения. Ниже используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} E^\tau &= \{j \in N : j \notin L, j \neq m, \pi_m(\tau_j(x)) \in Q\}, \quad \Delta_j^\tau = f_j(x_j^{\tau_j}) - f_j(x_j) + f_m(x_m^{\pi_m}) - f_m(x_m), \\ E_\Delta^\tau &= \{j \in E^\tau : \Delta_j^\tau < 0\}, \\ E^\pi &= \{j \in N : j \notin L, j \neq m, \pi_j(\tau_m(x)) \in Q\}, \quad \Delta_j^\pi = f_j(x_j^{\pi_j}) - f_j(x_j) + f_m(x_m^{\tau_m}) - f_m(x_m), \\ E_\Delta^\pi &= \{j \in E^\pi : \Delta_j^\pi < 0\}, \end{aligned}$$

Следствие 1. Если x – решение задачи $A_m^{x_L}(x_m)$, то $E_\Delta^\tau \neq \emptyset \Rightarrow F_m^{x_L}(x_m) > F_m^{x_L}(x_m^{\pi_m})$, $E_\Delta^\pi \neq \emptyset \Rightarrow F_m^{x_L}(x_m) > F_m^{x_L}(x_m^{\tau_m})$

Доказательство. Из включения $j \in E_\Delta^\tau$, т.е. условий $j \in N, j \notin L, j \neq m, \pi_m(\tau_j(x)) \in Q$, $f_j(x_j^{\tau_j}) - f_j(x_j) + f_m(x_m^{\pi_m}) - f_m(x_m) < 0$, следует $f(\pi_m(\tau_j(x))) < f(x) = F_m^{x_L}(x_m)$, и поскольку $j \notin L$, $m \notin L$, то $\pi_m(\tau_j(x)) \in Q_m^{x_L}(x_m^{\pi_m})$ и потому $F_m^{x_L}(x_m^{\pi_m}) \leq f(\pi_m(\tau_j(x)))$ и, следовательно, $F_m^{x_L}(x_m^{\pi_m}) < F_m^{x_L}(x_m)$. Этим получено первое заключение следствия и так как второе – получается аналогично, следствие доказано.

Следствие 2. Если x – решение задачи $A_m^{x_L}(x_m)$, то из множеств $E_\Delta^\tau, E_\Delta^\pi$ непустым может быть только одно.

Доказательство. Из допущения $E_\Delta^\tau \neq \emptyset \neq E_\Delta^\pi$ по следствию 1 имеем $F_m^{x_L}(x_m^{\pi_m}) - 2F_m^{x_L}(x_m) + F_m^{x_L}(x_m^{\tau_m}) < 0$ вопреки лемме 4. Следствие доказано.

Задача A^{x_L} . При предположениях задачи A требуется минимизировать $f(x)$ на множестве $Q^{x_L} = \{(y_1, \dots, y_n) \in Q : i \in L \Rightarrow y_i = x_i, \forall i \in N\}$, т.е. найти такую точку $w \in Q^{x_L}$, что $f(w) = \min\{f(y) : y \in Q^{x_L}\}$.

Следствие 3. Если x – решение задачи $A_m^{x_L}(x_m)$ и $E_\Delta^\tau = \emptyset = E_\Delta^\pi$, то x – решение задачи A^{x_L} .

Следствие 4. Если x – решение задачи $A_m^{x_L}(x_m)$ и $E_\Delta^\tau = \emptyset$, то x – решение задачи минимизации $f(w)$ при условиях $w \in Q^{x_L}$, $x_m \prec_m w_m$.

Следствие 5. Если x – решение задачи $A_m^{x_L}(x_m)$ и $E_\Delta^\pi = \emptyset$, то x – решение задачи минимизации $f(w)$ при условиях $w \in Q^{x_L}$, $w_m \prec_m x_m$.

Замечание. С помощью лемм 3, 4 и следствий 1-5 обосновывается следующий алгоритм для нахождения решения задачи A .

Алгоритм $A(x^0, \varphi)$. В приводимом ниже описании используются: x^0 – стартовая точка множества Q , φ – задаваемая на множестве всех подмножеств из N функция выбора из каждого подмножества его элемента.

Шаг 1. Положить $x = x^0$, $L = N \setminus \{\varphi(N)\}$, $t = 2$.

Шаг t .

Подшаг 0. Если $t = n + 1$ ($L = \emptyset$), объявить x искомым решением и остановиться.

В противном случае положить $m = \varphi(N)$ и заменить L на $L \setminus \{m\}$; сформировать множества $E_{\Delta}^{\tau}, E_{\Delta}^{\pi}$.

Если $E_{\Delta}^{\tau} = \emptyset \wedge E_{\Delta}^{\pi} = \emptyset$ идти на Увеличение t .

В противном случае:

при $E_{\Delta}^{\tau} \neq \emptyset$ положить $\lambda = \tau$, $\mu = \pi$;

при $E_{\Delta}^{\pi} \neq \emptyset$ положить $\lambda = \pi$, $\mu = \tau$;

положить $k = 1$.

Подшаг k . Сформировать множество E^{λ} .

Если $E^{\lambda} = \emptyset$, идти на Увеличение t .

В противном случае положить $M^{\lambda} = \min \left\{ \Delta_j^{\lambda} : j \in E^{\lambda} \right\}$.

Если $M^{\lambda} \geq 0$, идти на Увеличение t .

В противном случае определить индекс i из условий $i \in E^{\lambda}$, $\Delta_i^{\lambda} = M^{\lambda}$,

заменить x_i на $x_i^{\lambda_i}$, x_m на $x_m^{\mu_m}$,

увеличить k на 1.

Увеличение t . Заменить t на $t + 1$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. При предположениях задачи А алгоритм $A(x^0, \varphi)$ находит ее решение x из любой стартовой точки x^0 при всякой функции выбора φ .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Емеличев В.А., Овчинников В.Г. Симметричные суперматроиды // Докл. АН БССР, 1983. Т. 27. № 5. С. 389-391.
2. Емеличев В.А., Овчинников В.Г. К теории экстремума на координатных решетках // Докл. АН БССР. 1983. Т. 27. № 7. С. 581-583.
3. Овчинников В.Г. Об одном свойстве подмножеств координатной решетки, на которых локальный и глобальный экстремумы координатно-выпуклой функции совпадают // Изв. АН БССР. Сер. Физ.-мат. науки. 1984. № 5. С. 113 / Ред. журнал «Изв. АН БССР. Сер. Физ.-мат. н.» Минск. 1983. 6с.: Библ. 4 назв. Рукопись деп. в ВИНТИ 09.01.84 № 245-84Деп.
4. Емеличев В.А., Овчинников В.Г. К теории оптимизации на антицепях, обладающих свойством замены Швейница // Кибернетика, 1985. № 2. С. 55-58.
5. Овчинников В.Г. Об одной задаче целочисленного программирования // Кибернетика, 1976. № 1. С. 131-135.
6. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985. 512с.
7. Айгнер М. Комбинаторная теория. М.: Мир, 1982. 556 с.

Поступила 24.12.2003 г.