Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Глущенко, Л. А. Сараев, Н. А. Архипова, Вычисление макроскопических характеристик упругопластического деформирования многокомпонентных композиционных материалов, хаотически армированных эллипсоидальными включениями и ослабленных невзаимодействующими трещинами, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 27, 20–24

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu261>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 12:40:02

Механика деформируемого твердого тела

УДК 539.4

В. С. Глуценков, Л. А. Сараяев, Н. А. Архипова

ВЫЧИСЛЕНИЕ МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ, ХАОТИЧЕСКИ АРМИРОВАННЫХ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ И ОСЛАБЛЕННЫХ НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМИ ТРЕЩИНАМИ

Моделируются эффективные характеристики упругопластического деформирования многокомпонентных матричных композиционных материалов, хаотически армированных эллипсоидальными включениями различных конфигураций и материалов, ослабленных невзаимодействующими трещинами.

Пусть композиционный материал образован компонентами, соединенными между собой с идеальной адгезией. Первый компонент играет роль матрицы - V_m , а другие n - роль отдельных хаотически распределенных в матрице включений различных материалов, имеющих форму эллипсоидов с главными полуосями $a_1^{(s)}, a_2^{(s)}, a_3^{(s)}$. Причем $V_f = \sum_{s=1}^n V_s$, где V_f - объем всех включений, V_s - объем s -го компонента.

Запишем исходные локальные уравнения упругопластического деформирования:

$$s_{ij} = 2\mu_{m;s}(\sqrt{e_{kl}e_{kl}})e_{ij}, \quad \sigma_{pp} = 3K_{m;s}\varepsilon_{pp}. \quad (1)$$

Здесь $\mu_{m;s}(\sqrt{e_{kl}e_{kl}})$ - нелинейные модули пластичности сдвига; $K_{m;s}$ - объемные модули;

$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}$, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}$ - девиаторные части тензоров напряжений и деформаций; σ_{ij} , ε_{ij} - тензоры напряжений и малых упругопластических деформаций.

Геометрическая структура композиционного материала описывается индикаторными функциями $\chi_m(\mathbf{r})$, $\chi_f(\mathbf{r})$, $\chi_s(\mathbf{r})$, $s = \overline{1, n}$:

$$\chi_m(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in V_m, \\ 0, & \mathbf{r} \notin V_m; \end{cases} \quad \chi_f(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in V_f, \\ 0, & \mathbf{r} \notin V_f; \end{cases} \quad \chi_s(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in V_s, \\ 0, & \mathbf{r} \notin V_s. \end{cases}$$

Здесь $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ - радиус-вектор.

Положение разориентированных в пространстве эллипсоидальных включений будем описывать индикаторными функциями $\chi_{s,\alpha}(\mathbf{r})$, $\alpha = \overline{1, s_\alpha}$:

$$\chi_{s,\alpha}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in V_{s,\alpha}, \\ 0, & \mathbf{r} \notin V_{s,\alpha}. \end{cases}$$

Причем $\chi_f(\mathbf{r}) = \sum_{s=1}^n \chi_s(\mathbf{r})$, $\chi_s(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1}^{s_\alpha} \chi_{s,\alpha}(\mathbf{r})$, $V_s = \sum_{\alpha=1}^{s_\alpha} V_{s,\alpha}$. С помощью индикаторных функций перепишем уравнения (1) в виде

$$s_{ij}(\mathbf{r}) = 2\mu_m \left(\sqrt{e_{kl}(\mathbf{r})e_{kl}(\mathbf{r})} \right) e_{ij}(\mathbf{r}) + 2 \sum_{s=1}^n [\mu_s] \sum_{\alpha=1}^{s_\alpha} \chi_{s,\alpha}(\mathbf{r}) e_{ij}(\mathbf{r}),$$

$$\sigma_{pp}(\mathbf{r}) = 3K_m \varepsilon_{pp}(\mathbf{r}) + 3 \sum_{s=1}^n [K_s] \sum_{\alpha=1}^{s_\alpha} \chi_{s,\alpha}(\mathbf{r}) \varepsilon_{pp}(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Здесь $[\mu_s] = \mu_s \left(\sqrt{e_{kl}(\mathbf{r}) e_{kl}(\mathbf{r})} \right) - \mu_m \left(\sqrt{e_{kl}(\mathbf{r}) e_{kl}(\mathbf{r})} \right)$, $[K_s] = K_s - K_m$. Линеаризуем уравнения (2), пренебрегая флуктуациями деформациями в пределах объемов матрицы и объемов эллипсоидальных включений конфигураций s , положив $\Lambda_{m,s} = \sqrt{\langle e_{kl} \rangle_{m,s} \langle e_{kl} \rangle_{m,s}}$.

Запишем уравнения (2) в виде

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = 2\mu_m \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) + \delta_{ij} \lambda_m \varepsilon_{pp}(\mathbf{r}) + 2 \sum_{s=1}^n [\mu_s] \sum_{\alpha=1}^{s_\alpha} \chi_{s,\alpha}(\mathbf{r}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) + \delta_{ij} \sum_{s=1}^n [\lambda_s] \sum_{\alpha=1}^{s_\alpha} \chi_{s,\alpha}(\mathbf{r}) \varepsilon_{pp}(\mathbf{r}). \quad (3)$$

Здесь $\lambda_m = K_m - \frac{2}{3}\mu_m$, $\lambda_s = K_s - \frac{2}{3}\mu_s$, $[\lambda_s] = \lambda_s - \lambda_m$. После осреднения по полному объему композиционного материала уравнения (3) преобразуются к виду:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = 2\mu_m \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \delta_{ij} \lambda_m \langle \varepsilon_{pp} \rangle + 2 \sum_{s=1}^n [\mu_s] \sum_{\alpha=1}^{s_\alpha} c_{s,\alpha} \langle \varepsilon_{ij} \rangle_{s,\alpha} + \delta_{ij} \sum_{s=1}^n [\lambda_s] \sum_{\alpha=1}^{s_\alpha} c_{s,\alpha} \langle \varepsilon_{pp} \rangle_{s,\alpha}, \quad (4)$$

где $\sum_{\alpha=1}^{s_\alpha} c_{s,\alpha} \langle \varepsilon_{ij} \rangle_{s,\alpha} = c_s \langle \varepsilon_{ij} \rangle_s$. Для нахождения макроскопического закона деформирования необходимо выразим величины $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_s$ через макроскопические деформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$. Присоединим к уравнениям (3) уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{r}) = 0 \quad (5)$$

и формулы Коши

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [\mu_{i,j}(\mathbf{r}) + u_{j,i}(\mathbf{r})], \quad (6)$$

связывающие компоненты тензора деформаций с компонентами вектора перемещений, и граничные условия $\sigma_{ij}(\mathbf{r})|_s = \langle \sigma_{ij} \rangle$, $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})|_s = \langle \varepsilon_{ij} \rangle$, условия выражающие отсутствие флуктуаций полей напряжений и деформаций на границе объема композиционного материала.

Подставляя последовательно в уравнения равновесия (5) определяющие соотношения (3) и формулы Коши (6), записанные во флуктуациях величин, получим систему уравнений равновесия в перемещениях:

$$\mu_m u_{i,pp}' + \left(K_m - \frac{1}{3} \mu_m \right) u_{p,pi}' - \tau_{i,pp}' = 0, \quad (7)$$

$$\tau_{kl}(\mathbf{r}) = -2 \sum_{s=1}^n [\mu_s] \sum_{\alpha=1}^{s_\alpha} \chi_{s,\alpha}(\mathbf{r}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) - \delta_{ij} \sum_{s=1}^n [\lambda_s] \sum_{\alpha=1}^{s_\alpha} \chi_{s,\alpha}(\mathbf{r}) \varepsilon_{pp}(\mathbf{r}). \quad (8)$$

С помощью тензора Грина для неограниченного пространства

$$G_{ik}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi\mu_m} \left(\delta_{ik} r_{,pp} - \frac{3K_m + \mu_m}{3K_m + 4\mu_m} r_{,ik} \right)$$

заменяем систему уравнений (7) системой интегральных уравнений

$$\varepsilon_{ij}'(\mathbf{r}) = \int_V G_{ik,lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tau_{kl}'(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1. \quad (9)$$

Умножим уравнение (9) на $\chi_{s,\alpha}'(\mathbf{r})$ и осредним по полному объему. В результате получим

$$\langle \chi_{s,\alpha}' \varepsilon_{ij}' \rangle = \int_V G_{ik,lj}(\mathbf{r}_1) \langle \chi_{s,\alpha}' \tau_{kl}'(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) \rangle d\mathbf{r}_1 \quad (10)$$

Будем считать, что корреляционная функция имеет вид

$$\langle \chi_{s,\alpha}'(\mathbf{r}) \tau_{kl}'(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) \rangle = f_{kl}^{(s,\alpha)} \left(\frac{x_1^2}{[a_1^{(s)}]^2} + \frac{x_2^2}{[a_2^{(s)}]^2} + \frac{x_3^2}{[a_3^{(s)}]^2} \right),$$

где $a_1^{(s)}$, $a_2^{(s)}$, $a_3^{(s)}$ - полуоси эллипсоида. В этом случае интегралы (10) вычисляются точно и их

значения выражаются формулой

$$\langle \chi_{s,\alpha} \epsilon_{ij}' \rangle = \frac{c_{s,\alpha}}{2\mu_m} Z_{ijkl}^{(s,\alpha)} (\langle \tau_{kl} \rangle_{s,\alpha} - \langle \tau_{kl} \rangle). \quad (11)$$

где $Z_{ijkl}^{(s,\alpha)} = S_{ijkl}^{(s,\alpha)} - \delta_{ij} \frac{v_m}{1+v_m} S_{ppkl}^{(s,\alpha)}$; v_m - коэффициент Пуассона; $v_m = \frac{3K_m - 2\mu_m}{2(3K_m + \mu_m)}$; $S_{ijkl}^{(s,\alpha)}$ - тензор

Эшелби, записанный в лабораторной системе координат эллипсоидов направления α [1].

Подставляя в уравнение (11) значения

$$\langle \tau_{kl} \rangle_{s,\alpha} = -2[\mu_s] \langle \epsilon_{kl} \rangle_{s,\alpha} - \delta_{kl} [\lambda_s] \langle \epsilon_{pp} \rangle_{s,\alpha}, \quad \langle \tau_{kl} \rangle = -2 \sum_{s=1}^n [\mu_s] \sum_{\alpha=1}^{s_\alpha} c_{s,\alpha} \langle \epsilon_{kl} \rangle_{s,\alpha} - \delta_{kl} \sum_{s=1}^n [\lambda_s] \sum_{\alpha=1}^{s_\alpha} c_{s,\alpha} \langle \epsilon_{pp} \rangle_{s,\alpha} \quad (12)$$

и воспользовавшись соотношением

$$\langle \epsilon_{ij} \rangle_{s,\alpha} = \langle \epsilon_{ij} \rangle + c_{s,\alpha}^{-1} \langle \chi_{s,\alpha} \epsilon_{ij}' \rangle, \quad (13)$$

получим

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_{ij} \rangle_{s,\alpha} = & \langle \epsilon_{ij} \rangle + \frac{Z_{ijkl}^{(s,\alpha)}}{2\mu_m} \left(2 \sum_{q=1}^n [\mu_q] c_q \langle \epsilon_{kl} \rangle_q + \delta_{kl} \sum_{q=1}^n [\lambda_q] c_q \langle \epsilon_{pp} \rangle_q \right) - \\ & - \frac{Z_{ijkl}^{(s,\alpha)}}{2\mu_m} \left(2[\mu_s] \langle \epsilon_{kl} \rangle_{s,\alpha} + \delta_{kl} [\lambda_s] \langle \epsilon_{pp} \rangle_{s,\alpha} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $Z_{ijkl}^{(s,\alpha)} = S_{ijkl}^{(s,\alpha)} - \delta_{ij} \frac{v_m}{1+v_m} S_{ppkl}^{(s,\alpha)}$, $S_{ijkl}^{(s,\alpha)}$ - компоненты тензора Эшелби, записанные в лабораторной системе координат эллипсоидальных включений направления α .

Вводя обозначения

$$P_{ijkl}^{(s,\alpha)} = \frac{1}{2\mu_m} [2[\mu_s] Z_{ijkl}^{(s,\alpha)} + \delta_{kl} [\lambda_s] Z_{ijpp}^{(s,\alpha)}], \quad Q_{ijkl}^{(s,\alpha)} = [I_{ijkl} + P_{ijkl}^{(s,\alpha)}]^{-1},$$

перепишем уравнения (14) в виде

$$\langle \epsilon_{ij} \rangle_{s,\alpha} = (2[\mu_s] + \delta_{kl} [\lambda_s])^{-1} Q_{ijpq}^{(s,\alpha)} P_{pqkl}^{(s,\alpha)} \sum_{q=1}^n c_q (2[\mu_q] + \delta_{kl} [\lambda_q]) \langle \epsilon_{kl} \rangle_q + Q_{ijkl}^{(s,\alpha)} \langle \epsilon_{kl} \rangle. \quad (15)$$

Умножим уравнения (15) на концентрации $c_{s,\alpha}$ и просуммируем по α , учитывая, что

$$Q_{ijpq}^{(s,\alpha)} P_{pqkl}^{(s,\alpha)} = I_{ijkl} - Q_{ijkl}^{(s,\alpha)}.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_{ij} \rangle_{s,\alpha} = & (2[\mu_s] + \delta_{kl} [\lambda_s])^{-1} c_s I_{ijkl} \sum_{q=1}^n c_q (2[\mu_q] + \delta_{kl} [\lambda_q]) \langle \epsilon_{kl} \rangle_q - \\ & - (2[\mu_s] + \delta_{kl} [\lambda_s])^{-1} \sum_{s=1}^n c_{s,\alpha} Q_{ijkl}^{(s,\alpha)} \sum_{q=1}^n c_q (2[\mu_q] + \delta_{kl} [\lambda_q]) \langle \epsilon_{kl} \rangle_q \sum_{s=1}^n c_{s,\alpha} Q_{ijkl}^{(s,\alpha)} \langle \epsilon_{kl} \rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

Введем обозначения

$$K_{ijkl}^{(s)} = \sum_{\alpha=1}^{s_\alpha} c_{s,\alpha} Q_{ijkl}^{(s,\alpha)}$$

и перепишем (16) в виде

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_{ij} \rangle_{s,\alpha} = & c_s (2[\mu_s] + \delta_{kl} [\lambda_s])^{-1} I_{ijkl} \sum_{q=1}^n c_q (2[\mu_q] + \delta_{kl} [\lambda_q]) \langle \epsilon_{kl} \rangle_q - \\ & - (2[\mu_s] + \delta_{kl} [\lambda_s])^{-1} K_{ijkl}^{(s)} \sum_{q=1}^n c_q (2[\mu_q] + \delta_{kl} [\lambda_q]) \langle \epsilon_{kl} \rangle_q + K_{ijkl}^{(s)} \langle \epsilon_{kl} \rangle. \end{aligned} \quad (17)$$

Умножим (17) на $(2[\mu_s] + \delta_{kl} [\lambda_s])$ и просуммируем полученные по s . Получим

$$(c_m I_{ijkl} + \sum_{s=1}^n K_{ijkl}^{(s)}) \sum_{p=1}^n (2[\mu_p] + \delta_{kl} [\lambda_p]) c_p \langle \epsilon_{kl} \rangle_p = \sum_{s=1}^n (2[\mu_s] + \delta_{kl} [\lambda_s]) K_{ijkl}^{(s)} \langle \epsilon_{kl} \rangle. \quad (18)$$

Из (18) следует, что

$$\sum_{s=1}^n (2[\mu_s] + \delta_{ij} [\lambda_s]) c_s \langle \varepsilon_{ij} \rangle_s = a_{ijkl} \langle \varepsilon_{kl} \rangle. \quad (19)$$

Здесь

$$a_{ijkl} = (c_m I_{ijmr} + \sum_{s=1}^n K_{ijmr}^{(s)})^{-1} \sum_{s=1}^n (2[\mu_s] + \delta_{kl} [\lambda_s]) K_{mrkl}^{(s)}.$$

Макроскопический закон упругопластического деформирования композиционного материала имеет вид

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = E_{ijkl}^* (\Lambda_m, \Lambda_1, \dots, \Lambda_n) \langle \varepsilon_{kl} \rangle, \quad (20)$$

где $E_{ijkl}^* = 2\mu_m I_{ijkl} + \lambda_m \delta_{ij} \delta_{kl} + a_{ijkl}$ - эффективный тензор модулей пластичности.

Если включения состоят из одного материала, то из (18) получаем

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_f = (I_{ijmr} + c_f R_{ijmr})^{-1} R_{mrkl}. \quad (21)$$

Здесь $R_{ijkl} = \left(\sum_{s=1}^n K_{mrkl}^{(s)} \right) / c_m c_f$.

Если эллипсоидальные включения ориентированы равномерно $c_{s,1} = c_{s,2} = \dots = c_{s,s_a}$, то тензоры четвертого ранга $K_{ijkl}^{(s)} = \sum_{\alpha=1}^{s_a} c_{s,\alpha} Q_{ijkl}^{(s,\alpha)}$ будут изотропными и их общее представление будет иметь вид:

$$K_{ijkl}^{(s)} = c_s (\alpha_s I_{ijkl} - \beta_s \delta_{ij} \delta_{kl}), \quad \alpha_s = \frac{1}{15} [3Q_{ppqq}^{(s)} - Q_{ppqq}^{(s)}], \quad \beta_s = \frac{1}{15} [Q_{ppqq}^{(s)} - 2Q_{ppqq}^{(s)}]. \quad (22)$$

Подставляя эти соотношения в тензорное уравнение (20) и выделяя объемную и девиаторную части, находим деформации, осредненные по объемам матрицы и включений:

$$\langle e_{ij} \rangle_s = \frac{\alpha_s}{c_m + \sum_{s=1}^n c_s \alpha_s} \langle e_{ij} \rangle, \quad \langle \varepsilon_{pp} \rangle_s = \frac{\gamma_s}{c_m + \sum_{s=1}^n c_s \gamma_s} \langle \varepsilon_{pp} \rangle, \quad \langle e_{ij} \rangle_m = \frac{1}{c_m + \sum_{s=1}^n c_s \alpha_s} \langle e_{ij} \rangle, \quad (23)$$

где $\gamma_s = \alpha_s - 3\beta_s$.

Макроскопический закон упругопластического деформирования хаотически армированного композиционного материала имеет вид:

$$\langle s_{ij} \rangle = 2\mu^* (\Lambda_m, \Lambda_1, \dots, \Lambda_n) \langle e_{ij} \rangle, \quad \langle \sigma_{pp} \rangle = 3K^* (\Lambda_m, \Lambda_1, \dots, \Lambda_n) \langle \varepsilon_{pp} \rangle. \quad (24)$$

Эффективные тензоры пластичности вычисляются по формулам:

$$\mu^* = \mu_m + \frac{\sum_{s=1}^n [\mu_s] c_s \alpha_s}{c_m + \sum_{s=1}^n c_s \alpha_s}, \quad K^* = K_m + \frac{\sum_{s=1}^n [K_s] c_s \gamma_s}{c_m + \sum_{s=1}^n c_s \gamma_s}. \quad (25)$$

Из правила смесей следуют уравнения для определения параметров линеаризации

$$\Lambda_s = \frac{\alpha_s}{c_m + \sum_{s=1}^n c_s \alpha_s} e, \quad \Lambda_m = \frac{1}{c_m + \sum_{s=1}^n c_s \alpha_s} e. \quad (26)$$

Параметры линеаризации необходимо вычислять по формулам (26) после задания вида функций $\mu(\Lambda_{m,s})$ на основе экспериментальных данных, вычисляя инварианты α_s , β_s , полученные после обращения тензоров $I_{ijkl} + P_{ijkl}^{(s)}$.

Полученные соотношения можно применить для нахождения эффективных механических характеристик многокомпонентных матричных хаотически армированных композиционных материалов, ослабленных различными дефектами – пустотами, порами, трещинами эллипсоидальной формы.

Пусть последний компонент композиционного материала представляет собой поры, имеющие

форму эллипсоидов вращения. Устремляя параметр $\omega = \frac{a_1^{(n+1)}}{a_2^{(n+1)}}$, равный отношению главных полуосей эллипсоида, к нулю, получим композиционный материал, ослабленный круговыми хаотически ориентированными в матрице плоскими трещинами.

Эффективные модули такого композиционного материала вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}\mu^* &= \mu_m + \frac{\sum_{s=1}^n [\mu_s] c_s \alpha_s}{c_m + \sum_{s=1}^n c_s \alpha_s + c_0 \alpha_0} - \frac{\mu_m c_0 \alpha_0}{c_m + \sum_{s=1}^n c_s \alpha_s + c_0 \alpha_0}, \\ K^* &= K_m + \frac{\sum_{s=1}^n [K_s] c_s \gamma_s}{c_m + \sum_{s=1}^n c_s \gamma_s + c_0 \gamma_0} - \frac{K_m c_0 \gamma_0}{c_m + \sum_{s=1}^n c_s \gamma_s + c_0 \gamma_0}.\end{aligned}\quad (27)$$

Здесь c_0 - концентрация трещин. Отсюда при малой концентрации c_0 в предельном случае получаются формулы для определения эффективных модулей тела, ослабленного невзаимодействующими трещинами [2]:

$$\frac{\mu^*}{\mu_m} = 1 - c_0 \alpha_0, \quad \frac{K^*}{K_m} = 1 - c_0 \gamma_0, \quad (28)$$

где $\alpha_0 = \frac{8}{15\pi} \frac{(1-\nu_m)(5-\nu_m)}{2-\nu_m}$, $\gamma_0 = \frac{4}{3\pi} \frac{1-\nu_m^2}{1-2\nu_m}$, $c_0 = \frac{4}{3} \pi n a^3$, n - числовая концентрация трещин [3].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кристенсен Р. Введение в механику композитов / Пер. с англ. М.: Мир, 1982. С. 334.
2. Салганик Р.Л. Механика тел с большим числом трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 4. С. 149-158.
3. Левин В.М. К определению эффективных упругих модулей композитных материалов // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220, № 5. С. 1042-1045.

Поступила 14.12.2003 г.