Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Дилигенский, В. В. Панормов, Синтез и идентификация математических моделей производственно-экономических систем, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 27, 57–61

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu273>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 16:59:45

Математическое моделирование

УДК 620.9

Н.В. Дилигенский, В.В. Панормов

СИНТЕЗ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРОИЗВОДСТВЕННО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается вариант синтеза и идентификации математической модели производственно-экономической системы с использованием класса производственных функций на примере промышленного комплекса Самарской области.

Экономико-математические методы и модели в настоящее время являются распространенным и эффективным средством исследования закономерности протекания экономических процессов и поведения экономических систем.

В качестве объекта исследования выбрана одна из наиболее развитых отраслей промышленности Самарской области – электроэнергетика. Объектом моделирования является процесс преобразования ресурсов в конечный продукт. При этом моделируемый объект рассматривался как единое целое, без учета его организационной структуры.

Целью исследования стало построение математической модели на основе производственной функции (ПФ) Кобба-Дугласа с учетом научно-технического прогресса (НТП) и определение характеристик производственного процесса через соответствующие параметры ПФ. Следует особо подчеркнуть наличие объективной, устойчивой и закономерной связи между входными ресурсами и объемом выпуска продукции относительно экономической системы любого уровня, формы и способа организации производственных отношений, описываемой классом ПФ. Поскольку мы рассматриваем достаточно большую систему, то здесь в большой степени проявляется свойство агрегирования данных, и тогда на основании литературных источников [1] все производственные ресурсы в данном случае можно охарактеризовать двумя макроэкономическими показателями: количеством овеществленного (прошлого) труда – основные производственные фонды или капитал и живого труда (численность трудовых ресурсов) – труд.

В качестве исходной статистической информации возьмем данные о показателях выпуска продукции, капитала и труда за период с 1965 по 1997 годы, приведенные в работе [2]. Обозначим уровни рядов динамики выпуска продукции Q_i (тыс. руб.), капитала K_i (тыс. руб.), труда L_i (десят. чел.) и лет T_i (четырёхзначных чисел, соответствующих номеру года), где $i = 0, n$, n – количество членов в ряде динамики.

Выберем модель зависимости между выпуском и затратами труда и капитала в виде ПФ Кобба-Дугласа с учетом НТП:

$$Q = A \cdot K^{\beta_1} \cdot L^{\beta_2} \cdot e^{\beta_3 t} \cdot \varepsilon, \quad (1)$$

где A – масштабный коэффициент, β_1 – эластичность выпуска продукции Q по капиталу K , β_2 – эластичность выпуска продукции Q по труду L , β_3 – темп прироста выпуска продукции Q под влиянием НТП, ε – случайный «остаточный» компонент, обусловленный ошибками спецификации, измерения и пр.

Преобразуем нелинейную модель (1) к линейному виду по параметрам. Для этого прологарифмируем обе части уравнения (1):

$$\ln Q = \ln A + \beta_1 \ln K + \beta_2 \ln L + \beta_3 \cdot t + \ln \varepsilon.$$

Обозначим для удобства $Y = \ln Q$, $\beta_0 = \ln A$, $X_0 = 1$, $X_1 = \ln K$, $X_2 = \ln L$, $X_3 = t$, $u = \ln \varepsilon$. В результате получим линейную модель вида:

$$Y = \beta_0 X_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 \cdot X_3 + u, \quad (2)$$

где Y – отклик; X_0, X_1, X_2 и X_3 – факторы; u – случайный «остаточный» компонент. Обозначим количество факторов через m ($m = 4$).

Исследуем тесноту связи, а именно, линейную корреляционную зависимость между откликом и факторами, являющимися случайными величинами. При этом понадобятся динамические ряды лет T_i , а также логарифмированных рядов выпуска продукции Q_i , значений капитала K_i и труда L_i :

$$X_{i,0} = 1, X_{i,1} = \ln K_i, X_{i,2} = \ln L_i, X_{i,3} = T_i, Y_i = \ln Q_i.$$

Найдем выборочное среднее факторов по данным [2] и отклика:

$$M_{X_j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{i,j}, \text{ где } j = \overline{0, m-1}; M_Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i;$$

$$M_{X_0} = 1; M_{X_1} = 7,308; M_{X_2} = 7,001; M_{X_3} = 1981; M_Y = 6,278.$$

Выборочная дисперсия и выборочное среднеквадратичное отклонение факторов и отклика:

$$S_{X_j}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{i,j} - M_{X_j})^2, \text{ где } j = \overline{0, m-1}; S_Y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - M_Y)^2;$$

$$S_{X_0}^2 = 0; S_{X_1}^2 = 0,168; S_{X_2}^2 = 0,059; S_{X_3}^2 = 93,5; S_Y^2 = 0,147;$$

$$S_{X_0} = 0; S_{X_1} = 0,410; S_{X_2} = 0,242; S_{X_3} = 9,67; S_Y = 0,384.$$

Отношение среднего квадратичного отклонения к выборочному среднему характеризуют разброс наблюдаемых значений факторов и отклика вокруг среднего значения:

$$\mu_{X_j} = \frac{S_{X_j}}{M_{X_j}}, \text{ где } j = \overline{0, m-1}; \mu_Y = \frac{S_Y}{M_Y};$$

$$\mu_{X_0} = 0; \mu_{X_1} = 0,056; \mu_{X_2} = 0,035; \mu_{X_3} = 4,881 \cdot 10^{-3}; \mu_Y = 0,061.$$

Видно, что относительный разброс отклика Y превышает разброс всех факторов X_0, X_1, X_2 и X_3 .

Вычислим парные линейные коэффициенты корреляции и t -статистики по ним:

$$r_{j,0} = r_{0,j} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{i,j} - M_{X_j})(Y_i - M_Y)}{S_{X_j} S_Y}, j = \overline{0, m-1};$$

$$r_{j,k} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{i,j} - M_{X_j})(X_{i,k} - M_{X_k})}{S_{X_j} S_{X_k}}, j = \overline{1, m-1}, k = \overline{1, m-1};$$

$$t_{j,k} = r_{j,k} \cdot \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-(r_{j,k})^2}}, j = \overline{0, m-1}, k = \overline{0, m-1}, j \neq k. \quad (3)$$

Составим матрицу парных линейных коэффициентов корреляции (в скобках – значение t -статистик):

$$r = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0,851(9,028) & 0,439(2,720) & 0,814(7,791) & Y \\ 0,851(9,028) & 1 & 0,780(6,936) & 0,960(19,184) & X_1 \\ 0,439(2,720) & 0,780(6,936) & 1 & 0,849(8,947) & X_2 \\ 0,814(7,791) & 0,960(19,184) & 0,849(8,947) & 1 & X_3 \\ \hline Y & X_1 & X_2 & X_3 & \end{array} \right).$$

Коэффициент корреляции является количественным показателем того, насколько сильно зависят между собой факторы и отклик. Если абсолютное значение коэффициента корреляции между двумя случайными величинами равно 1, то они линейно зависимы.

Вывод о статистической значимости коэффициента корреляции $r_{j,k}$ (отвергается гипотеза $H_0 : r_{j,k} = 0$) делается при условии, что $|t_{j,k}| > t_{cnf}$, где t_{cnf} – соответствующее табличное значение t -распределения Стьюдента с $(n-2)$ степенями свободы. При уровне доверия $p = 0,95$ (95 %) и $(n-2) = 31$ – степенях свободы, значение t -распределения Стьюдента: $t_{cnf} = 2,040$.

Коэффициенты корреляции свидетельствуют о сильной прямой статистически значимой связи между натуральным логарифмом выпуска продукции Y и натуральным логарифмом капитала X_1 , между натуральным логарифмом выпуска продукции Y и годом X_3 , между логарифмом капитала X_1 и логарифмом труда X_2 , между логарифмом капитала X_1 и годом X_3 , между логарифмом труда X_2 и годом X_3 , а также о слабой статистически значимой связи между натуральным логарифмом выпуска продукции Y и натуральным логарифмом труда X_2 .

Коэффициенты регрессионного уравнения (2), найденные с помощью метода наименьших квадратов, имеют значения:

$$\beta_0 = -68,841; \beta_1 = 0,482; \beta_2 = -1,324; \beta_3 = 0,041.$$

Таким образом, получаем, что масштабный коэффициент $A = e^{-68,841}$; эластичность выпуска продукции Q по капиталу $K - \beta_1 = 0,482$; эластичность выпуска продукции Q по труду $L - \beta_2 = -1,324$; темп прироста выпуска продукции Q под влиянием НТП – $\beta_3 = 0,041$. Особое внимание следует обратить на значение эластичность производства $\beta_1 + \beta_2 = -0,842$. Значение этого показателя меньше единицы и свидетельствует об убывающей отдаче на масштаб производства.

Стандартизованные коэффициенты регрессии: $b_j = \beta_j \frac{\sigma_{X_j}}{\sigma_Y}$ ($j = \overline{1, m-1}$), имеющие значения $b_1 = 0,515$; $b_2 = -0,837$; $b_3 = 1,029$, позволяют ранжировать факторы по силе их воздействия на результат, что позволяет произвести отсев факторов – исключить из модели факторы с наименьшими значениями b_j .

Видно, что с ростом года на одну сигму при неизменном натуральном логарифме капитала и натуральном логарифме труда натуральный логарифм выпуска продукции увеличивается в среднем на 1,029 сигмы. Порядок факторов по направлению убывания их воздействия на натуральный логарифм выпуска продукции следующий: год, натуральный логарифм труда, натуральный логарифм капитала.

Мера суммарной погрешности, равная остаточной дисперсии S_R^2 , и стандартная ошибка уравнения, равная остаточному среднеквадратичному отклонению S_R , определяется соотношением

$$S_R^2 = \frac{1}{n-4} \sum_{i=1}^n u_{Ri}^2 = 0,015; S_R = 0,122, \text{ где } u_{Ri} = Y_{Ri} - Y, (i = \overline{0, n}).$$

Относительная погрешность уравнения регрессии $v_R = S_R / M_Y = 1,941$ %. Если значение этой величины мало и отсутствует автокорреляция остатков, то прогнозные качества оцененного регрессионного уравнения высоки.

Меры погрешности и стандартные ошибки коэффициентов уравнения регрессии

$$S_{\beta_j}^2 = S_P^2 \cdot \left((X^T \cdot X)^{-1} \right)_{j,j} (j = \overline{0, m-1})$$

имеют значения: $S_{\beta_0}^2 = 301,577$; $S_{\beta_1}^2 = 0,038$; $S_{\beta_2}^2 = 0,030$; $S_{\beta_3}^2 = 9,521 \cdot 10^{-5}$; $S_{\beta_0} = 17,366$; $S_{\beta_1} = 0,194$; $S_{\beta_2} = 0,173$; $S_{\beta_3} = 9,757 \cdot 10^{-3}$.

Для относительных погрешностей коэффициентов уравнения регрессии и t -статистик по ним имеем:

$$v_{\beta_j} = \frac{S_{\beta_j}}{\beta_j} \quad (j = \overline{0, m-1}); \quad t_{\beta_j} = \frac{\beta_j}{S_{\beta_j}} \quad (j = \overline{0, m-1}); \quad v_{\beta_0} = -0,252\%; \quad v_{\beta_1} = 0,403\%; \quad v_{\beta_2} = -0,131\%; \\ v_{\beta_3} = 0,239\%; \quad t_{\beta_0} = -3,964; \quad t_{\beta_1} = 2,483; \quad t_{\beta_2} = -7,640; \quad t_{\beta_3} = 4,184.$$

Вывод о статистической значимости коэффициента β_j ($j = \overline{0, m-1}$) делается при условии, что $|t_{\beta_j}| > t_{cnf}$, где t_{cnf} – соответствующее табличное значение t -распределения Стьюдента с $n-4 = 29$ степенями свободы.

При уровне доверия $p = 0,95$ (95 %) и $(n-4) = 29$ степенях свободы значение t -распределения Стьюдента: $t_{cnf} = 2,040$. Коэффициенты β_0 , β_1 , β_2 и β_3 являются статистически значимыми на доверительном уровне 98%.

Стандартные ошибки коэффициентов используются также для оценки статистической значимости коэффициентов при помощи t -критерия Стьюдента. При уровне доверия $p = 0,95$ (95 %) и $(n-4) = 29$ степенях свободы значение t -распределения Стьюдента: $t_{cnf} = 2,045$.

Доверительные интервалы для коэффициентов уравнения регрессии

$$\beta_j - t_{cnf} \cdot S_{\beta_j} \leq \beta_j \leq \beta_j + t_{cnf} \cdot S_{\beta_j} \quad (j = \overline{0, m})$$

имеют значения: $-104,359 \leq \beta_0 \leq -33,324$; $0,085 \leq \beta_1 \leq 0,879$; $-1,678 \leq \beta_2 \leq -0,969$; $0,021 \leq \beta_3 \leq 0,061$.

При нахождении уравнения регрессии использовались динамические ряды. Для них, обычно, характерно присутствие явления автокорреляции остатков. Оно состоит в том, что в любой из остатков u_{Ri} не является случайной величиной, а зависит от величины предыдущего остатка u_{Ri-1} . В результате при использовании уравнения регрессии могут возникнуть большие ошибки. Для определения наличия или отсутствия автокорреляции применяется критерий Дарбина-Уотсона [3]:

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^n (u_{Ri} - u_{Ri-1})^2}{\sum_{i=1}^n u_{Ri}^2} = 0,829.$$

Возможные значения критерия DW находятся в интервале от 0 до 4. Если автокорреляция остатков отсутствует, то $DW = 2$. Для уравнения (2) значение критерия Дарбина-Уотсона 0,829 показывает присутствие автокорреляции.

Для того, чтобы получить адекватную оценку того, насколько хорошо вариация результирующего признака объясняется вариацией нескольких факторных признаков, применяют коэффициент детерминации R^2 :

$$R^2 = 1 - \frac{S_R^2}{S_Y^2} \cdot \frac{n-1}{n-m} = 0,889.$$

Если существует линейная связь между откликом и факторами, то коэффициент R^2 близок к 1. Таким образом, 88,9% вариации отклика (логарифм выпуска продукции) объясняется вариацией факторов (логарифм труда, логарифм капитала и год). Остальные 11,1% вариации отклика объясняются факторами, неучтенными в модели. Величина коэффициента детерминации достаточно велика, следовательно, в модели (2) учтены наиболее существенные факторы.

Классическая линейная модель множественной регрессии требует постоянства дисперсии случайной ошибки u (имеется в виду возможное поведение случайного члена до того, как сделана выборка).

Рассмотрим вопрос тестирования выборки случайной ошибки u_{Ri} на наличие гомоскедастичности (постоянства дисперсии). Если имеется обширная выборка, то можно воспользоваться стандартным критерием однородности дисперсии Бартлетта.

Расчленим выборку на m_{Bart} независимых групп и вычислим величины

$$Q_{Bart1} = n \ln \left(\sum_{i=1}^{m_{Bart}} \frac{n_{Bart i}}{n} S_{Bart i}^2 \right) - \sum_{i=1}^{m_{Bart}} n_{Bart i} \ln S_{Bart i}, \quad Q_{Bart2} = 1 + \frac{1}{3(m_{Bart} - 1)} \left(\sum_{i=1}^{m_{Bart}} \frac{1}{n_{Bart i}} - \frac{1}{n} \right),$$

где $\sum_{i=1}^{m_{Bart}} n_{Bart i} = n$, $n_{Bart i}$ – число наблюдений в i -ой группе, $S_{Bart i}$ – дисперсия ошибки в i - группе. Величина Q_{Bart1}/Q_{Bart2} будет приближенно удовлетворять распределению χ^2 с $(m_{Bart} - 1)$ степенями свободы. Если вычисленное по выборке значение χ^2 меньше критического χ_{cnf}^2 , то гипотеза об однородности выборочной дисперсии принимается, в противном случае отклоняется. Тогда при $m_{Bart} = 3$ получаем:

$$n = 33; n_{Bart1} = n_{Bart2} = n_{Bart3} = 11; S_{Bart1} = 0,106; S_{Bart2} = 0,132; S_{Bart3} = 0,103;$$

$$Q_{Bart1} = 0,812; Q_{Bart2} = 1,040; \chi_{Bart}^2 = Q_{Bart1}/Q_{Bart2} = 0,780.$$

При уровне значимости $p = 0,05$ (5%) и $m_{Bart} - 1 = 2$ степенях свободы критическое значение $\chi_{cnf}^2 = 5,991$. Следовательно, гипотеза об однородности выборочной дисперсии принимается.

В итоге получили следующую производственную функцию:

$$Q_R = K^{0,482} \cdot L^{-1,324} \cdot e^{-68,841 + 0,041t}$$

Графики исходных Q и расчетных Q_R значений выпуска продукции, а также отклонение $\Delta_R = |Q - Q_R|$ для временного интервала с 1965 по 1997 годы представлены на рис.

Таким образом, в результате проведенного исследования была получена и идентифицирована математическая модель зависимости производства продукции от значений показателей капитальных и людских ресурсов на основе ПФ Кобба-Дугласа с учетом НТП, которая позволила определить характеристики рассматриваемой системы: эластичность выпуска по отношению к изменению каждого из ресурсов, эластичностью производства, среднюю производительность каждого из ресурсов.

Р и с. График производственной функции:
Q - —; Q_R - ----; Δ_R - ····

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Клейнер Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение. М.: Финансы и статистика, 1986. 239 с.
2. Орлова Е.Ю. Структурно-параметрическая идентификация региональных технологических производств как объектов управления: Дис. ... канд. техн. наук: Самара, 1999. 204 с.
3. Замков О.О., Толстомятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. М.: МГУ, 1997. 368 с.

Поступила 18.11.2003 г.