Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Андреев, Е. Н. Огородников, О корректности начальных краевых задач для одного гиперболического уравнения с вырождением порядка и инволютивным отклонением, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2000, выпуск 9, 32–36

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu28>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 10:20:03

О КОРРЕКТНОСТИ НАЧАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ ПОРЯДКА И ИНВОЛЮТИВНЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ

Рассмотрено модельное вырождающееся дифференциальное уравнение гиперболического типа с инволютивным отклонением по обоим переменным в младших производных. Указаны корректные по Адамару постановки задач типа классической и видоизмененной задач Коши, выявлены области влияния коэффициентов при младших производных этого уравнения на корректность указанных задач, обоснована непрерывная зависимость решений от параметра ε при инволютивных членах в том смысле, что, устремляя ε к нулю в этих решениях, мы приходим к известным классическим постановкам задач и их решениям для невозмущенного инволютивными слагаемыми уравнения.

Пусть Γ – замкнутая или разомкнутая кривая, в комплексной плоскости или на плоскости действительных переменных x, y .

Гомеоморфизм

$$\alpha^2(t) = \alpha(\alpha(t)) = t, t \in \Gamma \quad (1)$$

носит название карлемановского сдвига (инволютивного отклонения) [1].

Обыкновенные дифференциальные уравнения, в которых наряду с искомой функцией $y(t), t \in \Gamma \subset \mathbb{R}$ присутствует $y(\alpha(t))$ получили название уравнений с отклоняющимся аргументом. Уравнение, содержащее сдвиг Карлемана, является некоторым модельным уравнением со знакопеременным отклонением (при $t < t^*$ уравнение с опережающим, а при $t > t^*$ - с запаздывающим аргументом, где t^* - неподвижная точка отображения $\alpha(t)$). Подробнее с историей вопроса, а также с библиографией можно ознакомиться в статье Андреева А.А. [2]. Здесь же отметим, что дифференциальные уравнения в частных производных, содержащих инволютивный сдвиг, изучены явно недостаточно. Среди первых работ по исследованию краевых задач с отклонениями в старших производных следует указать на работы Гуля И.М. [3] и Нерсисяна А.Б. [4], а также на работы [5-10].

Рассмотрим уравнение

$$y \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) (a u + \varepsilon u(\alpha, \beta)) = 0 \quad (2)$$

с действительными параметрами a и ε в области $\Omega = H_1 \cup H_2$, где

$H_1 = \{(x, y) : 0 < y < x < 1 - y\}$, $H_2 = \{(x, y) : 0 < -y < x < 1 + y\}$, $u = u(x, y)$ - искомая функция, а отображение

$$\begin{cases} \alpha(\alpha(x, y), \beta(x, y)) = x, \\ \beta(\alpha(x, y), \beta(x, y)) = y \end{cases} \quad (3)$$

гомеоморфно переводит область Ω в себя [2].

В качестве конкретного примера рассмотрим инволюцию вида

$$\begin{cases} \alpha = 1 - x, \\ \beta = -y. \end{cases} \quad (4)$$

Так как $\frac{\partial}{\partial x} u(1 - x, -y) = -\frac{\partial u}{\partial x}(1 - x, -y)$, $\frac{\partial}{\partial y} u(1 - x, -y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(1 - x, -y)$, где под $\frac{\partial u}{\partial x}(1 - x, -y)$ и $\frac{\partial u}{\partial y}(1 - x, -y)$ понимаются соответствующие частные производные $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$, вычисленные в точке $M(1 - x; -y)$, то уравнение (2) можно записать в виде

$$y \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + a \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) (1 - x, -y) = 0. \quad (5)$$

Если рассмотреть уравнение (5) в точке $M(1 - x; -y)$ и учесть, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(1-x, -y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (1-x, -y); \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(1-x, -y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} (1-x, -y), \text{ то, обозначая}$$

$$v(x, y) = u(1-x, -y), \text{ для вектор-функции } U(x, y) = (u; v)^T \text{ получим систему уравнений}$$

$$y(U_{xx} - U_{yy}) + A(U_x - U_y) = 0 \quad (6)$$

с кратными характеристиками и с симметрической матрицей $A = \begin{pmatrix} a & \varepsilon \\ \varepsilon & a \end{pmatrix}$, спектр которой $\Lambda(A) = \{a + \varepsilon, a - \varepsilon\}$.

В характеристических координатах $\xi = x - y, \eta = x + y$ система (6) приводится к виду

$$(\eta - \xi)U_{\xi\eta} + AU_{\xi} = 0 \quad (7)$$

и является системой Эйлера – Пуассона – Дарбу (ЭПД) частного (с одним нулевым матричным параметром) вида.

Начало систематических исследований систем уравнений ЭПД методом Римана было положено в работах [11-13] одного из авторов данной статьи. Эффективность этого метода во многом обуславливалась тем, что был указан явный вид матрицы Римана для системы уравнений ЭПД с двумя матричными коммутативными параметрами [14]. Для системы уравнений (7) в работе [15], в частности, получены решения задачи Коши и видоизмененной задачи Коши, исходя из общего решения соответствующего скалярного уравнения [16]. В работе [17], используя идеи и методы [12-14], решение указанных задач в области $0 < \xi < \eta < 1$ получено методом Римана. В работе [18] решение видоизмененной задачи Коши для системы уравнений (6) в области H_1 получено, исходя из решения задачи Гурса.

Рассмотрим теперь систему уравнений (6) в области $\Omega = H_1 \cup H_2$, содержащую линию вырождения порядка $y=0$.

Известно, что вырождение порядка вносит определенный аспект в проблему корректности задачи Коши [19] в том смысле, что задача с обычным для задачи Коши начальным условием $\lim_{y \rightarrow +0} U_y(x, y) = v(x)$ может оказаться не разрешимой, в то время как задача с условием $\lim_{y \rightarrow +0} K(y)U_y(x, y) = v(x)$, где $K(y)$ – некоторая, специальным образом подобранная функциональная матрица, становится корректной.

В цитированных выше работах [15,17] для системы уравнений (7) в области $0 < \xi < \eta < 1$ найдено решение задачи Коши с данными

$$U(\xi, \xi) = \tau(\xi), \xi \in [0, 1]; \quad (8)$$

$$\lim_{\eta - \xi \rightarrow +0} (\eta - \xi)^A (U_{\eta} - U_{\xi}) = v(\xi), \xi \in (0, 1), \quad (9)$$

где $(\eta - \xi)^A$ – известная функциональная матрица [20], полностью определяемая спектром $\Lambda(A)$ матрицы A ; $\Lambda(A) \subset (0, 1)$.

Записывая матрицу Римана в виде [14]

$$R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \left| \frac{\eta - \xi}{\eta - \xi_0} \right|^A = \begin{cases} \left| \frac{\eta - \xi}{\eta - \xi_0} \right|^{\alpha_1} \frac{A - \alpha_2 E}{\alpha_1 - \alpha_2} + \left| \frac{\eta - \xi}{\eta - \xi_0} \right|^{\alpha_2} \frac{A - \alpha_1 E}{\alpha_2 - \alpha_1}, & \alpha_1 \neq \alpha_2, \\ \left| \frac{\eta - \xi}{\eta - \xi_0} \right|^{\alpha} \left[E + (A - \alpha E) \ln \left| \frac{\eta - \xi}{\eta - \xi_0} \right| \right], & \alpha = \alpha_2 = \alpha_1 \end{cases} \quad (10)$$

и используя методику, изложенную в работе [12], нетрудно получить решение задачи Коши для системы уравнений (7) в области $0 < \xi < \eta < 1$ с начальным условием

$$\lim_{\eta - \xi \rightarrow -0} (\xi - \eta)^A (U_{\eta} - U_{\xi}) = v(\xi), \xi \in (0, 1) \quad (11)$$

вместо условия (9).

Анализируя полученные решения, заключаем, что регулярное [20] в $\Omega = H_1 \cup H_2$ решение задачи Коши с данными

$$U(x, 0) = \tau(x) = (\tau(x); \tau(1-x))^T, \quad x \in [0, 1], \quad (12)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} |2y|^A U_y(x, y) = v(x) = (v(x); -v(1-x))^T, \quad x \in (0, 1), \quad (13)$$

при $\Lambda(A) \subset (0,1)$, имеет вид

$$U(x, y) = \tau(x+y) - \frac{1}{2}(E-A)^{-1} \int_{x-y}^{x+y} |x+y-s|^{-A} v(s) ds. \quad (14)$$

Выделяя в формуле (14) первую компоненту вектора $U(x, y)$, в случае

$$0 < a - \varepsilon < a + \varepsilon < 1 \quad (15)$$

получим представление регулярного в области Ω решения уравнения (2):

$$u(x, y) = \tau(x+y) - \frac{1}{4(1-a-\varepsilon)} \int_{x-y}^{x+y} \frac{v(s) - v(1-s)}{|x+y-s|^{a+\varepsilon}} - \frac{1}{4(1-a-\varepsilon)} \int_{x-y}^{x+y} \frac{v(s) + v(1-s)}{|x+y-s|^{a-\varepsilon}} ds. \quad (16)$$

Начальные условия для уравнения (2) в силу формул (12) и (13) будут следующими:

$$u(x, 0) = \tau(x), x \in [0, 1], \quad (17)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[|2y|^{a+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} (u(x, y) + u(1-x, -y)) + |2y|^{a-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} (u(x, y) - u(1-x, -y)) \right] = v(x). \quad (18)$$

В силу той же формулы (13) одновременно с существованием предела в формуле (18) существует предел

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[|2y|^{a+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} (u(x, y) + u(1-x, -y)) - |2y|^{a-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} (u(x, y) - u(1-x, -y)) \right] = -v(1-x), \quad (19)$$

а тогда будут существовать их сумма и разность.

Таким образом, приходим к следующему результату.

Т е о р е м а 1. Пусть $\tau(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$, а $\mu_i(x) \in C^2(0, 1) \cap L([0, 1], (1-x)^{\lambda_i})$, $i=1, 2$. Тогда регулярное в области Ω решение уравнения (2), удовлетворяющее начальному условию (17) и условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} |2y|^{a+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} (u(x, y) + u(1-x, -y)) = \mu_1(x), x \in (0, 1); \quad (20)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} |2y|^{a-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} (u(x, y) - u(1-x, -y)) = \mu_2(x), x \in (0, 1), \quad (21)$$

при $\lambda_1 = a + \varepsilon, \lambda_2 = a - \varepsilon$ $0 < \lambda_2 < \lambda_1 < 1$, имеет вид

$$u(x, y) = \tau(x+y) - \frac{1}{4(1-a-\varepsilon)} \int_{x-y}^{x+y} \frac{\mu_1(s) ds}{|x+y-s|^{a+\varepsilon}} - \frac{1}{4(1-a+\varepsilon)} \int_{x-y}^{x+y} \frac{\mu_2(s) ds}{|x+y-s|^{a-\varepsilon}}. \quad (22)$$

Корректность задачи с условиями (17), (20) и (21) для уравнения (2) является следствием корректности задачи Коши для системы уравнений (6).

Устремляя ε к нулю в выражении (22) и обозначая сумму $v(x) = \mu_1(x) + \mu_2(x)$, которая в силу формул (20) и (21) равна $\lim_{y \rightarrow 0} |2y|^a \frac{\partial u}{\partial y}$, получаем хорошо известное решение задачи Коши для уравнения (2) без инволютивных членов:

$$u(x, y) = \tau(x+y) - \frac{1}{2(1-a)} \int_{x-y}^{x+y} \frac{v(s) ds}{|x+y-s|^a}. \quad (23)$$

С другой стороны, система уравнений (6) при $\varepsilon=0$ расщепляется на два одинаковых скалярных уравнения, каждое из которых имеет решение вида (23). Наконец, устремляя a к нулю в формуле (23), получаем классическую формулу решения задачи Коши для волнового уравнения [21] - формулу Даламбера.

Во всех случаях возможность предельного перехода под знаками интегралов гарантируется мажорантной теоремой Лебега [22].

Если $a=\varepsilon$, то матрица системы уравнений (6) $A = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = aE$, причем $E^2 = E$ идемпотентная матрица. Спектр $\Lambda(A) = \{2a; 0\}$, а решение задачи Коши с данными (12) и (13) и в этом случае имеет вид (14).

Выделяя первую компоненту вектора $U(x, y)$ в формуле (14) для функции $u = u(x, y)$, получаем решение в виде

$$u(x, y) = \tau(x+y) - \frac{1}{4(1-2a)} \int_{x-y}^{x+y} \frac{\nu(s) - \nu(1-s)}{|x+y-s|^{2a}} ds - \frac{1}{4} \int_{x-y}^{x+y} [\nu(s) + \nu(1-s)] ds. \quad (24)$$

Из структуры полученного решения заключаем, что в условиях теоремы 1 регулярное в области Ω решение задачи типа Коши для уравнения (2) с данными (17), (20) и (21) при $a = \varepsilon$ может быть найдено по формуле (22) при $\varepsilon \rightarrow a$, если только $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Все приведенные выше утверждения и построения остаются в силе, если при условии $a > 0$ величина $\varepsilon < 0$ и справедливы неравенства $0 \leq a + \varepsilon \leq a - \varepsilon < 1$. Таким образом, к теореме 1 можно сделать следующее дополнение.

Замечание к теореме 1. Теорема 1 остается в силе, если спектр вспомогательной матрицы A содержится в интервале $[0, 1)$ или, что тоже самое, параметры уравнения (2) удовлетворяют условию $0 \leq a + \varepsilon, a - \varepsilon < 1$.

На рисунке параметрическая область корректности задачи типа Коши для уравнения (2) имеет двойную штриховку.

Если же $a < 0$ или при $a \geq 0, \varepsilon > a \geq 0$, то, как показано в работах [15, 17], задача Коши для системы уравнений (7), а следовательно, и (8) становится некорректной. Однако в этих случаях будет корректна видоизмененная задача Коши с условием

$$U(x, 0) = \tau(x) = (\tau(x); \tau(1-x))^T, x \in [0, 1], \quad (25)$$

совпадающим с (12), и условием

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2} |2y|^A (U_x - U_y) = \nu(x) = (\nu(x); -\nu(1-x))^T, x \in (0, 1). \quad (26)$$

Её решение при $\Lambda(A) \subset (-\infty; 1)$ имеет вид

$$U(x, y) = \tau(x, y) - \int_{x-y}^{x+y} |x+y-s|^{-A} \nu(s) ds. \quad (27)$$

Выделяя первую компоненту вектора $U(x, y)$, получим решение видоизменённой задачи Коши для уравнения (2):

$$u(x, y) = \tau(x+y) - \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \frac{\nu(s) - \nu(1-s)}{|x+y-s|^{a+\varepsilon}} ds - \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \frac{\nu(s) + \nu(1-s)}{|x+y-s|^{a-\varepsilon}} ds. \quad (28)$$

Начальные условия для уравнения (2) в силу формул (25) и (26) будут следующими:

$$u(x, 0) = \tau(x), x \in [0, 1]; \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{4} \left[|2y|^{a+\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) (u(x, y) + u(1-x, -y)) + \right. \\ \left. + |2y|^{a-\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) (u(x, y) - u(1-x, -y)) \right] = \nu(x), x \in (0, 1). \end{aligned} \quad (30)$$

В силу формулы (26) одновременно с существованием предела в формуле (30) существует предел

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{4} \left[|2y|^{a+\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) (u(x, y) + u(1-x, -y)) - \right. \\ \left. - |2y|^{a-\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) (u(x, y) - u(1-x, -y)) \right] = -\nu(1-s), x \in (0, 1). \end{aligned} \quad (31)$$

Тогда приходим к следующей постановке задачи типа видоизмененной задачи Коши:

Т е о р е м а 2. Пусть $\tau(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, а $\mu_i(x) \in C^2(0,1) \cap L([0,1], (1-x)^{\lambda_i})$, $i=1,2$. Тогда регулярное в области Ω решение уравнения (2), удовлетворяющее начальному условию (29) и условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2} |2y|^{a+\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) (u(x, y) + u(1-x, -y)) = \mu_1(x), \quad x \in (0,1); \quad (32)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2} |2y|^{a-\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) (u(x, y) - u(1-x, -y)) = \mu_2(x), \quad x \in (0,1); \quad (33)$$

при $\lambda_1 = a + \varepsilon$, $\lambda_2 = a - \varepsilon$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in (-\infty, 1)$ имеет вид

$$u(x, y) = \tau(x+y) - \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \frac{\mu_1(s)}{|x+y-s|^{a+\varepsilon}} ds - \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \frac{\mu_2(s)}{|x+y-s|^{a-\varepsilon}} ds. \quad (34)$$

На рисунке параметрическая область корректности задачи типа видоизмененной задачи Коши для уравнения (2) представляет собой неограниченный сектор $|\varepsilon| < 1-a$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Carleman T. Sur la theorie des equations integrales et ses applications // Verhandl. des internat. Mathem. Kongr. I. (1932). Zurich. 138-151.
2. Андреев А.А. О корректности краевых задач для некоторых уравнений в частных производных с карлемановским сдвигом // Дифференциальные уравнения и их приложения: Тр. второго междунар. сем. Самара, 1998. С. 5-18.
3. Гуль И.М. Задача Коши для некоторых дифференциальных уравнений в частных производных с функциональными аргументами // Успехи мат. наук. 10:2 (64), 1955. С. 153-156.
4. Нерсисян А.Б. О задаче Коши для уравнения в частных производных с отклоняющимся аргументом // Мат. второй Всесоюз. межвуз. конф. по теории и приложениям дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Черновцы, 1968. С. 116-117.
5. Андреев А.А. О корректности начальных задач для некоторых уравнений в частных производных с отклоняющимся аргументом // Уравнения неклассического типа. Новосибирск: ИМ СОАН СССР. 1986. С. 10-14.
6. Андреев А.А., Шиндин И.П. О корректности граничных задач для одного дифференциального уравнения в частных производных с отклоняющимся аргументом // Аналитические методы в теории дифференциальных и интегральных уравнений. Куйбышев: Куйбыш. гос. ун-т, 1987. С. 3-6.
7. Андреев А.А., Шиндин И.П. О корректности граничных задач для одного дифференциального уравнения с инволюцией частного вида // Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Куйбышев: Куйбыш. гос. пед. ин-т, 1988. С. 51-53.
8. Андреев А.А., Сеницкий А.Ю. О задаче Коши для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу частного вида с отклоняющимся аргументом // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1987. С. 51-53.
9. Андреев А.А., Линьков А.В. О корректных задачах для одного модельного уравнения в частных производных с отклоняющимся аргументом // Уравнения неклассического типа. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1997. С. 3-11.
10. Линьков А.В. Обоснование Метода Фурье для краевых задач с инволютивным отклонением // Вестн. Самар. гос. ун-та. 1999. С. 60-66.
11. Андреев А.А. Об одном классе систем дифференциальных уравнений гиперболического типа. Дифференциальные уравнения // Тр. пединститутов РСФСР. Вып. 16., 1980. С. 3-5.
12. Андреев А.А. Построение элементарных решений и решение задачи Коши для уравнений и систем уравнений гиперболического типа: Дис. канд. физ.-мат. наук. Куйбышев, 1981. 100с.
13. Андреев А.А. Задача Коши для одной системы уравнений гиперболического типа с кратными характеристиками // Тр. пятой науч.-техн. конф. факультета математических знаний. №1556-82. Деп. с. 111-129.
14. Андреев А.А. О некоторых приложениях ассоциированных гиперболических функций // Дифференциальные уравнения (математическая физика): Тез. докл. участников Куйбышевского област. межвуз. науч. совещания-семинара. Куйбышев, 1984. С. 8-9.
15. Андреев А.А., Сеницкий А.Ю. О системе уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу (I) // Краевые задачи и структура решений дифференциальных уравнений. Куйбышев, 1986. С. 38-41.
16. Волкодав В.Ф. Принцип локального экстремума и его применение к решению краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными: Дис. докт. физ.-мат. наук. Казань: КГУ, 1969.
17. Сеницкий А.Ю. О системе уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу (II) // Краевые задачи для уравнений математической физики. Куйбышев, 1990. С. 61-64.
18. Огородников Е.Н., Сеницкий А.Ю. Об одной нелокальной краевой задаче для вырождающейся системы гиперболического типа // Тр. седьмой межвуз. конф. Самара: Самар. техн. ун-т, 1997. С. 60-65.
19. Бицадзе А.В. К теории одного класса уравнений смешанного типа. // Некоторые проблемы математики и механики. М.-Л.: Наука, 1970. С. 112-119.
20. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
21. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 352 с.
22. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.