Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Ситник, Уточнение интегрального неравенства Коши–Буняковского, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2000, выпуск 9, 37–45

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu29>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 18:12:47

Математический анализ

УДК 596.15

С.М. Ситник

УТОЧНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО НЕРАВЕНСТВА КОШИ-БУНЯКОВСКОГО

Изложен метод получения уточнений классического неравенства Коши-Буняковского в интегральной форме. Данный метод основан на использовании понятия абстрактного среднего. Построены в явном виде формулы для уточнений неравенства Коши-Буняковского (используется модное сокращение для всего комплекса подобных неравенств в различных формах как КГБ: неравенства Коши - Гельдера - Буняковского). Приведены результаты о сравнении различных уточнений между собой.

1. Средние значения.

Определение 1. Абстрактным средним двух неотрицательных чисел $x, y \geq 0$ называется число $M(x, y)$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) (свойство промежуточности)

$$\min(x, y) \leq M(x, y) \leq \max(x, y),$$

$$\Rightarrow M(x, y) \geq 0 \text{ и } \Rightarrow M(x, x) = x;$$

2) (свойство симметричности)

$$M(x, y) = M(y, x);$$

3) (свойство однородности)

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda M(x, y), \quad \lambda > 0;$$

4) (свойство монотонности)

$$x_2 > x_1 \Rightarrow M(x_2, y) > M(x_1, y)$$

(в силу симметричности выполняется и свойство монотонности по второму аргументу).

Иногда для получения более детальных результатов нужны дополнительно свойства непрерывности по обоим аргументам и некоторая модификация свойства аналитичности. Введенное понятие абстрактного среднего представляется важным и заслуживающим отдельного аксиоматического определения. Интересный вопрос об анализе приведенных аксиом, в частности, их независимости, здесь не рассматривается.

Известны достаточно широкие классы средних, удовлетворяющих приведенным аксиомам.

а) степенные средние [1-6]:

$$M(x, y) = M_\alpha(x, y) = \left(\frac{x^\alpha + y^\alpha}{2} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad -\infty < \alpha < \infty, \quad \alpha \neq 0;$$

$$M_{-\infty}(x, y) = \min(x, y), \quad M_0(x, y) = \sqrt{xy}, \quad M_\infty(x, y) = \max(x, y).$$

Степенные средние образуют шкалу:

$$\alpha_1 > \alpha_2 \Rightarrow M_{\alpha_1}(x, y) \geq M_{\alpha_2}(x, y) \quad \forall x, y;$$

три исключительных значения $\alpha = \{-\infty, 0, +\infty\}$ могут быть получены из неисклужительных предельным переходом. Аксиомы абстрактного среднего 1) - 4) проверяются непосредственно.

О неожиданных результатах, исследующих обобщения классических неравенств для степенных средних на комплексной плоскости или алгебре кватернионов, см. [7];

б) средние Радо [8-11]:

$$R_\beta(x, y) = \left(\frac{x^{\beta+1} - y^{\beta+1}}{(\beta+1)(x-y)} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad -\infty < \beta < \infty, \quad \beta \neq 0, -1;$$

$$R_{-\infty}(x, y) = \min(x, y), \quad R_\infty(x, y) = \max(x, y).$$

Исключительные значения порождают пару малоизвестных средних:

логарифмическое среднее - $R_{-1}(x, y) = L(x, y) = \frac{y-x}{\ln y - \ln x}$ и $R_0(x, y) = \frac{1}{e} \left(\frac{y^y}{x^x} \right)^{\frac{1}{y-x}}$.

Название последнего среднего значения затруднительно перевести с английского (identric), поэтому автор предлагает ироническое название: многоэтажно-показательное. Средние Радо также образуют шкалу по параметру:

$$\beta_1 > \beta_2 \Rightarrow R_{\beta_1}(x, y) \geq R_{\beta_2}(x, y) \quad \forall x, y;$$

четыре исключительных значения $\beta = \{-\infty, -1, 0, +\infty\}$ могут быть получены из неисключительных предельным переходом. Аксиомы абстрактного среднего 1) - 4) проверяются непосредственно.

Тибор Радо провел в [8] детальное исследование средних R_β . В частности, им были доказаны замечательные теоремы о связи двух различных шкал средних M_α и R_β . Так, из результатов Радо следует, что средние из двух указанных шкал совпадают лишь в следующих пяти случаях:

$$M_{-\infty} = R_{-\infty}, \quad M_0 = R_{-2}, \quad M_{\frac{1}{2}} = R_{-\frac{1}{2}}, \quad M_1 = R_1, \quad M_\infty = R_\infty.$$

Наиболее часто используемые средние (min, max, арифметическое, геометрическое) входят в обе шкалы. Другим значительным результатом Радо было полное описание множеств параметров (α, β) , при которых выполнены неравенства

$$M_{\alpha_1} \leq R_\beta \leq M_{\alpha_2}, \quad R_{\beta_1} \leq M_\alpha \leq R_{\beta_2}. \quad (1)$$

В частности, из его результатов получается, что фольклорное неравенство для среднего логарифмического $M_0 \leq L \leq M_1$ может быть усилено до следующего:

$$M_0(x, y) = \sqrt{xy} \leq L(x, y) = \frac{x-y}{\ln x - \ln y} \leq M_{\frac{1}{3}}(x, y) = \left(\frac{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}}{2} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (2)$$

причем порядки средних 0 и 1/3 являются неупрощаемыми. Последнее неравенство многократно переоткрывалось в литературе [12-17], а также приводилось на различных олимпиадах без указания авторства [18]. Не менее эффектно выглядят и неравенства Радо для многоэтажно-показательного среднего

$$M_{\frac{2}{3}}(x, y) = \left(\frac{\frac{2}{x^3} + \frac{2}{y^3}}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \leq R_0(x, y) = \frac{1}{e} \left(\frac{y^y}{x^x} \right)^{\frac{1}{y-x}} \leq M_{\ln 2}(x, y) = \left(\frac{x^{\ln 2} + y^{\ln 2}}{2} \right)^{\frac{1}{\ln 2}},$$

порядки средних в которых также неупрощаемы. Отметим, что дальнейшее развитие результатов Радо для выпуклых и вогнутых функций получено в [9-11]. Теоремы Радо являются глубокими обобщениями “неравенства Адамара”, впервые доказанного Шарлем Эрмитом [19]. Из неравенства Эрмита-Адамара для экспоненциальной функции следует классическая оценка $M_0 \leq L \leq M_1$, что хуже неравенств Радо (2).

Средние Радо имеют простой аналитический смысл-это промежуточные значения в теореме Лагранжа о средних для логарифмической или степенной функций. Например, неравенства для среднего логарифмического (2) имеют смысл уточнений теоремы Лагранжа, из которой в данном случае следует тривиальная оценка: $x \leq L \leq y$ при $x \leq y$.

К сожалению, условия теорем Радо, при которых выполнены оценки (1), получены в [8] не в явном виде. Расшифровку этих условий не в терминах некоторых дополнительных неравенств, а непосредственно через параметры, удалось получить в [10]. Результаты содержит теорема 1.

Т е о р е м а 1. Справедливы следующие двусторонние неупрощаемые оценки средних Радо через степенные средние:

$$M_{\frac{\alpha+2}{3}} \leq R_\alpha \leq M_0, \quad \text{при } \alpha \in (-\infty, -2];$$

$$M_0 \leq R_\alpha \leq M_{\frac{\alpha+2}{3}}, \text{ при } \alpha \in [-2, -1];$$

$$M_{\frac{\alpha \ln 2}{\ln(1+\alpha)}} \leq R_\alpha \leq M_{\frac{\alpha+2}{3}}, \text{ при } \alpha \in [-1, -1/2];$$

$$M_{\frac{\alpha+2}{3}} \leq R_\alpha \leq M_{\frac{\alpha \ln 2}{\ln(1+\alpha)}}, \text{ при } \alpha \in [-1/2, 1]$$

(при $\alpha = 0$ последнее неравенство понимается в предельном смысле $M_{\frac{2}{3}} \leq R_0 \leq M_{\ln 2}$),

$$M_{\frac{\alpha \ln 2}{\ln(1+\alpha)}} \leq R_\alpha \leq M_{\frac{\alpha+2}{3}}, \text{ при } \alpha \in [1, \infty).$$

Отметим также полученное в [11] неравенство для среднего логарифмического

$$L\left(M_{\frac{1}{2}}(x, y), M_0(x, y)\right) \leq L(x, y) \leq L(M_1(x, y), M_0(x, y)), \quad (3)$$

в котором порядки средних наилучшие.

Степенные средние и средние Радо использованы в [20] для уточнения неравенств Юнга и Гёльдера. Эти уточнения можно использовать, например, для обобщения различных вариантов неравенства Харди [43-44];

в) итерационные средние. Рассмотрим итерационный процесс при заданных стартовых значениях x_0, y_0 и паре абстрактных средних (M, N) :

$$x_{n+1} = M(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = N(x_n, y_n). \quad (4)$$

В общем случае получаем некоторую динамическую систему на плоскости, которая имеет интересное асимптотическое поведение (динамику) при $n \rightarrow \infty$, но очень сложна для изучения даже при простейшем выборе пары (M, N) .

Определение 2. Пусть существует общий предел последовательностей x_n и y_n в (4). Тогда он называется итерационным средним и обозначается

$$\mu\left(M, N \mid x_0, y_0\right) = \mu(x_0, y_0) = \lim x_n = \lim y_n.$$

Самое известное итерационное среднее - это арифметико-геометрическое, введенное Гауссом. Оно получается при выборе $M = M_1$, $N = M_0$ и выражается по формуле

$$\mu\left(M, N \mid x_0, y_0\right) = \frac{\frac{\pi}{2} x_0}{K\left(\sqrt{1 - \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2}\right)}, \quad 0 < y_0 < x_0,$$

где $K(x)$ - эллиптический интеграл Лежандра первого рода.

Теория итерационных средних в настоящее время активно развивается и является, в частности, источником возникновения новых классов специальных функций - гипертрансцендентных функций (см., например, [21-26]).

Непосредственно проверяется, что итерационное среднее пары абстрактных средних также является абстрактным средним и удовлетворяет введенным аксиомам.

Представляют интерес двусторонние оценки итерационных средних через средние степенные или Радо. На этом пути нетривиальные результаты получаются нелегко. Приведем оценки для арифметико-геометрического среднего Гаусса из [11]:

$$L(x, y) = R_{-1}(x, y) \leq \mu(x, y) \leq R_{\frac{1}{2}}(x, y) = M_{\frac{1}{2}}(x, y). \quad (5)$$

Ниже будут приведены достаточно точные двусторонние оценки эллиптического интеграла Лежандра, которые следуют из последнего неравенства;

г) медианты. Из понятий, связанных с рядами Фарея в теории чисел [27], можно заимствовать понятие медианты двух дробей:

$$m\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) = \frac{a+c}{b+d},$$

причем медианта зависит от формы записи дроби

$$m\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \neq m\left(\frac{pa}{pb}, \frac{qc}{qd}\right) = \frac{pa+qc}{pb+qd}, \quad p \neq q.$$

Это также полезное среднее для пары дробей;

д) в заключение перечисления средних отметим, что некоторые элементарные операции не выводят из класса средних. Например, среднее от пары средних - это вновь среднее.

Таким образом, можно сделать вывод, что для понятия абстрактного среднего существует значительное число конкретных примеров. Это понятие может быть также использовано для обобщения определения выпуклой функции.

Определение 3. Назовем функцию (M, N) -выпуклой относительно пары абстрактных средних (M, N) , если для всех $x \geq 0, y \geq 0$ выполнено неравенство

$$f(M(x, y)) \leq N(f(x), f(y)). \quad (6)$$

В частности, обычные выпуклые функции по данной терминологии есть (M_1, M_1) -выпуклые, а логарифмически выпуклые функции [28] есть (M_1, M_0) -выпуклые. При противоположном выборе знака в (6) получаем обобщение определения вогнутой функции. Разделяющие функции (одновременно выпуклые и вогнутые), для которых в (6) достигается равенство, теперь уже не сводятся только к линейным, но могут быть явно описаны при некоторых дополнительных условиях на средние.

Введенное обобщение понятия выпуклости может быть использовано для уточнения классических результатов о выпуклости некоторых специальных функций или связанных с ними величин (например, их корней). Типичная постановка задачи получается такая: классическая выпуклость известна, можно ли пошевелить порядки средних для улучшения данного неравенства? Кроме того, можно определить обобщенные пространства Орлича с помощью (M, N) -выпуклых функций. Введенное понятие обобщенной выпуклости может оказаться полезным также при изучении выпуклых и вогнутых функций от операторов в Банаховых пространствах [46-48].

Определение 4. Сопряженным к абстрактному среднему M называется величина

$$M^*(x, y) = \frac{xy}{M(x, y)}; \quad x, y > 0. \quad (7)$$

В частности, можно вычислить, что

$$(M_\alpha)^* = M_{-\alpha}, \quad (R_\beta)^* = \frac{1}{R_\beta\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)}.$$

Непосредственно проверяется, что сопряженное M^* - это также среднее на множестве положительных чисел.

Уточнения интегрального неравенства КГБ

Будем рассматривать уточнения интегрального неравенства КГБ следующего вида:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b (\Phi_1(f, g))dx \cdot \int_a^b (\Phi_2(f, g))dx \leq \int_a^b (f(x))^2 dx \cdot \int_a^b (g(x))^2 dx, \quad (8)$$

которое должно выполняться для произвольных функций $f(x), g(x)$ при выборе некоторых неотрицательных функционалов Φ_1, Φ_2 .

Будем считать выполненными следующие простейшие предположения: все встречающиеся функции непрерывны, а интегралы существуют в смысле Римана.

Назовем функционалы, для которых выполнено (8), взаимно дополнительными уточняющими функционалами.

Т е о р е м а 2. Пусть M - произвольное абстрактное среднее; M^* - сопряженное к нему. Тогда справедливо уточнение неравенства КГБ (8) при выборе функционалов

$$\Phi_1(f, g) = (M(f, g))^2; \quad \Phi_2(f, g) = (M^*(f, g))^2.$$

При выборе $M(f, g) = M_\alpha(f, g)$ получаем следующее.

Следствие 2.1. Для неотрицательных непрерывных функций $f(x)$, $g(x)$, одновременно не обращающихся в ноль на $[a, b]$, справедливо следующее уточнение неравенства КГБ:

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 &\leq \int_a^b [M_\alpha(f, g)]^2 dx \cdot \int_a^b [M_{-\alpha}(f, g)]^2 dx = \\ &= \int_a^b (f^\alpha + g^\alpha)^{2/\alpha} dx \cdot \int_a^b f^2 g^2 (f^\alpha + g^\alpha)^{-2/\alpha} dx \leq \int_a^b f^2 dx \cdot \int_a^b g^2 dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Проанализируем набор полученных неравенств (9) в зависимости от параметра α . Прежде всего, в силу симметрии в (9) можно ограничиться значениями $\alpha \geq 0$. При $\alpha = 0$ средняя часть (9), которая понимается в предельном смысле, равна левой. Поэтому при $\alpha \approx 0$ будем иметь хорошие приближения к левой части. При $\alpha = +\infty$ получим занятное неравенство.

Следствие 2.2. Справедливо следующее уточнение неравенства КГБ:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b [Max(f, g)]^2 dx \cdot \int_a^b [Min(f, g)]^2 dx \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx. \quad (10)$$

То, что все три части в (10) могут быть различны, показывает пример “конвертика”: $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = x$, $g(x) = 1 - x$. Вычисления показывают, что в этом случае (10) сводится к неравенствам $\frac{1}{36} \leq \frac{7}{144} \leq \frac{1}{9}$.

При $\alpha = 2$ получаем единственное известное ранее неравенство вида (9), которое было доказано Милном в 1925 г. [1,29] при исследовании задачи из астрономии по вычислению коэффициента звездного поглощения и с тех пор неоднократно переоткрывалось (см., например, [30]).

Неравенство Милна явилось одной из отправных точек для получения конструкций настоящей работы.

Отметим интересное явление: при $\alpha \rightarrow +\infty$ средняя часть в (9) стремится к средней части в (10), а не к правой части этих неравенств. Таким образом, в (9)-(10) возникает “зазор” с правой частью, который, возможно, может быть заполнен оценками другого вида.

При выборе $M(f, g) = R_\beta(f, g)$ получаем следующее.

Следствие 2.3. Справедливо следующее уточнение неравенства КГБ в терминах средних Радо:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b [R_\beta(f, g)]^2 dx \cdot \int_a^b \left[\frac{1}{R_\beta\left(\frac{1}{f}, \frac{1}{g}\right)} \right]^2 dx \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx. \quad (11)$$

Выпишем наиболее эффективные из неравенств (11) явно.

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b \left[\frac{f-g}{\ln \frac{f}{g}} \right]^2 dx \cdot \int_a^b f^2 g^2 / \left(\frac{f-g}{\ln \frac{f}{g}} \right)^2 dx \leq \int_a^b f^2 dx \cdot \int_a^b g^2 dx, \quad (\beta = -1).$$

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b \left[\frac{f^f}{g^g} \right]^{\frac{2}{f-g}} dx \cdot \int_a^b \frac{f^2 g^2}{\left(\frac{f^f}{g^g} \right)^{\frac{2}{f-g}}} dx \leq \int_a^b f^2 dx \cdot \int_a^b g^2 dx, \quad (\beta = 0).$$

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b (f^2 + fg + g^2) dx \cdot \int_a^b \frac{f^2 g^2}{(f^2 + fg + g^2)} dx \leq \int_a^b f^2 dx \cdot \int_a^b g^2 dx, \quad (\beta = 2).$$

При выборе $M(f, g) = \mu(M_1, M_0|f, g)$ получаем следствие 2.4.

Следствие 2.4. Справедливо следующее уточнение неравенства КГБ:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b \left[\frac{Max(f,g)}{K \left(\sqrt{1 - \left(\frac{Min(f,g)}{Max(f,g)} \right)^2} \right)} \right]^2 dx \cdot \int_a^b [Min(f,g)] K \left(\sqrt{1 - \left(\frac{Min(f,g)}{Max(f,g)} \right)^2} \right)^2 dx \leq \int_a^b f^2 dx \int_a^b g^2 dx, \quad (12)$$

где K - эллиптический интеграл Лежандра 1 рода.

Отметим совершенно экзотический характер последнего неравенства: это неравенство между произвольными функциями, но которые стоят под знаком конкретной специальной функции - эллиптического интеграла Лежандра. Вместе с тем неравенства, в которых произвольные функции стоят под знаками элементарных функций, например, экспоненты или логарифма, широко используются в математике. Так, подобный вид имеют неравенства Джона-Ниренберга в теории пространств ВМО и неравенства Зигмунда в гармоническом анализе [31-33]. Такие неравенства описывают, как правило, предельно точные свойства некоторых объектов, например, предельно допустимые пространства в теоремах вложения или результатах по различным видам сходимости тригонометрических рядов. К этому классу результатов относится, например, известная работа [42], в которой найдены предельно точные пространства Орлича для описания сильной суммируемости операторов Харди. Интересные приложения пространства Орлича к предельно точным неравенствам и теоремам вложения типа Соболева получены в [45].

Для дифференцируемых функций получен другой ряд уточнений.

Т е о р е м а 3. Для подходящих функций справедливо уточнение интегрального неравенства КГБ вида (8) при следующем виде функционалов:

$$\Phi_1(f,g) = \exp \left(2 \int_a^x M(Lf(y), Lg(y)) dy \right); \quad \Phi_2(f,g) = \frac{f^2 g^2}{\Phi_1(f,g)}, \quad (13)$$

где $Lh(t)$ - логарифмическая производная $Lh = \frac{h'}{h}$; M - произвольное абстрактное среднее (логарифмические производные Lf , Lg предполагаются неотрицательными).

Так как функционалы в (13) не являются квадратами средних, то уточнения из теоремы 3 действительно не сводятся к уточнениям из теоремы 2.

Следствие 3.1. При сделанных предположениях справедливо следующее уточнение неравенства КГБ:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b \exp \left[2 \int_a^x Max(Lf, Lg) \right] dx \cdot \int_a^b f^2 g^2 \exp \left[-2 \int_a^x Max(Lf, Lg) \right] dx \leq \int_a^b f^2 dx \int_a^b g^2 dx.$$

Во всех приведенных выше неравенствах получены условия, при которых в них достигаются равенства.

Сравнение уточнений неравенства КГБ

Определение 5. Введем отношение частичной упорядоченности на множестве уточнений вида (8): будем записывать $M \prec N$, если справедливы неравенства

$$\left(\int_a^b fg dx \right)^2 \leq \int_a^b [M(f,g)]^2 dx \cdot \int_a^b [M^*(f,g)]^2 dx \leq \int_a^b [N(f,g)]^2 dx \cdot \int_a^b [N^*(f,g)]^2 dx \leq \int_a^b f^2 dx \int_a^b g^2 dx, \quad (14)$$

где M , N - абстрактные средние, а M^* , N^* - сопряженные к ним.

Аналогично можно ввести частичное упорядочение в более общем случае на парах взаимно дополнительных уточняющих функционалов (Φ_1, Φ_2) из (8).

Ясно, что одним из первых возникает вопрос: упорядочены ли между собой усиления из шкалы средних M_α (или R_β)? Ответы дает теорема 4.

Т е о р е м а 4. Пусть $0 < \alpha < \beta < +\infty$. Тогда выполнены соотношения $M_\alpha \prec M_\beta$, $R_\alpha \prec R_\beta$.

Эта теорема полностью решает вопрос для функционалов типа средних Радо или степенных. Распишем содержащиеся в ней оценки более подробно: при $\alpha < \beta$ имеем

$$\left(\int_a^b fg dx \right)^2 \leq \int_a^b [M_\alpha(f, g)]^2 dx \cdot \int_a^b [M_{-\alpha}(f, g)]^2 dx \leq \int_a^b [M_\beta(f, g)]^2 dx \cdot \int_a^b [M_{-\beta}(f, g)]^2 dx \leq \int_a^b f^2 dx \int_a^b g^2 dx \quad (15)$$

$$\left(\int_a^b fg dx \right)^2 \leq \int_a^b [R_\alpha(f, g)]^2 dx \cdot \int_a^b [R_\alpha^*(f, g)]^2 dx \leq \int_a^b [R_\beta(f, g)]^2 dx \cdot \int_a^b [R_\beta^*(f, g)]^2 dx \leq \int_a^b f^2 dx \int_a^b g^2 dx. \quad (16)$$

В частности, из (15) следует, что получено бесконечное число неравенств, которые улучшают неравенство Милна с (M_2, M_{-2}) как с точки зрения приближения к скалярному произведению в (15) (при $0 < \alpha < 2$), так и к правой части (при $2 < \alpha < +\infty$).

Следует отметить, что выполнение соотношения упорядоченности $M \prec N$ в наших терминах означает, что усиление, построенное по среднему M , лучше приближает левую, а усиление, построенное по среднему N , правую части неравенства КГБ.

Результаты по сравнению усиления со средними из различных шкал вида $M_\alpha \prec R_\beta$, или тем более вида $M_\alpha \prec \mu$, $R_\beta \prec \mu$ (или обратные к ним), получены автором для усиления вида (8) только для некоторых частных случаев.

Перейдем к сравнению усиления из теоремы 3 с экспоненциальными функционалами. Для них также будем употреблять символ отношения частичной упорядоченности $M \prec N$ в прежнем смысле.

Т е о р е м а 5. Справедливы отношения

$$M_1 \prec M_\alpha \prec M_\beta \quad \text{при } 1 \leq \alpha \leq \beta < +\infty,$$

$$M_1 \prec M_\beta \prec M_\alpha \quad \text{при } -\infty \leq \alpha \leq \beta \leq 1.$$

Аналогично решен вопрос и для средних Радо.

Из теоремы 5 следует, что остаются содержательными сравнения усиления со степенными средними, один из порядков которых больше, а другой меньше единицы. В результате автором получены следующие соотношения:

$$M_2 \prec M_0, \quad M_1 \prec M_{-3}, \quad M_3 \prec M_{-1}, \quad M_{\frac{3}{2}} \prec M_{\frac{1}{2}},$$

а также ряд других. В частности, усиления со средними $M_{\frac{1}{2}}$ и M_2 несравнимы.

Вычисления показывают, что, по-видимому, справедливы следующие утверждения:

Гипотеза 1. Пусть $\alpha < 1$, $\beta > 1$, $\alpha + \beta > 2$. Тогда усиления со средними M_α и M_β несравнимы.

Гипотеза 2. Пусть $\alpha < 1$, $\beta > 1$, $\alpha + \beta \leq 2$. Тогда $M_\beta \prec M_\alpha$.

Предположение из гипотезы 2 следует из неравенства $M_\alpha + M_\beta \leq 2M_1$, $\alpha + \beta \leq 2$, которое, несмотря на элементарность формулировки, доказать не удалось.

В результате все доказанные отношения или их опровержения можно собрать на специальной диаграмме. Отметим среди них еще такие цепочки:

$$R_1 = M_1 \prec M_{\frac{3 \ln 2}{2 \ln \frac{5}{2}}} \prec R_{\frac{3}{2}} \prec M_{\frac{7}{6}} \prec M_{\frac{2 \ln 2}{\ln 3}} \prec R_2 \prec M_{\frac{4}{3}} \dots;$$

$$R_1 = M_1 \prec R_{\frac{1}{2}} \prec M_{\frac{5}{6}} \prec M_{\ln 2} \prec R_0 \prec M_{\frac{2}{3}} \prec M_{\frac{1}{2}} = R_{\frac{1}{2}} \prec R_{-1} \prec \mu(M_1, M_0) \prec R_{-2} = M_0 \prec R_{-5} \dots$$

Отношения с итерационным средним μ получены с использованием неравенства (5).

Некоторые из доказанных результатов по упорядоченности приводят к интересным свойствам самих средних. Например, справедлива теорема 6.

Т е о р е м а 6. При $0 \leq \alpha \leq \beta$ и неотрицательных числах x_1, x_2, y_1, y_2 справедливо неравенство $(M_\alpha(x_1, y_1)M_\beta(x_2, y_2) - M_\alpha(x_2, y_2)M_\beta(x_1, y_1)) \times$
 $\times (x_1 y_1 M_\alpha(x_2, y_2)M_\beta(x_2, y_2) - x_2 y_2 M_\alpha(x_1, y_1)M_\beta(x_1, y_1)) \geq 0.$

Аналогичное неравенство выполняется и для средних Радо. По-видимому, эта пара неравенств является новой.

В основе доказательств результатов по упорядоченности лежит неравенство Чебышева [1,3] с сопутствующим современным аппаратом сомонотонных и соупорядоченных функций [3,34-36]. Интересно отметить, что русским математиком К.А.Андреевым ещё в 1883 г. было доказано замечательное неравенство для определителей, из которого в качестве частных случаев следуют неравенства Чебышёва, КГБ, Грама, также их некоторые обобщения и многомерные аналоги [37-38].

В заключение отметим, что основные результаты данной работы были ранее анонсированы на конференциях [39-41].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Полиа Г. Неравенства. М.: Иностран. лит., 1948. 456 с.
2. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М.: Мир, 1965.
3. Mitrinović D.S. (in cooperation with P.M. Vasić). Analytic inequalities. Springer, 1970.
4. Bullen P.S., Mitrinović D.S., Vasić P.M. Means and their inequalities. D.Reidel, 1988.
5. Mitrinović D.S., Pečarić J.E., Fink A.M. Classical and new inequalities in analysis. Kluwer, 1993.
6. Маршалл А., Олкин И. Неравенства теории мажоризации и её приложения. М.: Мир, 1983.
7. Булыгин А.М., Кошляков С.Н., Ситник С.М. Неравенства о средних в комплексной области // Науч.-практ. конф. ВВШ МВД России: Тез. докл. Часть II. Воронеж, 1998. С. 6-7.
8. Radó T. On convex functions// Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 37: 1935: P. 266-285.
9. Hartman P. Convex functions and mean value inequalities// Duke Math. J. Vol.39. 1979. No.2. P. 351-360.
10. Ситник С.М. Теоремы Радо и среднее логарифмическое / Препринт института автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН. Владивосток, 1992. 15 с.
11. Ситник С.М. Неравенства для среднего логарифмического и итерационных средних/ Препринт института автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН. Владивосток, 1992. 16 с.
12. Stolarsky K.B. Generalizations of the logarithmic mean// Math. Mag. Vol. 48. 1975. P. 87-92.
13. Lin T.P. The power mean and the logarithmic mean// AMM. Vol. 81. 1974. P. 879-883.
14. Carlson B.C. Some inequalities for hypergeometric functions// Proc. AMS. Vol. 17. 1966. P. 32-39.
15. Lupaş A. Problem 12739// Gaz. Mat. (Bucureşti), No.2. 1973.
16. Ostle B., Terwilliger H.L. A comparison of two means// Proc. Montana Acad. Sci. Vol.17. 1957, P. 69-70.
17. Rühling D. Eine allgemeine logarithmische Ungleichung// El. Math. Vol.41. 1986. P. 14-16.
18. Всероссийские математические олимпиады школьников. М.: Просвещение, 1992.
19. Pečarić J.E., Dragomir S.S. A generalization of Hadamard's inequality for isotonic linear functionals// Radovi Matematički. Vol. 7. 1991. P. 103-107.
20. Анциферова Г.А., Ситник С.М. Некоторые обобщения неравенства Юнга// Вестн. Воронеж. и-та МВД РФ. № 2(4). 1999. С. 161-164.
21. Borwein J.M., Borwein P.B. Pi and the AGM. Wiley, 1987.
22. Peetre J. Some observations on algorithms of the Gauss-Borchard type// Proc. Edinburgh Math.Soc. Vol. 34. 1991. P. 415-431.
23. Borwein P.B. Quadratically converging rational mean iterations// J. Math. Anal. Appl. Vol. 154. 1991. P.364-376.
24. Todd J. The Weierstrass mean// Numer. Math. Vol. 57. 1990. P. 737-746.
25. Borwein P.B. Hypertranscendence of the functional equation// Proc. AMS. Vol. 107. 1989. P. 215-221.
26. Loxton J.H., Van der Poorten. A class of hypertranscendental functions// Aequationes Math. Vol. 16. 1977. P. 93-106.
27. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1972.
28. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
29. Milne E.A. Note on Rosseland's integral for the stellar absorption coefficient// Monthly Notices R.A.S. Vol. 85. 1925. P. 979-984.
30. Dragomir S.S., Arslanagić S.Z. A refinements of Cauchy-Buniakowski-Schwarz inequality for real numbers// Rad. Mat. Vol.7. No.2. 1991. P. 299-303.
31. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т1, 2. М.: Мир, 1965.
32. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
33. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p . М.: Мир, 1984.
34. Mitrinović D.S., Vasić P.M. History, variations and generalizations of the Čebyšev inequality and the question of some priorities// Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No. 461-497. 1974. P. 1-30.
35. Mitrinović D.S., Pečarić J.E. History, variations and generalizations of the Čebyšev inequality and the question of some priorities II// Rad. Jugosl. Akad. Znan. Umj. Mat. No. 9 [450]. 1990. P. 139-156.
36. Beesack P.R., Pečarić J.E. Integral inequalities of Cebysev type// J. Math. Anal. Appl. Vol. 111. No. 2. 1985. P. 643-659.
37. Andréief C. Note sur relation entre les integrales definies des produits des fonctions// Mém. Soc. Sci. Bordeaux. No. 2(3), P. 1-14.
38. Mitrinović D.S., Pečarić J.E. Remarks on some determinantal inequalities// C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. Vol. X. No. 1. 1988. P. 41-45.

39. *Sitnik S.M.* Refinements of the Bunyakovskii – Schwartz inequalities with applications to special functions estimates // Conference in Mathematical Analysis and Applications in Honour of Lars Inge Hedberg's 60 th Birthday. Linköping University, Sweden. June 10-15 1996. P. 97.
40. *Ситник С.М.* Метод получения последовательных уточнений неравенства Коши-Буняковского и его применения к оценкам специальных функций // Современные методы в теории краевых задач: Понtryгинские чтения – VII: Тез. докл. Воронеж, 1996, С. 164.
41. *Ситник С.М.* Метод получения последовательных уточнений неравенства Коши - Буняковского и его применения к оценкам специальных функций// Науч.-практ. конф. ВВШ МВД России: Тез. докл. Часть II. Воронеж, 1997. С. 14.
42. *Родин В.А.* ВМО- свойство частичных сумм рядов Фурье// ДАН СССР. Т. 319. № 5. 1991, С. 1079-1081.
43. *Kufner A., Opic B.* Hardy-type inequalities // Pitman research notes in mathematics. Vol. 229. Longman, 1990.
44. *Буренков В.И., Гольдман М.Л.* “ Функциональные пространства. Решения упражнений по разделам // Обобщенное неравенство Минковского. Неравенство Харди // М.: Изд-во УДН, 1990.
45. *Cwikel M., Pustyl'nik E.* Sobolev type embeddings in the limiting case// J. Fourier Anal. And Appl., Vol.4. N 4-5. 1998, P. 433-446.
46. *Пустыльник Е.И.* О некоторых свойствах вогнутых функций самосопряженных операторов// ДАН СССР. № 186. 1969. С. 1259-1261.
47. *Пустыльник Е.И.* О функциях от позитивного оператора// Мат. сб. № 119. 1982. С. 27-42.
48. *Pustyl'nik E.* The rate of convergence of Fourier series with respect to the eigenfunctions of a positive operator// Funct. Differ. Eq. Vol. 4. N 3-4. P. 391-403.