Общероссийский математический портал

В. П. Радченко, М. Н. Саушкин, С. Н. Кубышкина, Обобщенная модель неупругого деформирования и разрушения толстостенной сферической оболочки при ползучести, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2000, выпуск 9, 46–54

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu30>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 15:17:27

Механика деформируемого твердого тела

УДК 539.376

В.П. Радченко, М.Н. Саушкин, С.Н. Кубышкина

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ТОЛСТОСТЕННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Предложена обобщенная реологическая модель неупругого реологического деформирования и разрушения толстостенной сферической оболочки при действии внутреннего давления в координатах "обобщенное перемещение — обобщенная нагрузка". Представлен дифференциальный оператор, связывающий обобщенные нагрузки и обобщенные перемещения, в качестве которых использовались внутреннее давление и радиальное перемещение оболочки соответственно. Приведена методика идентификации параметров модели и функций оператора. Выполнена проверка адекватности обобщенной модели в сравнении с данными численного решения соответствующей краевой задачи о деформировании и разрушении толстостенной сферы при ползучести как при стационарных, так и нестационарных режимах нагружения. Обоснована целесообразность использования обобщенной модели.

Постановка задачи

Расширение круга задач, в которых приходится учитывать реологические свойства материалов, процессы разупрочнения и накопления поврежденности в них обусловлено современными тенденциями в машиностроении, аэрокосмическом, нефтехимическом и энергетическом промышленных комплексах и связано с жесткими ограничениями материалоемкости элементов конструкций, с одной стороны, и ужесточением температурно-силовых режимов нагружения деталей машин - с другой стороны.

Классические подходы решения прочностных задач для элементов конструкций базируются на методах решения соответствующих краевых задач (аналитических, численных, приближенных) на основе соответствующих теорий неупругого деформирования и длительной прочности материалов. Однако фактор времени, сложность конструкций, большая размерность задачи во многих случаях являются труднопреодолимыми препятствиями как в математическом плане (оценка погрешности, сходимости, вычислительной устойчивости), так и в прикладном плане, например, при необходимости принимать соответствующие решения по информации о напряженно-деформированном состоянии в реальном масштабе времени.

В связи с изложенным выше наряду с классическими подходами получили развитие методы построения так называемых обобщенных моделей элементов конструкций [1, 2], связывающие в виде дифференциального или интегрального операторов основные характеристики их интегрального поведения: обобщенные нагрузки и обобщенные силы. Использование такого рода моделей с математической точки зрения снижает размерность краевой задачи. Такой метод удобен при прогнозировании интегральных деформационных свойств в условиях переменного внешнего нагружения. Обобщенные модели можно рассматривать как способ сжатия и компактного представления информации о напряженно-деформированном состоянии.

Исходной информацией для построения обобщенной реологической модели служат кривые ползучести конструктивного элемента в координатах "обобщенное перемещение — обобщенная нагрузка", полученные при стационарных внешних воздействиях, а также обобщенная диаграмма упругопластического деформирования. При этом возможны два способа получения этой информации:

- 1) проведение натурного эксперимента над конструктивным элементом;
- 2) решение соответствующей краевой задачи при стационарных внешних воздействиях.

Описание неупругого реологического деформирования ряда элементов конструкций в пределах первых двух стадий ползучести при помощи обобщенной модели на основе указанных двух способов получения исходной информации было рассмотрено в [1–5]. В отмеченных работах показана эффективность такого подхода для решения некоторого класса задач. Однако вопросы

учета пластической деформации, а также третьей стадии ползучести, учета накопления поврежденности и разрушения в указанных работах не затрагивались.

Естественное обобщение результатов работ [1–5] на случай третьей стадии и разрушения с учетом пластической деформации было предпринято в [6] для описания реологического неупругого деформирования и разрушения растягиваемого резьбового соединения и толстостенной трубы под действием внутреннего давления [7].

Целью настоящей работы является развитие идей [6, 7] на случай толстостенной сферы под действием внутреннего давления, при этом получение необходимой информации для построения соответствующей обобщенной модели сферы основано на решении соответствующей краевой задачи при постоянных значениях внутреннего давления.

Реологическая модель и критерий разрушения материалов при сложном напряженном состоянии

Первым этапом построения обобщенной реологической модели является решение соответствующей краевой задачи при фиксированных значениях внутреннего давления. Неформализованным моментом здесь является выбор соответствующей теории неупругого деформирования и разрушения для материала сферы.

В качестве основной реологической модели в настоящей работе используется модель, предложенная для одноосного напряженного состояния в [8–9] и обобщенная на случай сложного напряженного состояния в [10].

Основной вариант определяющих соотношений имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + q_{ij} + p_{ij}; \quad (1)$$

$$e_{ij} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\mu}{E} \delta_{ij} \sigma^0; \quad (2)$$

$$q_{vv} = \frac{3}{2} \beta_{vv}^q - \frac{1}{2} (\beta_{11}^q + \beta_{22}^q + \beta_{33}^q); \quad (3)$$

$$\begin{cases} \dot{\beta}_{vv}^q = 0, & \text{при } \left| \frac{3}{2} \sigma_{vv} - \frac{1}{2} \sigma^0 \right| \leq \sigma_{np}; \\ \dot{\beta}_{vv}^q = \begin{cases} \lambda [a(S - \sigma_{np})^{n_1-1} \cdot B - \beta_{vv}^q], & [\dots] \cdot B > 0; \\ 0, & [\dots] \cdot B \leq 0, \end{cases} & \text{при } \left| \frac{3}{2} \sigma_{vv} - \frac{1}{2} \sigma^0 \right| > \sigma_{np}; \end{cases} \quad (4)$$

$$p_{ij} = u_{ij} + v_{ij} + w_{ij}; \quad (5)$$

$$\dot{w}_{ij} = c \left(\frac{S}{\sigma^*} \right)^{m-1} \frac{1}{\sigma^*} \left(\frac{3}{2} \sigma_{ij} - \frac{1}{2} \sigma^0 \right); \quad (6)$$

$$\begin{cases} u_{ij}(t) = \sum_k u_{ij}^k(t); \\ \dot{u}_{ij}^k(t) = \lambda_k \left\{ a_k \left(\frac{S}{\sigma^*} \right)^{n_2-1} \frac{1}{\sigma^*} [(1 + \mu'_k) \sigma_{ij} - \mu'_k \sigma^0] - u_{ij}^k(t) \right\}; \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} v_{vv}(t) = \sum_k v_{vv}^k(t); \\ v_{vv}^k(t) = (1 + \mu''_k) \beta_{vv}^k(t) - \mu''_k (\beta_{11}^k(t) + \beta_{22}^k(t) + \beta_{33}^k(t)); \\ \dot{\beta}_{vv}^k = \begin{cases} \lambda_k \left[b_k \left(\frac{S}{\sigma^*} \right)^{n_2-1} \frac{\sigma_{vv}}{\sigma^*} - \beta_{vv}^k(t) \right], & [\dots] \sigma_{vv} > 0; \\ 0, & [\dots] \sigma_{vv} < 0; \end{cases} \end{cases} \quad (8)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 (1 + \omega); \quad (9)$$

$$\dot{\omega} = \gamma(E_2) \sigma_{ij} \dot{q}_{ij} + \alpha(S_0) \sigma_{ij} \dot{p}_{ij}. \quad (10)$$

Здесь ε_{ij} , e_{ij} , q_{ij} , p_{ij} — полная, упругая, пластическая деформации и деформация ползучести соответственно; u_{ij} , v_{ij} , w_{ij} — вязкоупругая, вязкопластическая и вязкая составляющие де-

формации ползучести; σ_{ij} , σ_{ij}^0 — соответственно компоненты истинного и номинального тензоров напряжений; E , μ — упругие константы материала; E_2 , S , S_0 — соответственно интенсивности тензоров пластической деформации, истинных и номинальных напряжений; λ , a , n_1 — константы модели, описывающие диаграмму мгновенного упругопластического деформирования; $\sigma_{пр}$ — предел пропорциональности; λ_k , a_k , b_k , c , n_2 , m_1 , σ^* — константы модели, при помощи которых описывается первая и вторая стадия ползучести материала и ее обратимая после разгрузки часть; μ'_k , μ''_k — коэффициенты Пуассона для обратимой и необратимой компонент деформации ползучести; β_{ij}^q , β_{ij}^k — соответственно активные пластические и вязкопластические деформации, которые можно было бы наблюдать при отсутствии пуассоновского сужения материала; $\gamma(E_2)$ и $\alpha(S_0)$ задаются степенными аппроксимациями вида

$$\gamma(E_2) = \gamma_1 \cdot E_2^{m_2}; \quad \alpha(S_0) = \alpha_1 \cdot S_0^{m_3}, \quad (11)$$

где γ_1 , m_2 , α_1 , m_3 — константы модели, контролирующие процессы разупрочнения материала при пластической деформации и деформации ползучести соответственно; ω — скалярный параметр поврежденности. В формулах (4)–(7) использованы следующие обозначения:

$$B = \left(\frac{3}{2} \sigma_{vv} - \frac{1}{2} \sigma^0 \right) - \sigma_{пр} \cdot \text{sign} \left(\frac{3}{2} \sigma_{vv} - \frac{1}{2} \sigma^0 \right); \quad \sigma^0 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}. \quad (12)$$

Расчет пластической q_{ij} и вязкопластической v_{ij} деформаций осуществляется в главных осях, поэтому суммирование по индексу v в формулах (3), (8), (12) не выполняется. Очевидно, что при записи (1)–(12) использовалась гипотеза соосности тензоров напряжений и деформаций. Модель (1)–(12) описывает процесс неупругого деформирования с изотропным разупрочнением. Методика определения всех параметров модели (1)–(11) представлена в [8–9]. Она осуществляется на основании одноосных кривых ползучести, полученных при $\sigma_0 = \text{const}$ и доведенных до разрушения, и диаграммы упругопластического деформирования.

Для прогнозирования времени разрушения материала t_* используется критерий разрушения энергетического типа вида [8–10]

$$\Omega(t_*) = \int_0^{t_*} \frac{\sigma_{ij} dq_{ij}}{A_*} + \int_0^{t_*} \frac{\sigma_{ij} dp_{ij}}{A_*^c(S_0)} = 1, \quad (13)$$

где A_* и $A_*^c(S_0)$ соответственно критические величины работ разрушения истинного напряжения на пластической деформации и на деформации ползучести. При этом материал находится в не разрушенном состоянии, если $\Omega(t) < 1$, и разрушается при выполнении (13). В общем случае величина $A_*^c(S_0)$ имеет степенную аппроксимацию вида

$$A_*^c(S_0) = \alpha_A \cdot S_0^{m_A},$$

где α_A , m_A — константы материала, которые могут быть определены по результатам одноосных испытаний по методике, изложенной в [8–9].

Таким образом, построение модели (1)–(12) для описания неупругой деформации при сложном напряженном состоянии и критерия разрушения (13) не требует дополнительных экспериментальных затрат, так как все параметры модели определяются по результатам одноосных испытаний. В частности, в работах [10–11] приведены константы используемой модели для некоторых материалов.

Следует отметить, что согласно (3)–(4) пластические деформации описываются такими же по структуре уравнениями, как и вязкопластическая компонента v деформации ползучести (8), т.е. также развивается по времени. При этом величина λ много больше $\max_k \{\lambda_k\}$ и скорость деформации пластичности на порядок выше скорости деформации ползучести. При таком предположении за то время, когда пластическая деформация при заданном тензоре напряжений достигнет, согласно (3)–(4), асимптотического значения, накопленная деформация ползучести за это же время будет пренебрежимо малой по сравнению с пластической деформацией, т.е. $p_{ij}(t)$ много меньше $q_{ij}(t)$. Такой подход к описанию пластических деформаций соответствует так называемым эндохронным теориям пластичности [12–13]. Обоснованность применения такого подхода приведена в [10]. Соотношения (3)–(4) задают вариант теории пластичности без

поверхности пластичности. Это позволяет ценой незначительных погрешностей свести задачу упругопластического деформирования к задаче ползучести.

Решение краевой задачи о неупругом реологическом деформировании и разрушении толстостенной сферической оболочки

Изложим теперь методику решения краевой задачи для толстостенной сферической оболочки аналогично [11], [14], где решена задача о неупругом деформировании толстостенного цилиндра.

Предположим, что толстостенная сферическая оболочка с внутренним радиусом R_1 и внешним R_2 под действием внутреннего давления $p(t)$ находится в условиях неупругого деформирования. Задача рассматривается в сферических координатах r, θ, ψ . В силу симметрии задачи деформации сдвига и касательные напряжения равны нулю, и она решается в главных осях, причем $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\psi$, $\sigma_\theta = \sigma_\psi$.

Полные деформации ε_i ($i = r, \theta, \psi$) описываются соотношениями (1)–(12).

Уравнение совместности деформаций в силу симметрии задачи записывается в виде

$$r \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} + \varepsilon_\theta = \varepsilon_r. \quad (14)$$

Из уравнений (1) и (14) имеем соотношение

$$r \frac{\partial e_\theta}{\partial r} + e_\theta - e_r = g(r, t), \quad (15)$$

где функция $g(r, t)$ задается следующим образом:

$$g(r, t) = p_r + q_r - p_\theta - q_\theta - r \left(\frac{\partial p_\theta}{\partial r} + \frac{\partial q_\theta}{\partial r} \right). \quad (16)$$

Из закона Гука (2), записанного в главных осях

$$\begin{cases} e_r = \frac{\sigma_r^0 - 2\mu\sigma_\theta^0}{E}, \\ e_\theta = \frac{(1-\mu)\sigma_r^0 - \mu\sigma_\theta^0}{E}, \\ e_\psi = e_\theta, \end{cases} \quad (17)$$

выражается величина

$$e_\theta - e_r = \frac{1+\mu}{E} (\sigma_\theta^0 - \sigma_r^0),$$

с учетом которой уравнение (15) принимает вид

$$r \frac{\partial e_\theta}{\partial r} + \frac{1+\mu}{E} (\sigma_\theta^0 - \sigma_r^0) = g(r, t). \quad (18)$$

Дифференцируя второе уравнение (17) и подставляя его в (18), получаем

$$r(1-\mu) \frac{\partial \sigma_\theta^0}{\partial r} - r\mu \frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} + (1+\mu)(\sigma_\theta^0 - \sigma_r^0) = E \cdot g(r, t),$$

из которого с учетом уравнения равновесия

$$r \frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} + 2\sigma_r^0 = 2\sigma_\theta^0 \quad (19)$$

находим дифференциальное уравнение относительно σ_r^0 :

$$\frac{\partial^2 \sigma_r^0}{\partial^2 r} + \frac{4}{r} \frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} = \frac{2E}{1-\mu} \frac{g(r, t)}{r^2}. \quad (20)$$

Решение уравнения (3.7) с граничными условиями

$$\sigma_r^0 \Big|_{r=R_1} = -p(t), \quad \sigma_r^0 \Big|_{r=R_2} = 0 \quad (21)$$

при фиксированном значении времени t записывается в виде

$$\sigma_r^0(r, t) = \frac{2E}{3(1-\mu)} \int_{R_1}^r \frac{g(x, t)}{x} dx - \frac{2E}{3(1-\mu)} \frac{1}{r^3} \int_{R_1}^r x^2 g(x, t) dx - p(t) -$$

$$- \frac{(r^3 - R_1^3) R_2^3}{(R_2^3 - R_1^3) r^3} \left(\frac{2E}{3(1-\mu)} \int_{R_1}^{R_2} \frac{g(x, t)}{x} dx - \frac{2E}{3(1-\mu)} \frac{1}{r^3} \int_{R_1}^r x^2 g(x, t) dx - p(t) \right). \quad (22)$$

С учетом (22) из (19) находится выражение для σ_θ^0 :

$$\sigma_\theta^0(r, t) = \frac{2E}{3(1-\mu)} \int_{R_1}^r \frac{g(x, t)}{x} dx + \frac{E}{3(1-\mu)} \frac{1}{r^3} \int_{R_1}^r x^2 g(x, t) dx - p(t) -$$

$$- \frac{(2r^3 + R_1^3) R_2^3}{2(R_2^3 + R_1^3) r^3} \left(\frac{2E}{3(1-\mu)} \int_{R_1}^{R_2} \frac{g(x, t)}{x} dx + \frac{E}{3(1-\mu)} \frac{1}{r^3} \int_{R_1}^{R_2} x^2 g(x, t) dx - p(t) \right). \quad (23)$$

Соотношения (22) и (23) задают распределение напряжений σ_r^0 , σ_θ^0 по радиусу в зависимости от времени. Нетрудно видеть, что при $g(r, t)=0$ они совпадают с упругим решением для толстостенной сферы.

Численная реализация расчета кинетики напряженно-деформируемого состояния во времени и разрушения толстостенной сферической оболочки под действием внутреннего давления p в условиях ползучести осуществлялась по хорошо известному методу "шагами по времени", аналогично [11], [14]. Временной интервал разбивался на малые отрезки времени $[t_i, t_{i+1}]$ с шагом Δt_i , внутри которого внутреннее и внешнее напряженные состояния считались постоянными и соответствующими моменту $t = t_i$. Приращения компонент деформаций в конце отрезка при $t = t_{i+1}$ находились по формулам (1)–(11) по методу Эйлера. При этом интегралы в формулах (22) и (23) вычислялись по соответствующим квадратурным формулам численного интегрирования при каждом значении времени $t = t_i$, а для производных по радиусу использовались их конечно-разностные аппроксимации. Время до разрушения в соответствии с (13) определялось следующим образом: расчет продолжался до того момента времени $t = t_*$, при котором в какой-либо точке сферы выполнялось бы условие $\Omega(t_*) = 1$.

В случае упругопластического деформирования расчет происходит также "шагами по времени" (как при ползучести), но здесь время можно рассматривать как некоторое "внутреннее время", играющее роль параметра нагружения. При этом сначала рассчитывается упругое решение при $t=0$, а затем строится упругопластическое решение на основании (1)–(4), (9)–(13) по аналогии с деформацией ползучести.

Следует отметить, что во всех формулах (14)–(23) используются номинальные напряжения, тогда как реологические и упругие деформации рассчитываются в соответствии (1)–(13) с использованием истинных напряжений.

Численное решение краевой задачи

В качестве примера выполнено модельное численное исследование неупругого деформирования и разрушения толстостенной сферической оболочки из сплава *ЭИ 698* с внутренним радиусом $R_1 = 0.20$ м и внешним — $R_2 = 0.28$ м при действии внутреннего давления p и температуре $T = 700^\circ \text{C}$. Параметры модели взяты из работы [10] и представлены в табл. 1 и 2.

Используя разработанную выше методику, была решена серия краевых задач о ползучести и разрушении сферической оболочки при постоянных давлениях, а также задача о упругопластическом разрушении сферической оболочки, при этом для упругопластической задачи в определяющих соотношениях (1)–(10) было положено $p_{ij} = 0$. В качестве примера на рис.1 сплошными линиями приведены расчетные зависимости для перемещения от времени на внутреннем радиусе сферы, вызванные деформациями ползучести и пластическими деформациями для ряда постоянных значений давления. На рис.2 приведена расчетная диаграмма "упругопластического деформирования" сферы в координатах "перемещение внутреннего радиуса — давление". Информация, представленная на рис.1 и 2, являлась исходной для построения обобщенной модели сферической оболочки.

Таблица 1

**Значения параметров модели (1)–(13) для описания
деформации пластичности сплава ЭИ 698 при $T=700^\circ\text{C}$**

$\sigma_{пр}, \text{МПа}$	$E \cdot 10^5, \text{МПа}$	$a, \text{МПа}^{-n_1}$	n_1	$\gamma_1, \text{МПа}^{-1}$	$A_*, \text{МДж/м}^3$	m_2
500.3	1.52	$1.18 \cdot 10^{-7}$	1.995	$3.77 \cdot 10^{-3}$	284.3	0

Таблица 2

**Значения параметров модели (1)–(13) для описания
деформации ползучести сплава ЭИ 698 при $T=700^\circ\text{C}$**

$\sigma_*, \text{МПа}$	k	λ_k, q^{-1}	$a_k \times 10^{-4}$	$b_k \times 10^{-4}$	$c \times 10^{-5}$	n_2	m_1	$\alpha_1, \text{МПа}^{-1-m_1}$	m_3	$\alpha_1, \text{МПа}^{-1-m_A}$	m_A
490.5	1	0.2	2.96	4.44	2.51	2.9	10.96	$9.56 \cdot 10^3$	-2.03	12.2	0

Р и с. 1. Кривые стационарной ползучести толстостенной сферы: сплошные линии — численный эксперимент; штриховые линии — расчет по модели (24)–(25). Цифры: 1 — $p_0=210 \text{ МПа}$; 2 — $p_0=220 \text{ МПа}$; 3 — $p_0=250 \text{ МПа}$; 4 — $p_0=270 \text{ МПа}$; 5 — $p_0=290 \text{ МПа}$.

Р и с. 2. Диаграмма упругопластического деформирования толстостенной сферы в координатах "радиальное перемещение ϵ — внутреннее давление p_0 ": сплошная линия — численный эксперимент; штриховая линия — расчет по модели (24)–(25).

Р и с. 3. Кривые ползучести толстостенной сферы при нестационарных режимах нагружения: сплошные линии — численный эксперимент; штриховые линии — расчет по модели (5.1)–(5.2). Цифры: 1 — $p_0=190 \text{ МПа}$; 2 — $p_0=250 \text{ МПа}$; 3 — $p_0=210 \text{ МПа}$; 4 — $p_0=230 \text{ МПа}$; 5 — $p_0=200 \text{ МПа}$.

Р и с. 4. Кривые ползучести толстостенной сферы при нестационарных режимах нагружения: сплошные линии — численный эксперимент; штриховые линии — расчет по модели (5.1)–(5.2). Цифры: 1 — $p_0=190 \text{ МПа}$; 2 — $p_0=280 \text{ МПа}$; 3 — $p_0=220 \text{ МПа}$; 4 — $p_0=0 \text{ МПа}$; 5 — $p_0=210 \text{ МПа}$.

Построение обобщенной реологической модели для сферической оболочки

Если в качестве внешней "обобщенной силы" взять внутреннее давление, а в качестве "обобщенного перемещения" — перемещение на внутреннем радиусе, то, как это следует из рис.1 и 2, наблюдается полная аналогия в эволюции сферы и одноосного образца при растяжении в процессе ползучести и упругопластического деформирования. В связи с этим обобщенная модель реологического деформирования и разрушения толстостенной сферы как целого по аналогии с одноосным напряженным состоянием [8–9] принимается в виде

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= e + e^p + p, & e &= \frac{q}{G}; \\
 \dot{e}^p &= \begin{cases} 0, & q(t) \leq q_{\text{пр}}, \\ \lambda \left[a \left(q(t) - q_{\text{пр}} \right)^{n_1} - e^p(t) \right], & [\dots] > 0, \\ 0, & [\dots] \leq 0, & q(t) > q_{\text{пр}}, \end{cases} \\
 p &= u + v + w; \\
 u(t) &= \sum_k u_k(t), & \dot{u}_k(t) &= \lambda_k \left[a_k \left(\frac{q}{q_*} \right)^{n_2} - u_k(t) \right]; \\
 v(t) &= \sum_k v_k(t), & \dot{v}_k(t) &= \begin{cases} \lambda_k \left[b_k \left(\frac{q}{q_*} \right)^{n_2} - v_k(t) \right], & [\dots] > 0; \\ 0, & [\dots] \leq 0, \end{cases} \\
 \dot{w}(t) &= c \left(\frac{q}{q_*} \right)^{m_1}, \\
 q &= q_0(1 + \omega), \\
 \dot{w} &= \gamma q \dot{e}^p + \alpha q \dot{p}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Здесь ε — полное обобщенное перемещение; e , e^p — упругая и пластическая компоненты ε ; p — компонента обобщенного перемещения, вызванная ползучестью; u , v , w — вязкоупругая, вязкопластическая и вязкая составляющие p ; G — интегральная (либо локальная) упругая податливость в заданной точке; q_0 и q соответственно номинальное и истинное значения обобщенной нагрузки, $q_{\text{пр}}$ — предел пропорциональности на диаграмме упругопластического деформирования в координатах $\varepsilon — q$; a , n_1 , λ , λ_k , a_k , b_k , n_2 , c , m_1 , q_* — константы модели.

Детальный анализ данных показал, что в общем случае $\gamma = \gamma(e^p)$ и $\alpha = \alpha(q_0)$ и для них можно использовать степенные аппроксимации вида

$$\gamma = \gamma_1 (e^p)^{m_2}, \quad \alpha = \alpha_1 q_0^{m_3}. \tag{25}$$

Величину истинной нагрузки q можно трактовать следующим образом. В процессе неупругого деформирования конструктивного элемента происходит накопление поврежденности (появление микротрещин, микропор и т.п.), что ведет к увеличению величины обобщенной плотности поля внешних нагрузок при $q_0 = \text{const}$. Поэтому кинетика для обобщенной плотности внешних нагрузок записывается с учетом микроповрежденности.

В качестве критерия разрушения (локального или интегрального) конструктивного элемента используется соотношение вида

$$\int_0^t \frac{q(t) de^p(t)}{A_*^p} + \int_0^t \frac{q(t) dp(t)}{A_*^c(q_0)} = 1. \tag{26}$$

Здесь $A_*^p = \text{const}$, $A_*^c(q_0) = \alpha_A q_0^{m_A}$.

В рассматриваемом случае роль обобщенной силы q играет давление p , роль обобщенного перемещения ε — радиальное перемещение на внутренней поверхности сферы.

Как отмечалось выше в качестве исходной информации для построения уравнений (24) и критерия (25) служат кривая упругопластического деформирования сферы в координатах $\varepsilon — q_0$ и серия кривых ползучести при $q_0 = \text{const}$ вплоть до разрушения, которые в настоящей работе получены численным решением соответствующей краевой задачи и представлены на

рис.1 и 2 сплошными линиями. Используя эту информацию по методике, изложенной в [8], были определены все параметры модели (24)–(26), значения которых представлены в таблицах 3 и 4.

Таблица 3

Значения параметров модели (24)–(26) для описания деформации пластичности толстостенной сферической оболочки из сплава ЭИ 698 при $T=700^\circ\text{C}$

$q_{пр}, \text{МПа}$	$E \cdot 10^5, \text{МПа}$	$a, \text{МПа}^{-n_1}$	n_1	$\gamma_1, \text{МПа}^{-1}$	$A_s^p, \text{МДж/м}^3$	m_2
212.1	6.13	$6.86 \cdot 10^{-9}$	2.178	$3 \cdot 10^{-3}$	15.39	-0.609

Таблица 4

Значения параметров модели (24)–(26) для описания деформации ползучести толстостенной сферической оболочки из сплава ЭИ 698 при $T=700^\circ\text{C}$

$q_s, \text{МПа}$	k	$\lambda_k, \text{ч}^{-1}$	$a_k \times 10^{-5}$	$b_k \times 10^{-5}$	$c \times 10^{-8}$	n_2	m_1	$\alpha_1, \text{МПа}^{-1-m_1}$	m_3	$\alpha_1, \text{МПа}^{-1-m_A}$	m_A
200	1	$7.75 \cdot 10^{-4}$	4.29	8.58	3.5	3.343	6.188	75.487	-0.923	0.9	0
	2	$4.99 \cdot 10^{-3}$	2.35	4.7							
	3	$1.68 \cdot 10^{-1}$	2.07	4.15							

Для сравнения на рис.2 штриховыми линиями показаны рассчитанные по предложенной модели (24)–(26) диаграммы упругопластического деформирования в координатах $p_0 - \varepsilon$ (p_0 — истинное давление). На рис.1 штриховыми линиями представлены результаты расчета кривых ползучести по модели (24)–(26) для стационарных режимов нагружения при $p_0 = \text{const}$. Адекватность модели (24)–(26) с данными решения краевой задачи была выполнена для нестационарных режимов нагружения. На рис.3–5 сплошные линии соответствуют данным численного решения краевой задачи о ползучести толстостенной сферической оболочки (численный эксперимент), а штриховые — данным расчета по модели (24)–(26). Как следует из представленных рисунков, наблюдается соответствие данных численного эксперимента и расчета по модели (24)–(26).

Приведенный пример свидетельствует о том, что в ряде случаев связь обобщенных перемещений с обобщенными нагрузками может быть сформулирована соотношениями типа (24)–(26). Достоинством соотношений типа (24)–(26) является то, что существенно понижается размерность исходной краевой задачи и, как следствие этого, на порядок уменьшается количество вычислений. Краевую задачу при этом необходимо решать лишь для нескольких стационарных режимов нагружения при $p_0(t) = \text{const}$. При переменных режимах нагружения нет необходимости в решении краевой задачи, а достаточно воспользоваться "одномерными" соотношениями (24)–(25). Это немаловажный фактор с точки зрения оценки вычислительной устойчивости расчетных алгоритмов, так как при решении полных краевых задач с учетом времени приходится многократно пересчитывать одни и те же итерационные процедуры (реальные элементы конструкций, например, в энергетической промышленности в условиях ползучести эксплуатируются до $10^4 \div 10^5$ часов).

Р и с. 5. Кривые ползучести толстостенной сферы при нестационарных режимах нагружения: сплошные линии — численный эксперимент; штриховые линии — расчет по модели (24)–(25). Цифры: 1 — $p=190 \text{ МПа}$, 2 — $p=270 \text{ МПа}$, 3 — $p=210 \text{ МПа}$, 4 — $p=230 \text{ МПа}$, 5 — $p=220 \text{ МПа}$, 6 — $p=280 \text{ МПа}$.

Данный подход наиболее полезен в задачах оценки остаточного ресурса сферических сосудов и оболочек по деформационным критериям отказа, так как величина радиального перемещения ε может диагностироваться по изменению радиуса сферической оболочки в процессе ее ползучести.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Самарин Ю.П., Еремин Ю.А. Метод исследования ползучести конструкций // Проблемы прочности. 1985. №4. С.40–45.
2. Самарин Ю.П., Клебанов Я.М. Обобщенные модели в теории ползучести конструкций. Самара: Поволж. отд-ние инженер. акад. РФ. Самарский гос. техн. ун-т, 1994. 197с.
3. Еремин Ю.А., Кайдалова Л.В., Радченко В.П. Исследование ползучести балок на основе аналогии структуры уравнений состояния материала и элементов конструкций // Машиноведение. 1983. №2. С.67–74.
4. Самарин Ю.П., Радченко В.П. О решении краевых задач механики сплошных сред методами теории управления // Механика и прикладная математика. Тула: Приокское кн. изд-во, 1988. С.3–8.
5. Радченко В.П. Компактное представление напряженно-деформированного состояния в точке при решении краевых задач реологии / Прочностные и динамические характеристики машин и конструкций. Пермь: Перм. ГТУ, 1994. С.46–55.
6. Радченко В.П., Кубышкина С.Н. Об одном подходе к описанию реологического деформирования и разрушения резьбовых соединений // Изв. вузов. Машиностроение. 1998. №4–6. С.31–35.
7. Радченко В.П., Кубышкина С.Н. Об одном подходе к описанию реологического деформирования и разрушения толстостенной трубы // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. седьмой межвуз. конф. Ч.1. Самара: СамГТУ, 1997. С.111–116.
8. Радченко В.П. Энергетический вариант одноосной теории ползучести и длительной прочности // Журн. прикл. мех. и техн. физики. 1991. №4. С.172–179.
9. Радченко В.П., Кичаев Е.К. Феноменологическая реологическая модель и критерий разрушения металлов при одноосном напряженном состоянии // Проблемы прочности. 1991. №11. С.13–19.
10. Радченко В.П. Математическая модель неупругого деформирования и разрушения металлов при ползучести энергетического типа // Вестн. СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. Вып.4. 1996. С.43–63.
11. Радченко В.П., Кубышкина С.Н. Математическая модель реологического деформирования и разрушения толстостенной трубы // Вестн. СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. Вып.6.1998.С.23–34.
12. Кадашев Ю.И., Мосолов А.Б. Эндохронные теории пластичности: основные положения, перспективы развития // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. №1. С.161–168.
13. Мосолов А.Б. Эндохронная теория пластичности. М.: Институт проблем механики АН СССР, 1988.С.44.
14. Миронова С.Н. Решение задачи упругопластического деформирования и разрушения толстостенной трубы на основании эндохронной теории ползучести //Вестн. СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. Вып.4. 1996.С.85–92.