Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Стружанов, Живучесть и устойчивость механических систем, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 30, 5–21

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu304>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 05:49:04

Механика деформируемого твердого тела

УДК 539.3:534.1

В.В. Стружанов

ЖИВУЧЕСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Сформулированы основные положения теории живучести механических систем. Разработана схема решения задачи живучести, которая проиллюстрирована на примере расчета живучести простой стержневой системы, работающей на растяжение. Приведен математический аппарат, необходимый для определения моментов потери устойчивости процесса деформирования и катастрофического разрушения системы.

Введение. На стадии проектирования конструкции их элементы рассчитываются по допускаемым нагрузкам, которые, как правило, определяют, исходя из нормальных (средних) условий эксплуатации. Проводят также расчеты надежности механических систем, т.е. вероятности их безотказной работы и выполнения возложенных на них функций при воздействии тех же нормативных внешних нагрузок. Однако во время эксплуатации механической системы возможно ненормативное (экстремальное, аварийное и т.п.) возрастание нагрузок или чрезвычайно быстрый рост повреждений. В этих условиях эксплуатационные качества конструкции определяются ее живучестью, т.е. способностью оказывать сопротивление внешним силам, когда несколько элементов системы выйдут из строя. Системы, обладающие большой живучестью, разрушаются постепенно, сохраняя при этом ограниченную работоспособность. Поэтому всегда имеется время для их ремонта. Системы с малой живучестью разрушаются катастрофически, что зачастую сопровождается большими материальными потерями и даже гибелью людей. Следовательно, при проектировании конструкций (механических систем) необходимо учитывать экстремальные ситуации и прогнозировать живучесть систем, находя затем конструктивные решения для повышения их живучести, чтобы избежать катастрофических разрушений.

Несмотря на актуальность проблемы живучести, в настоящее время отсутствуют соответствующие методики и целенаправленные расчеты живучести конструкций не проводятся. В рамках данной работы сделана попытка формализовать задачу живучести и разработать методические положения для ее решения. Так как живучесть тесно связана с устойчивостью механических систем, то приводятся методы и критерии, позволяющие определить моменты потери устойчивости и катастрофического разрушения.

1. Живучесть механических систем. В результате действия экстремальных нагрузок, накопления повреждений, изменения с течением времени геометрии и тому подобных причин уменьшается способность механической системы сопротивляться внешним воздействиям. Системы, обладающие большой живучестью, теряют несущую способность постепенно. Системы же с малой живучестью разрушаются катастрофически.

Определение 1.1. *Живучесть – это свойство механической системы, определяющее ее способность сохранять по крайней мере ограниченную несущую способность при повреждении или разрушении отдельных элементов системы или при накоплении необратимых деформаций, приводящих к изменению ее геометрии.*

Очевидно, что несущая способность системы связана с процессами накопления и отдачи механической энергии. Если энергия не изменяется, то система находится в одном и том же положении равновесия. Когда изменение уровня энергии носит непрерывный характер, то и несущая способность изменяется непрерывным образом. Система плавно переходит из одного положения равновесия в другое. Если происходит резкий сброс энергии, то несущая способность изменяется также скачкообразно. Система скачком переходит в новое положение равновесия.

Несущая способность в целом определяется величиной потенциальной энергии упругих деформаций Π^e . Сброс энергии также происходит за счет упругой энергии. Введем функцию

$\mu(t) = 1 - \Pi^e(t+0)/\Pi^e(t-0)$, характеризующую плавность изменения несущей способности с течением времени и равную относительной величине потерянной энергии в момент времени t . В точках непрерывности функции Π^e (плавное изменение несущей способности) функция $\mu = 0$, в точках разрыва (сброс энергии) $0 < \mu \leq 1$. Значение $\mu = 1$ означает полную потерю несущей способности (разрушение). С формальной точки зрения величину μ можно трактовать как вероятность разрушения в момент времени t .

Далее положение каждой системы описывается совокупностью параметров управления χ_n ($n=1, \dots, N$) и параметров состояния κ_m ($m=1, \dots, M$). Параметры управления определяют природу и человек (внешние нагрузки, конструкторские решения, выбор материала и т.п.), параметры состояния – это характеристики реакции системы (напряжения, деформации, перемещения и т.п.) При заданных параметрах управления параметры состояния должны принимать такие значения, при которых система будет находиться в положении равновесия.

В расчетах конструкций, как правило, используют среднестатистические значения параметров управления и стремятся удовлетворить условию $\mu = 0$. Расчет на живучесть напротив предполагает внезапное превышение отдельными параметрами управления своих средних значений. На стадии проектирования может быть известно только то, что такие события возможны. Поэтому расчет на живучесть начинается с формулировки несовместных сценариев A_k ($k=1, \dots, K$) возможных событий для каждого момента t . Например, сценарий $A_1 \{\chi_1^*, \chi_2, \dots, \chi_N\}$ означает, что в данный момент времени при заданных параметрах $\chi_2, \dots, \chi_N$ параметр χ_1 достигнет предельного (экстремального) значения; сценарий $A_2 \{\chi_1^*, \chi_2^*, \chi_3, \dots, \chi_N\}$ – в данный момент времени при заданных $\chi_3, \dots, \chi_N$ параметры χ_1 и χ_2 одновременно достигнут критических значений; сценарий $A_3 \{\chi_2^*, \chi_1^*, \chi_3^*, \dots, \chi_N\}$ – при заданных параметрах $\chi_4, \dots, \chi_N$ в данный момент параметр χ_2 достигнет критического значения, затем через время τ_1 достигает критического значения параметр χ_1 , а через время τ_2 и параметр χ_3 ; и т.п.

Следующий этап заключается в определении величины критического значения параметра (или параметров) управления для каждого сценария. Затем сценарии проигрываются и вычисляются значения функций $\mu_k(t)$. Наконец, из эвристических соображений задается вероятность реализации каждого сценария $P_k(t)$ и рассчитывается обобщенный параметр (функция) живучести

$$G(t) = 1 - \sum_{i=1}^K \mu_i(t) P_i(t), \quad (1)$$

который характеризует живучесть в каждый момент времени. Если $G = 1$, то система абсолютно живучая. Когда $G = 0$, то система абсолютно не живучая (разрушается катастрофически). Если $0 < G < 1$, система сохраняет ограниченную несущую способность. Сумма в формуле (1) представляет собой аналог формулы полной вероятности, определяющей вероятность катастрофического разрушения системы. Параметр $G(t)$ в этом случае является вероятностью функционирования системы без катастроф.

В заключении введем еще понятия живучести в малом и живучести в большом. Расчет на живучесть в малом предполагает использование чистых (простых) сценариев, в которых критическое значение может принимать только один из параметров управления. Расчет на живучесть в большом предполагает использование всевозможных смешанных (сложных) сценариев, в которых критические значения могут принимать несколько параметров управления в разной очередности и различных сочетаниях. Очевидно, что живучесть в малом определяет верхнюю границу обобщенного параметра G . При учете смешанных сценариев параметр G может разве лишь уменьшиться.

2. Устойчивость и живучесть стержневой системы. Проведем расчет живучести простой стержневой системы в качестве иллюстрации изложенного выше подхода к определению живучести.

2.1. Характеристика системы. Рассмотрим стержневую систему, изображенную на рис. 1. Она состоит из двух параллельных стержней 1 и 2, одним концом соединенных с неподвижной стенкой 5, а другим с абсолютно жестким поршнем 4, который перемещается поступательно на расстояние x . Поршень соединен с упругим стержнем 3, имеющим жесткость c . Растяжение системы осуществляем либо задавая перемещение u свободному концу стержня 3 (жесткое

нагружение), либо прикладывая там растягивающую силу p (мягкое нагружение). Деформационные свойства упруго-пластических стержней определяют соответственно функции $q_1(v)$ и $q_2(w)$, где v – удлинение первого стержня, а w – удлинение второго. Эти функции представляют собой полные диаграммы растяжения (деформирования) и имеют восходящие и ниспадающие до нуля ветви (рис. 2) [1-5]. Восходящая ветвь характеризует свойства стержней на стадиях упругости и упрочнения материала, ниспадающая ветвь – на стадии разупрочнения материала (неустойчивого растяжения). Не нарушая общности дальнейших рассуждений, полагаем, что предельные удлинения стержней 1 и 2 равны ($v^z = w^z$).

При упругом деформировании растяжением или сжатием жесткость стержней 1 и 2 равна соответственно λ_1, λ_2 ; свойства неупругого деформирования заданы касательными модулями λ_1^p, λ_2^p (рис. 2), разгрузка происходит по линейному закону с модулями λ_1, λ_2 .

Наконец, в свободном от связей состоянии упругопластические стержни могут иметь разные длины. В этом случае для определенности будем считать, что длина стержня 2 меньше длины стержня 1 на величину ε . После объединения в единую систему еще при отсутствии внешних сил в стержнях 1, 2 возникнут напряжения, самоуравновешенные в системе (остаточные напряжения).

2.2. Параметры управления и сценарии. При мягком нагружении в качестве параметров управления системой выступают $\chi_1 = p, \chi_2 = c, \chi_3 = q_1, \chi_4 = q_2, \chi_5 = \varepsilon$. Величины $\kappa_1 = u, \kappa_2 = x$ – параметры состояния. Для жесткого нагружения параметры управления $\chi_1 = u, \chi_2 = c, \chi_3 = q_1, \chi_4 = q_2, \chi_5 = \varepsilon$ и один параметр состояния $\kappa_1 = x$.

Определим сценарии, реализация которых может привести к катастрофическому разрушению системы стержней, причем будем рассматривать только чистые сценарии, определяя в последствии только живучесть в малом.

Сценарии для мягкого нагружения: $A_1 \{p^*, c, q_1, q_2, \varepsilon = 0\}$ – превышение растягивающей силой критического значения при фиксированных c, q_1, q_2 и отсутствии начальных напряжений; $A_2 \{p, c, q_1, q_2^*, \varepsilon = 0\}$ – внезапное разрушение стержня 2 в результате существенного дефекта, возникшего при его изготовлении; $A_3 \{p = 0, c, q_1, q_2, \varepsilon^*\}$ – разрушение системы до приложения нагрузки из-за наведенных начальных напряжений; $A_4 \{p^*, c, q_1, q_2, \varepsilon\}$ – превышение растягивающей силой критического значения при наличии в системе начальных напряжений; $A_5 \{p, c, q_1, q_2^*, \varepsilon\}$ – разрушение дефектного стержня 2 также в присутствии начальных напряжений.

Сценарии для жесткого нагружения формулируются аналогично. Только вместо растягивающего усилия рассматривается перемещение u . Итак, $L_1 \{u^*, c, q_1, q_2, \varepsilon = 0\}, L_2 \{u, c, q_1, q_2^*, \varepsilon = 0\}, L_4 \{u^*, c, q_1, q_2, \varepsilon\}, L_5 \{u, c, q_1, q_2^*, \varepsilon\}$. Сценарий L_3 здесь совпадает со сценарием A_3 .

Все эти сценарии будем проигрывать для некоторого фиксированного начального момента времени, пренебрегая временными факторами (релаксация, ползучесть, усталость и т.п.) и динамическими эффектами.

Р и с. 1. Расчетная схема стержневой системы

Р и с. 2. Полные диаграммы растяжения упруго-пластических стержней

2.3. Устойчивость и живучесть при мягком нагружении. Рассмотрим последовательно все сценарии. Начнем со сценария A_4 и определим критическое значение параметра p^* , после достижения которого происходит сброс энергии (потеря устойчивости положения равновесия). Для исследования устойчивости процесса растяжения при постепенном возрастании растягивающего усилия воспользуемся выражением полной энергии системы [6-10]

$$\Pi_p = \int_0^w q_2(z) dz + \int_0^v q_1(z) dz + \frac{c}{2}(u-x)^2 - \int_0^u p du,$$

где первые два слагаемых – энергия деформаций упругопластических стержней; третье слагаемое – потенциальная энергия упругих деформаций стержня 3; последнее слагаемое – работа растягивающей силы, взятая со знаком минус; $w = x + \varepsilon_2$ – удлинение стержня 2; $v = x - \varepsilon_1$ – удлинение стержня 1; $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon = const$. Различие в длине стержней 1 и 2 после объединения в единую систему еще до приложения внешнего усилия вызывает удлинение стержня 2 на величину ε_2 и укорочение стержня 1 на величину ε_1 . Если параметр ε таков, что второй стержень не выходит за пределы упругости, то из условия равновесия имеем $\varepsilon_1 = \lambda_2 \varepsilon_2 / \lambda_1$.

Система сил, действующих на конструкцию, при активном нагружении (без разгрузки упругопластических стержней) является консервативной, так как, во-первых, при активном деформировании упругопластический материал неотличим от нелинейно упругого [11], во-вторых, усилия $q_1(v)$ и $q_2(w)$ при активном растяжении представляют собой аналоги силы притяжения между двумя материальными частицами, зависящими лишь от расстояния между ними и поэтому являющимися консервативными силами [12]. Отсюда все положения равновесия системы определяют критические точки функции Π_p , являющиеся решениями уравнений

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial x} = q_1(v) + q_2(w) - c(u-x) = 0, \quad \frac{\partial \Pi_p}{\partial u} = c(u-x) - p = 0. \quad (2)$$

Смена типа равновесия происходит в дважды вырожденных критических точках, которые находятся из совместного решения уравнений (2) и уравнения, получающегося приравнованием к нулю детерминанта гессиана функции Π_p [13], а именно,

$$\frac{\partial^2 \Pi_p}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Pi_p}{\partial u^2} - \left(\frac{\partial^2 \Pi_p}{\partial x \partial u} \right)^2 = \left(\frac{dq_1}{dv} \frac{dv}{dx} + \frac{dq_2}{dw} \frac{dw}{dx} + c \right) c - c^2 = 0$$

или

$$\lambda_1^p + \lambda_2^p = 0, \quad (3)$$

где $\lambda_1^p = dq_1/dv$, $\lambda_2^p = dq_2/dw$.

Р и с. 3. Фазовые портреты процесса растяжения в сценариях A_4 , A_1

На фазовой плоскости $\lambda_1^p \lambda_2^p$ равенство (3) задает прямую $\lambda_2^p = -\lambda_1^p$ (прямая 1, рис. 3), которая разделяет области устойчивого (зона I) и неустойчивого (зона II) деформирования системы стержней. В процессе растяжения изменяется параметр x и функции $\lambda_1^p = \lambda_1^p(v(x))$, $\lambda_2^p = \lambda_2^p(w(x))$ представляют собой параметрическое уравнение кривой, образ которой показан на рис. 3 (кривая 2). Когда стержни 1 и 2 находятся на стадии упругости, то параметрическое уравнение определяет только координаты точки k (рис. 3). Затем предварительно растянутый стержень 2 переходит на стадию упрочнения, а кривая 2 опускается вертикально до точки d , в которой и стержень 1 переходит в состояние упрочнения.

Затем начинают уменьшаться и λ_1^p , и λ_2^p . Кривая 2 устремляется к прямой 1 и пересекает ее в точке a . В этот момент система теряет устойчивость и уже не может вернуться в какое-либо устойчивое положение равновесия, т.к. после точки a кривая 2 все время остается в области неустойчивости. Подставляя координаты точки a в параметрическое уравнение кривой 2, находим значение $x = x^*$. После подстановки величины x^* в уравнения равновесия (2) получаем

предельные значения параметров u^* и $p^* = p_4^*$. Отметим, что величина p_4^* не зависит от параметра c .

Теперь очевидно, что при $p > p_4^*$ происходит катастрофическое разрушение системы и поэтому $\mu_4 = 1$. Наконец, задаем вероятность $P_4 = P(A_4)$ осуществления сценария A_4 , т.е. вероятность превышения растягивающим внешним усилием найденного значения p_4^* .

Сценарий A_1 отличается от сценария A_4 тем, что параметр $\varepsilon = 0$. В этом случае $v = w = x$. Параметрическое уравнение изменяется и определяет в фазовом пространстве уже кривую 3 (рис. 3). Используя координаты точки b (точки пересечения кривой 3 и прямой 1), вычисляем критическое значение растягивающего усилия p_1^* . Очевидно, что и в этом сценарии при $p > p_1^*$ система разрушается и $\mu_1 = 1$. Вероятность реализации сценария A_1 обозначим $P_1 = P(A_1)$. Отметим еще, что $p_1^* > p_4^*$, а $P_1 < P_4$.

Перейдем к сценарию A_2 , в котором параметры p, c, ε фиксированы ($\varepsilon = 0$). Подставляя их значения в уравнения равновесия (2), находим x_1^* – удлинение стержней 1 и 2. Пусть при этом стержень 2 находится на стадии упругости или упрочнения, но величина растягивающего усилия в стержне 2, а именно, $q_2^* = q_2(x_1^*)$, является критической, т.е. достаточной для начала лавинообразного роста дефектов. Тогда через некоторый малый промежуток времени τ_1 стержень 2 разрушится. Если свойства стержня 1 таковы, что $\max q_1 < p$, то разрушается и вся система (теряет свою несущую способность). В этом случае $\mu_2 = 1$. Вероятность сценария A_2 оцениваем величиной P_2 .

В сценарии A_5 фиксированы параметры p, c, ε . Из уравнений равновесия (2) находим x_2^* – перемещение поршня 4. Тогда удлинение второго стержня равно $w^* = x_2^* + \varepsilon_2$, а усилие растяжения $q_2 > q_2^*$ (материал стержня еще не вышел на стадию разупрочнения). Очевидно, что при таком усилии скорость развития дефектов возрастает и стержень 2 разрушается через время $\tau_2 < \tau_1$. Итак, при реализации сценария A_5 снова имеем $\mu_5 = 1$, а вероятность его задаем значением P_5 .

Наконец рассмотрим сценарий A_3 , когда стержень 2 изначально короче стержня 1 на величину ε . Определим критическое значение ε^* , при котором в системе произойдет сброс энергии, т.е. после объединения стержней 1 и 2 в единую систему еще не нагруженная система стержней потеряет устойчивость. Итак, в единой системе стержень 1 сжимается на некоторую величину ε_1 , а стержень 2, в свою очередь, растягивается на величину ε_2 ($\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$). Запишем выражение для полной энергии системы, учитывая то, что стержень 1 недеформирован. Имеем

$$\Pi_\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_2} q_2(z) dz + \frac{\lambda_1}{2} (\varepsilon - \varepsilon_2)^2.$$

Критические точки находятся из уравнения равновесия

$$\frac{d\Pi_\varepsilon}{d\varepsilon_2} = q_2(\varepsilon_2) - \lambda_1(\varepsilon - \varepsilon_2) = 0. \quad (4)$$

Вырожденные критические точки определяет равенство

$$\frac{d^2\Pi_\varepsilon}{d\varepsilon_2^2} = \lambda_2^P(\varepsilon_2) + \lambda_1 = 0, \quad (5)$$

представляющее собой условие потери устойчивости (наименьший корень соответствует моменту смены устойчивого положения равновесия на неустойчивое).

На фазовой плоскости уравнение (5) задает прямую $\lambda_2^P = -\lambda_1$, разделяющую области устойчивости (зона I) и неустойчивости (зона II) (прямая 1, рис.4). Функции $\lambda_2^P = \lambda_2^P(\varepsilon_2)$ и $\lambda_1^P = \lambda_1$ являются параметрическим уравнением прямой (прямая 2, рис. 4), отражающей процесс деформирования системы при изменении параметра ε и, следовательно, величины ε_2 . Прямая 2 пересекает прямую 1 в точке k (момент потери устойчивости). Если уравнение (5)

а после скачка – $\Pi_2^e = \lambda_1 (\varepsilon^* - \varepsilon_2'')^2 / 2 + [q_2(\varepsilon_2'')]^2 / 2\lambda_2$. Здесь ε_2'' – второй корень уравнения (5) ($\varepsilon_2'' > \varepsilon_2'$). Тогда $\mu_3 = 1 - \Pi_2^e / \Pi_1^e < 1$. Вероятность сценария A_3 равна P_3 .

имеет несколько корней (для определенности два корня), то прямая 2, достигнув точки n , возвращается в область устойчивости. Это означает, что после потери устойчивости система имеет новое устойчивое положение равновесия, в которое переходит скачкообразно. Подставляя наименьший корень ε'_2 уравнения (5) в выражение (4), определяем критическое значение ε^* , при котором система теряет устойчивость. Отметим, что при наличии только одного корня уравнения (5) система не теряет устойчивости, так как, достигнув точки k , прямая 2 возвращается в область устойчивости.

Далее в момент потери устойчивости упругая энергия системы равна

$$\Pi_1^e = \lambda_1 (\varepsilon^* - \varepsilon_2^1)^2 / 2 + [q_2(\varepsilon_2')^2] / 2\lambda_2,$$

а после скачка – $\Pi_2^e = \lambda_1 (\varepsilon^* - \varepsilon_2'')^2 / 2 + [q_2(\varepsilon_2'')]^2 / 2\lambda_2$. Здесь ε_2'' – второй корень уравнения (5) ($\varepsilon_2'' > \varepsilon_2'$). Тогда $\mu_3 = 1 - \Pi_2^e / \Pi_1^e < 1$. Вероятность сценария A_3 равна P_3 .

После проведенного исследования всех сценариев вычисляем значение обобщенного параметра живучести

$$G_P = 1 - \sum_{i=1}^5 \mu_i P_i$$

для мягкого нагружения системы стержней.

2.4. Устойчивость и живучесть при жестком нагружении. Рассмотрим сначала сценарий L_4 и определим критическое значение параметра u^* , после достижения которого система теряет устойчивость. Запишем выражение для полной энергии

$$\Pi_u = \int_0^w q_2(z) dz + \int_0^v q_1(z) dz + c(u-x)^2/2,$$

где w, v – определены в предыдущем пункте в сценарии A_4 . Тогда уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{\partial \Pi_u}{\partial x} = q_2(w) + q_1(v) - c(u - x) = 0, \quad (6)$$

а гессиан функции Π_{ii} , как функции одного параметра состояния x , равен

$$\frac{\partial^2 \Pi_u}{\partial x^2} = \lambda_2^P + \lambda_1^P + c = 0. \quad (7)$$

На фазовой плоскости равенство (7) задает прямую $\lambda_2^P + \lambda_1^P = -c$ (прямая 1, рис.5), разделяющую области устойчивости (зона I) и неустойчивости (зона II). Параметрическое уравнение кривой, характеризующей процесс деформирования, задано функциями $\lambda_1^P = \lambda_1^P(v)$, $\lambda_2^P = \lambda_2^P(w)$. Изменяя параметр x , получаем кривую 2 на рис. 5. Ясно, что эта кривая совпадает с кривой 2 на рис.3.

Координаты точки a , в которой кривая 2 первый раз пересекает прямую 1, определяют значение параметра x_1^* , отвечающего переходу системы из устойчивого положения равновесия в неустойчивое (момент потери устойчивости). Подставляя x_1^* в уравнение (6), находим искомое значение u_4^* . Если уравнение (7) имеет два корня (для определенности), то значение второго корня x_2^* ($x_2^* > x_1^*$) определяет координаты второй точки пересечения кривой 2 и прямой 1 (точка b), когда кривая 2 снова выходит в область устойчивости при том же зна-

чении u^* . Отметим, что при наличии одного корня уравнения (7) потери устойчивости не происходит (кривая 2 только касается прямой 1 и снова уходит в область устойчивости).

Далее, потенциальная энергия упругих деформаций в момент потери устойчивости равна

$$\Pi_{14}^e = c(u_4^* - x_1^*)^2 / 2 + [q_1(v_1^*)]^2 / \lambda_1 + [q_2(w_1^*)]^2 / \lambda_2,$$

а в новом положении равновесия, куда система перешла в результате скачка,

$$\Pi_{24}^e = c(u_4^* - x_2^*)^2 / 2 + [q_1(v_2^*)]^2 / \lambda_1 + [q_2(w_1^*)]^2 / \lambda_2.$$

Здесь $v_1^* = x_1^* - \varepsilon_1$, $w_1^* = x_1^* + \varepsilon_2$, $v_2^* = x_2^* - \varepsilon_1$, $w_2^* = x_2^* + \varepsilon_2$. Отсюда $\mu'_4 = 1 - \Pi_{24}^e / \Pi_{14}^e$. Вероятность сценария L_4 обозначим P'_4 .

Сценарий L_1 отличается от сценария L_4 тем, что $\varepsilon = 0$ и, следовательно, $v = w = x$. Производя аналогичные действия, находим кривую 3 (рис. 5) и затем, используя координаты точек ее пересечения с прямой 1, вычисляем все необходимые величины для определения μ'_1 . Вероятность сценария L_1 обозначим P'_1 . Отметим, что $u_1^* > u_4^*$ и $P'_4 > P'_1$.

Сценарий L_3 совпадает со сценарием A_3 и поэтому $\mu'_3 = \mu_3$, $P'_3 = P_3$.

Рассмотрим теперь сценарий L_2 . Пусть при фиксированных значениях параметров u, c, ε ($\varepsilon = 0$) стержни 1 и 2 находятся в упругом состоянии. Тогда уравнение равновесия имеет вид

$$\lambda_1 x + \lambda_2 x - c(u - x) = 0.$$

Отсюда удлинение этих стержней $x = x_1 = cu / (\lambda_1 + \lambda_2 + c)$. Однако при данном значении x_1 растягивающее усилие в стержне 2 является критическим, т.е. достаточным для лавинообразного роста дефектов. Обозначим его $q_2^* = q_2(x_1^*)$, $x_1^* = x_1$. Таким образом, через небольшой промежуток времени τ_1 стержень 2 разрушается. После этого всю нагрузку воспринимает только стержень 1, и он может перейти на неупругую стадию деформирования. Из уравнения равновесия

$$q_1(x) - c(u - x) = 0$$

находим значение $x = x_2$ ($x_2 > x_1$), которое отвечает новому устойчивому положению равновесия системы.

Потенциальная энергия упругих деформаций системы до разрушения стержня 2 равна $\Pi_{12}^e = \lambda_1 x_1^2 / 2 + \lambda_2 x_1^2 / 2 + c(u - x_1)^2 / 2$, и $\Pi_{22}^e = [q_1(x_2)]^2 / 2\lambda_1 + c(u - x_2)^2 / 2$ – в новом положении равновесия. Тогда $\mu_2 = 1 - \Pi_{22}^e / \Pi_{12}^e$. Вероятность реализации сценария L_2 равна P'_2 .

И, наконец, сценарий L_5 . В этом случае перемещение поршня x также равняется величине x_1 , определенной в сценарии L_2 . Но $v = x_1 - \varepsilon_1$, $w = x_1 + \varepsilon_2$. Так как удлинение стержня 2 здесь больше, чем в сценарии L_2 , то и усилие растяжения в нем $q_2(w) > q_2^*$. Следовательно, процесс разрушения будет протекать более интенсивно и за более короткий промежуток времени. До разрушения стержня 2 потенциальная энергия упругих деформаций всей системы равна

$$\Pi_{15}^e = \lambda_1 (x_1 - \varepsilon_1)^2 / 2 + \lambda_2 (x_1 + \varepsilon_2)^2 / 2 + c(u - x_1)^2 / 2$$

(начальные напряжения таковы, что стержни 1, 2 остаются в упругом состоянии). После разрушения стержня 2 система скачком переходит в положение равновесия, которое, очевидно, совпадает с положением равновесия системы после скачка в сценарии L_2 , т.е. $\Pi_{25}^e = \Pi_{22}^e$. Тогда параметр $\mu_5 = 1 - \Pi_{25}^e / \Pi_{15}^e$, а вероятность реализации данного сценария полагаем равной P'_5 .

Обладея теперь всеми необходимыми данными, вычисляем обобщенный параметр живучести

$$G_u = 1 - \sum_{i=1}^5 \mu'_i P'_i$$

для жесткого нагружения системы.

3. Методы определения равновесных состояний системы и критерии устойчивости. Предыдущий анализ показывает, что основой расчета механических систем на живучесть является определение равновесных состояний системы и оценка их устойчивости. В данном разделе приведем математический аппарат для расчетов параметров равновесия и критерии потери ус-

тойчивости. Излагаемые соображения базируются на результатах, изложенных в работах [14-24].

3.1. Определяющие соотношения для упругопластического стержня. Дальнейшие рассуждения опираются на определяющие соотношения для упругопластического стержня. Пусть при удлинении v в стержне возникают усилия $q(v)$. Используя то, что разгрузка происходит по линейному закону с модулем λ , удлинение v можем представить в виде суммы $v = v^e + v^p$, где v^e – упругая составляющая удлинения, исчезающая при разгрузке, v^p – пластическая составляющая (остаточное удлинение). Тогда $q(v) = \lambda v^e = \lambda(v - v^p)$. Приращение усилия в данном случае равно $dq = \lambda(dv - dv^p)$, где dv – приращение удлинения, dv^p – приращение пластической составляющей удлинения. С другой стороны, справедливо инкрементальное соотношение $dq = \lambda^p dv$. Приравняв оба выражения для dq , получаем

$$dv^p = \left(1 - \frac{\lambda^p}{\lambda}\right) dv. \quad (8)$$

Формула (8) представляет собой закон пластичности для упругопластического стержня, связывающий приращение полного удлинения и его пластическую составляющую.

3.2. Итерационные процедуры определения положений равновесия и устойчивость. Не нарушая общности при исследовании устойчивости процесса деформирования стержневой системы посредством задания растягивающего усилия p или перемещения u , будем рассматривать изображенную на рис. 1 систему, в которой стержень 2 отсутствует, т.е. $q_2 = 0$, а $q_1 = q$, $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_1^p = \lambda^p$.

Мягкое нагружение. Рассмотрим сначала мягкое нагружение. С учетом определяющего соотношения для $q(v)$, условия $q_2 = 0$ и равенства $v = x$ (удлинение стержня равно перемещению поршня), уравнения равновесия (2) принимают вид

$$\lambda(x - x^p) - c(u - x) = 0, \quad c(u - x) - p = 0. \quad (9)$$

Разобьем задачу вычисления параметров равновесия на две, а именно, на основную задачу

$$\lambda\gamma - c(\varphi - \gamma) = 0, \quad c(\varphi - \gamma) - p = 0 \quad (10)$$

и корректирующую задачу

$$\lambda(\beta - x^p) - c(\psi - \beta) = 0, \quad c(\psi - \beta) = 0. \quad (11)$$

Уравнения (10) определяют положение равновесия упругой системы для заданного значения p (γ – удлинение стержня 1, φ – перемещение правого конца стержня 3). Уравнения (11) также определяют положение равновесия в упругой системе, но при $p = 0$ и некотором значении остаточного удлинения стержня 1, т.е. x^p (β – полное удлинение стержня 1, ψ – перемещение правого конца стержня 3). Непосредственной подстановкой проверяется, что при фиксированных значениях p и x^p решением уравнений (9) являются $x = \gamma + \beta$, $u = \varphi + \psi$, где γ, φ – решения уравнений (10), а β, ψ – решения уравнений (11).

Пусть при некотором $p = p_0$ система стержней находится в равновесии и ее состояние характеризуется параметрами $u = u_0$, $x = x_0$, $x^p = x_0^p$, $\lambda^p = \lambda_0^p$. Произведем догрузку на малую величину Δp . Решение исходной задачи (9) для $p = p_0 + \Delta p$ будем искать следующим образом. Сначала решим основную задачу для нагрузки Δp . Имеем $\gamma_1 = \Delta p / \lambda$, $\varphi_1 = (\lambda + c)\Delta p / (\lambda c)$. Затем получаем начальное приближение к искомому решению, а именно, $x_1 = x_0 + \gamma_1$, $u_1 = u_0 + \varphi_1$. Далее следует произвести корректировку начального приближения, для реализации которой необходимо найти решение уравнения (8) на отрезке $[x_0, x_1]$. Полагая, что на этом отрезке $\lambda^p = \lambda_0^p$, $dv = x_1 - x_0 = \gamma_1$, находим приближенное значение $dx_1^p = (1 - \lambda_0^p / \lambda)\gamma_1$. Теперь решаем уравнения (11), где $x^p = dx_1^p$. Получаем $\psi_1 = \beta_1 = dx_1^p$ и второе приближение $x_2 = x_1 + \beta_1$, $u_2 = u_1 + \psi_1$. В завершение этого этапа вычисляем значение касательного модуля в точке x_1 , т.е. $\lambda_1^p = \lambda^p(x_1)$.

Снова решаем уравнение (8), но уже на отрезке $[x_1, x_2]$ при $\lambda^p = \lambda_1^p$ и $dv = \beta_1$. Имеем $dx_2^p = (1 - \lambda_1^p / \lambda)\beta_1$. Находим решение уравнений (11) $\psi_2 = \beta_2 = dx_2^p$ и следующее приближение

$x_3 = x_2 + \beta_2$, $u_3 = u_2 + \psi_2$ и вычисляем значение $\lambda_2^p = \lambda^p(x_2)$. И т.д. Схематически данный итерационный процесс изображен на рис. 6 (прямая 1, точка a - начальное приближение).

В результате применения итерационной процедуры получаем числовой ряд

$$x = x_0 + \frac{\Delta p}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} U^n \frac{\Delta p}{\lambda},$$

где $U^n = (1 - \lambda_{n-1}/\lambda) \dots (1 - \lambda_0^p/\lambda)$. Очевидно, что сходимость итерационного процесса определяет сходимость данного ряда.

Если $\lambda_n^p > 0$, то ряд сходится (сходимость устанавливается по признаку Даламбера). Когда в процессе итераций касательные модули достигают отрицательных значений, то ряд расходится. Таким образом, начало расходимости итераций связано с выполнением равенства $\lambda^p = 0$. Сравнивая это выражение с условием потери устойчивости процесса деформирования стержневой системы (3), в котором в рассматриваемом случае имеется только одно слагаемое $\lambda_1^p = \lambda^p$, находим, что начало расходимости рассмотренного итерационного процесса определения положений равновесия системы совпадает с моментом потери устойчивости процесса растяжения. Другими словами, если при возмущении некоторого положения равновесия параметр λ^p достигает нулевого значения, то данное положение равновесия неустойчиво.

Р и с. 6. Схема итерационных процессов:
1 – мягкое нагружение, 2 – жесткое нагружение

Жесткое нагружение. Для жесткого нагружения системы при сделанных выше предположениях уравнение равновесия (6) имеет вид

$$\lambda(x - x^p) - c(u - x) = 0. \quad (12)$$

Задачу (12) по определению положений равновесия системы снова разобьем на две задачи. Основная задача задана уравнением

$$\lambda\gamma - c(u - \gamma) = 0, \quad (13)$$

а корректирующая – уравнением

$$\lambda(\beta - x^p) + c\beta = 0. \quad (14)$$

Уравнение (13) определяет положение равновесия упругой системы при заданном значении u , а уравнение (14) определяет положение равновесия также в упругой системе, в которой имеет место остаточное удлинение стержня 1, т.е. x^p , и зашкреплен правый конец стержня 3 ($u = 0$).

Непосредственной подстановкой проверяется, что при фиксированных u и x^p решением уравнения (12) является сумма решений уравнений (13) и (14) ($x = \gamma + \beta$).

Пусть при некотором $u = u_0$ система находится в положении равновесия и ее состояние характеризуется параметрами $x = x_0$, $x^p = x_0^p$, $\lambda^p = \lambda_0^p$. Произведем догрузку на малую величину Δu . Решение исходной задачи (12) для $u = u_0 + \Delta u$ будем искать, используя следующую итерационную процедуру. Сначала решим основную задачу для перемещения Δu и выпишем начальное приближение. Получаем $\gamma_1 = c\Delta u / (\lambda + c)$, $x_1 = x_0 + \gamma_1$. Далее находим приближенное решение уравнения (8) на отрезке $[x_0, x_1]$, т.е. $dx_1^p = (1 - \lambda_0/\lambda)\gamma_1$. Теперь решение корректирующей задачи имеет вид $\beta_1 = \lambda dx_1^p / (\lambda + c)$ и второе приближение равно $x_2 = x_1 + \beta_1$. В завершении этапа находим $\lambda_1^p = \lambda^p(x_1)$.

Снова решаем уравнение (8), но на отрезке $[x_1, x_2]$ при $\lambda^p = \lambda_1^p$ и $d\gamma = \beta_1$. Получаем $dx_2^p = (1 - \lambda_1^p/\lambda)\beta_1$. Далее находим $\beta_2 = \lambda dx_2^p / (\lambda + c)$ (решение уравнения (14)) и следующее приближение $x_3 = x_2 + \beta_2$ и вычисляем значение $\lambda_2^p = \lambda^p(x_2)$. И т.д. Схематически данный итерационный процесс изображен на рис. 6 (кривая 2).

В результате применения итерационной процедуры получаем числовой ряд

$$x = x_0 + c \Delta u / (\lambda + c) + \sum_{n=1}^{\infty} Q^n c \Delta u / (\lambda + c), \quad (15)$$

где $Q^n = [\lambda / (\lambda + c)]^n (1 - \lambda_{n-1}^p / \lambda) \dots (1 - \lambda_0^p / \lambda)$. Этот ряд сходится при $\lambda^p > -c$ и расходится при $\lambda^p < -c$. Равенство $\lambda^p = -c$ определяет границы сходимости и расходимости процесса. Если уравнение $\lambda^p(x) = -c$ имеет один корень или вообще не имеет корней, то, очевидно, члены ряда (15) монотонно убывают и итерации плавно приближаются к параметрам нового положения равновесия системы. Когда означенное уравнение имеет два (для определенности) корня x' и x'' ($x' < x''$), то процесс начинает расходиться при $x_n = x'$ и снова начнет сходиться при $x_m = x''$ ($m > n$), определяя, в конце концов, новое положение равновесия.

Заметим, наконец, что полученное условие начала расходимости итерационной процедуры совпадает с условием потери устойчивости процесса деформирования (7), в котором $\lambda_2^p = 0$, $\lambda_1^p = \lambda^p$. Таким образом, расходимость итерационной процедуры отражает скачкообразный переход системы в новое устойчивое положение равновесия. Кроме того, рассматриваемое положение равновесия системы является неустойчивым.

Равновесие предварительного напряженного состояния. Рассмотрим систему стержней, изображенную на рис. 6, при отсутствии внешних усилий. Считаем, что в начальном состоянии (до сборки) стержень 2 короче стержня 1 на величину ε . После сборки в единую систему стержень 2 будет растянут, а стержень 1 сжат. Обозначая ε_2 через w (w – удлинение стержня 2 от исходного ненапряженного состояния) и, используя определяющее соотношение для упруго-пластического стержня, запишем уравнение равновесия (4) в виде

$$\lambda_2(w - w^p) - \lambda_1(\varepsilon - w) = 0, \quad (16)$$

где w^p – пластическая (неупругая) составляющая удлинения w . Аналогично изложенному выше разбиваем исходную задачу вычисления параметров равновесия, отвечающих заданной величине ε , на две задачи. Основная задача заключается в определении параметров равновесия в упругой системе, в которой изначально стержень 2 короче стержня 1. Уравнение равновесия задано выражением

$$\lambda_2 z - \lambda_1(\varepsilon - z) = 0. \quad (17)$$

Здесь z – удлинение стержня 2 из исходного ненагруженного состояния. Корректирующая задача – это задача определения параметров равновесия также в упругой системе, в которой стержень 2 изначально длиннее стержня 1 на величину w^p . В этом случае уравнение равновесия имеет вид

$$\lambda_1 y - \lambda_2(w^p - y) = 0. \quad (18)$$

Здесь y – удлинение стержня 1. Непосредственной подстановкой проверяется, что сумма решений задач (17) и (18) $w = z + y$ при фиксированных значениях ε и w^p является решением задачи (16).

Пусть при некотором $\varepsilon = \varepsilon_0$ система находится в положении равновесия с параметрами $w_0, w_0^p, \lambda_{20}^p$. Возмущаем это положение, увеличивая параметр ε_0 на малую величину $\Delta\varepsilon$, и найдем новое положение равновесия для $\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$. Применяем рассмотренную ранее итерационную процедуру. Сначала находим решение основной задачи, заменяя ε на $\Delta\varepsilon$. Имеем $z_1 = \lambda_1 \Delta\varepsilon / (\lambda_1 + \lambda_2)$. Тогда начальное приближение $w_1 = w_0 + z_1$. Далее $dw_1^p = (1 - \lambda_{20}^p / \lambda_2) z_1$ и решение корректирующей задачи равно $y_1 = \lambda_2 dw_1^p / (\lambda_1 + \lambda_2)$. Рассчитываем значение $\lambda_2^p = \lambda_2^p(w_1)$ и второе приближение $w_2 = w_1 + y_1$. Затем процесс корректировки продолжаем. В результате получаем ряд

$$w = w_0 + \lambda_1 \Delta\varepsilon / (\lambda_1 + \lambda_2) + \sum_{n=1}^{\infty} W^n \lambda_1 \Delta\varepsilon / (\lambda_1 + \lambda_2),$$

где $W^n = [\lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)]^n (1 - \lambda_{2(n-1)}^p / \lambda_2) \dots (1 - \lambda_{20}^p / \lambda_2)$. Этот ряд сходится при $\lambda_2^p > -\lambda_1$ и расходится при $\lambda_2^p < -\lambda_1$. Равенство $\lambda_2^p = -\lambda_1$ определяет границы сходимости и расходимости процесса. Так же как и в предыдущем пункте расходимость процесса возможна при наличии не

менее двух корней уравнения $\lambda_2^p(w) = -\lambda_1$ (для определенности w' и w'' , $w' < w''$). Процесс начинает расходиться при $w_n = w'$ и снова начнет сходиться при $w_m = w''$ ($m < n$). Так как отрицательные значения λ_2^p стремятся к нулю (конец падающей ветви полной диаграммы растяжения), то последовательные приближения, в конце концов, определяют новое положение равновесия.

Сравнивая полученный результат с анализом устойчивости, опирающимся на равенство (5), находим, что начало расходимости итерационного процесса связано с потерей устойчивости равновесия системы и со скачкообразным переходом в новое положение равновесия.

Таким образом, если при возмущении исходного положения равновесия, отвечающего значению $\varepsilon = \varepsilon_0$, касательный модуль λ_2^p достигает значения $(-\lambda_1)$ и затем некоторое время остается меньше этой величины, то рассматриваемое исходное положение равновесия системы неустойчиво.

3.3. R-критерий устойчивости положения равновесия. Как и в предыдущем параграфе для случаев мягкого и жесткого нагружений будем рассматривать систему только с одним упругопластическим стержнем. Усилие сопротивления стержня растяжению $q(x)$ является

потенциальной силой с потенциалом $V = -\int_0^x q(z)dz$, т.е. $q(x) = -dV/dx$. Здесь удлинение

стержня v равно перемещению поршня x . Кроме того, потенциалом будет также и выражение $V^e = -\lambda(x^e)^2/2$, т.е. $q = -dV^e/dx^e = \lambda x^e = \lambda(x - x^p)$ ($x = x^e + x^p$, см. пункт 3.1). Здесь x^e - упругая составляющая удлинения, x^p - пластическая составляющая, приращение которой подчиняется закону (8), V^e - потенциальная энергия упругих деформаций, взятая со знаком минус. Тогда, опираясь на теорему Лагранжа-Дирихле [25] о равновесии консервативных систем, сформулируем следующее определение.

Определение 3.1. *Стержень находится в физически устойчивом состоянии, если при бесконечно малом его удлинении потенциальная энергия упругих деформаций увеличивается. Если эта энергия уменьшается, то физическое состояние стержня неустойчиво, и оно может быть реализовано только тогда, когда стержень находится в составе устойчивой механической системы.*

Таким образом, потенциальная энергия $(-V^e)$ в исходном (невозмущенном) физически устойчивом состоянии стержня имеет локальный минимум, а в физически неустойчивом состоянии - локальный максимум.

Возмутим теперь некоторое исходное состояние стержня, задав бесконечно малое удлинение dx , и рассмотрим функционал

$$\rho = \lambda dx dx - \lambda dx^p dx^p, \quad (19)$$

где dx и dx^p связаны соотношением (8). Из рассуждений, приведенных выше, следует, что $(-dV^e) = q dx^e = \lambda(x - x^p)(dx - dx^p)$. Так как $x > x^p$, то $(-dV^e) > 0$, если $dx > dx^p$, и $(-dV^e) < 0$, если $dx < dx^p$. Отсюда $\rho > 0$, когда $(-dV^e) < 0$ (исходное состояние физически устойчиво), и $\rho < 0$, когда $(-dV^e) < 0$ (исходное состояние физически неустойчиво). Значение $\rho = 0$ определяет состояние текучести, при котором приращение удлинения dx равняется приращению пластической составляющей dx^p . Далее, используя очевидные равенства $dx = dx^e + dx^p$, $dq = \lambda dx^e$, получаем

$$\rho = \lambda(dx^e + dx^p)dx = \lambda(dx - dx^e)dx^p = dq dx + dq dx^p. \quad (20)$$

С другой стороны, подставляя выражение для dx^p из формулы (8) в равенство (19), имеем

$$\rho = \lambda dx dx - \lambda(1 - \lambda^p/\lambda)^2 dx dx = \lambda^{-1}(2\lambda - \lambda^p) \lambda^p dx dx = \lambda^{-1}(2\lambda - \lambda^p) dq dx. \quad (21)$$

Здесь $dq = \lambda^p dx$, $\lambda > \lambda^p$. Выражая из равенства (21) произведение $dq dx$ через ρ и, подставляя его в формулу (20), находим, что

$$dq dx^p = (\lambda - \lambda^p)(2\lambda - \lambda^p)^{-1} \rho.$$

Таким образом, знаки функционала ρ и выражения $dqdx^p$ совпадают. Вспоминая определение устойчивого материала Друкера [26] ($dqdx^p > 0$ – материал устойчив, $dqdx^p < 0$ – неустойчив) и суммируя все предыдущие рассуждения, сформулируем следующее утверждение.

Определение 3.2. При растяжении упругопластический стержень находится в физически устойчивом состоянии, если при малом приращении удлинения функционал $\rho > 0$, в противном случае состояние стержня физически неустойчиво.

Физический смысл данного определения заключается в следующем. Так как пластическая деформация связана с диссипацией энергии, то условие $\rho > 0$ означает, что диссипирует только часть энергии, подведенной к стержню в результате догружения. Неравенство $\rho < 0$ выполняется тогда, когда диссипирует не только вся подведенная энергия, но и часть упругой энергии, накопленной в стержне до его догружения.

Отметим еще то обстоятельство, что при жестком нагружении находящегося в физически неустойчивом состоянии стержня посредством задания удлинения dx положение равновесия может сохранять устойчивость. Воспользуемся определением устойчивости по Ляпунову [27].

Определение 3.3. Равновесие упругопластического стержня при растяжении является устойчивым, если для любого $\delta > 0$ можно указать $\alpha > 0$ такое, что из неравенств $\lambda dx dx^p < \delta$ следует неравенство $\lambda dx^p dx^p < \alpha$, где dx и dx^p связаны соотношением типа (18).

Отсюда потеря устойчивости равновесия происходит тогда, когда $\lim dx^p dx^p / dx dx = \lim [\lambda / (\lambda - \lambda^p)] = 0$ при $dx \rightarrow 0$, т.е. величина dx является бесконечно малой высшего порядка, чем величина dx^p . Это условие выполняется, если в исходном (невозмущенном) состоянии $\lambda^p = -\infty$. Тогда функционал ρ представляет неопределенность типа $0 \cdot (-\infty)$. Раскрытие неопределенности приводит к выражению $\rho = -\infty$. В данном случае имеет место так называемая неустраняемая физическая неустойчивость.

Мягкое нагружение системы. Рассмотрим теперь некоторое положение равновесия системы и возмутим его, задав бесконечно малое приращение $dp > 0$ внешнему растягивающему усилию. Составим R -сумму для возмущенного положения системы, просуммировав функционалы ρ для каждого стержня. Получаем

$$R_p = \lambda dx dx - \lambda dx^p dx^p + c(du - dx)(du - dx). \quad (22)$$

Для определения приращений параметров состояния dx и du через приращение параметра управления dp воспользуемся уравнениями равновесия для возмущенного положения равновесия

$$\lambda(dx - dx^p) - c(du - dx) = 0, \quad c(du - dx) - dp = 0, \quad (23)$$

получающиеся из уравнений (9). Учитывая выражение (8) для dx^p , находим

$$dx = c du / (\lambda^p + c) = dp / \lambda^p, \quad du = (\lambda^p + c) dp / \lambda^p c. \quad (24)$$

Подставляя выражения (24) и равенство $dx^p = (1 - \lambda^p / \lambda) dx$ в выражение (22), имеем

$$R_p = B dp dp / (\lambda^p)^2, \quad B = \lambda^p [c(2\lambda - \lambda^p) + \lambda \lambda^p] / c \lambda.$$

Здесь и ниже величина λ^p имеет в выражении для R -суммы значение, равное величине касательного модуля в исходном (невозмущенном) положении равновесия. Если рассматривать всевозможные положения равновесия, то можно построить график функции $R_p(\lambda^p)$ (рис. 7). Видно, что в точке $\lambda^p = 0$ функция R_p имеет разрыв второго рода.

Р и с. 7. Функция $R_p(\lambda^p)$

Далее, если в исходном положении равновесия $\lambda^p > 0$, то из формул (24) следует, что при возмущении системы параметры du и dx определяются однозначно, причем $du > dx > 0$. Следовательно, равновесие сохраняется и, кроме того, энергия в системе возрастает. Когда $\lambda^p < 0$, то для сохранения равновесия, по крайней мере, приращение параметра состояния dx должно быть меньше нуля, а это возможно только при разгрузке. Если $\lambda^p = 0$, то значения dx и du не

определены (имеют неопределенность типа $\frac{0}{0}$), или $du = dx = \infty$, когда параметр dp есть малая, но конечная величина. В этом случае равновесие также не сохраняется.

Таким образом, если рассчитанная для возмущенного состояния системы R -сумма больше нуля ($\lambda^p > 0, B > 0$), то исходное (невозмущенное) положение равновесия устойчиво, когда $R_p < 0$ ($\lambda^p < 0, B/(\lambda^p)^2 < 0$) или $R_p = \pm\infty$ ($\lambda^p = 0$), то неустойчиво и система обязана скачком перейти в устойчивое положение равновесия (если оно существует), и естественно должен произойти сброс энергии.

Отсюда при плавном нагружении системы процесс деформирования потеряет устойчивость тогда, когда $R_p = -\infty$ (параметр λ^p незначительно переходит в отрицательную область своих значений). Сравнивая данный критерий с условием потери устойчивости (3) при $\lambda_2^p = 0$, $\lambda_1^p = \lambda^p$, устанавливаем их тождественность.

Жесткое нагружение. Возмутим исходное положение равновесия системы, задав бесконечно малое приращение перемещения $du > 0$ правому концу упругого стержня 3. R -сумма для возмущенного положения системы также определяется выражением (22). Используя уравнение равновесия для возмущенного состояния (первое равенство в формулах (23)), находим связь между приращением параметра состояния dx и параметра управления du (первое равенство в формулах (24)). Подставляя данную величину dx и выражение для dx^p в формулу (22), находим

$$R_u = Bc^2 du du / (\lambda^p + c)^2. \quad (25)$$

Качественный вид графика функции $R_u(\lambda^p)$ изображен на рис. 8. Видно, что в точке $\lambda^p = -c$ функция R_u имеет разрыв второго рода.

Если в исходном положении равновесия $\lambda^p > 0$, то из первого равенства в формулах (3.17) следует, что $du > dx > 0$, т.е. равновесие при догрузке сохраняется, и энергия в системе возрастает. Когда $-c < \lambda^p \leq 0$, равновесие также сохраняется (уравнение равновесия определяет $dx \geq du > 0$), однако энергия уменьшается (упругий стержень 3 разгружается и упругая энергия упругопластического стержня на падающей ветви, где $\lambda^p < 0$, также уменьшается). При $\lambda^p < -c$ получаем $dx < 0$, что возможно только при разгрузке. Следовательно, равновесие не сохраняется. Наконец, когда $\lambda^p = -c$, то величина dx либо не определена (имеет неопределенность типа $0/0$), либо для малого, но конечного, значения du она равняется бесконечности. Здесь возможны три варианта. Пусть для параметров исходного состояния $d\lambda^p/dx < 0$. Функция $\lambda^p(x)$ убывает, и при малом увеличении dx параметр λ^p становится меньше, чем $(-c)$. Тогда равновесие невозможно. Если $d\lambda^p/dx > 0$, то функция $\lambda^p(x)$ возрастает, и равновесие сохраняется. Значение $d\lambda^p/dx = 0$ определяет минимум функции $\lambda^p(x)$, т.е. для $dx > 0$ параметр λ^p возрастает, и равновесие сохраняется.

Таким образом, если рассчитанная для возмущенного состояния R -сумма больше нуля ($R_u > 0$), то исходное (невозмущенное) положение равновесия устойчиво. Догрузка приводит к возрастанию энергии. Когда $R_u < 0$ для $-c < \lambda^p \leq 0$, то исходное положение равновесия также устойчиво. Однако догрузка приводит к падению уровня энергии. При $R_u < 0$ для $\lambda^p < -c$ исходное состояние неустойчиво. И, наконец, при $R_u = -\infty$ ($\lambda^p = -c$) исходное положение равновесия неустойчиво для убывающего параметра λ^p и устойчиво для возрастающего параметра λ^p .

Р и с.8. Функция $R_u(\lambda^p)$

Отсюда при плавном нагружении системы процесс деформирования может потерять устойчивость тогда и только тогда, когда $R_u = -\infty$. Сравнивая данный результат с условием потепри устойчивости (7) при $\lambda_2^p = 0$, $\lambda_1^p = \lambda$, устанавливаем их тождественность.

Система с начальными напряжениями. Вернемся к системе с двумя упругопластическими стержнями (рис.1). Считаем, что система свободна от внешних усилий и стержень 2 короче стержня 1 на величину ε . Возмутим исходное положение равновесия, увеличив параметр ε на бесконечно малую величину $d\varepsilon > 0$, и составим R -сумму системы. Имеем

$$R_\varepsilon = \lambda_2 dw dw - \lambda_2 dw^p dw^p + \lambda_1 dv dv. \quad (26)$$

Здесь dw – приращение удлинения стержня 2, $dw^p = (1 - \lambda_2^p / \lambda_2) dw$ – неупругая составляющая этого приращения, $dv = d\varepsilon - dw$. Используя уравнение равновесия для возмущенного состояния системы

$$\lambda_2 (dw - dw^p) - \lambda_1 (d\varepsilon - dw) = 0, \quad (27)$$

получающееся из уравнения (16), и учитывая выражение для dw^p , находим

$$dw = \lambda_1 d\varepsilon / (\lambda_2^p + \lambda_1).$$

Подставляя теперь значения для dw и dw^p в формулу (26), получаем

$$R_\varepsilon = \lambda_1 \lambda_2^p \left[\lambda_1 (2\lambda_2 - \lambda_2^p) + \lambda_2 \lambda_2^p \right] d\varepsilon d\varepsilon / \left[\lambda_2 (\lambda_2^p + \lambda_1)^2 \right].$$

Сравнивая данное выражение с формулой (25), замечаем, что $R_\varepsilon = R_u$ при замене $\lambda = \lambda_2$, $\lambda^p = \lambda_2^p$, $c = \lambda_1$. Отсюда при соответствующих переобозначениях качественный вид графика $R_\varepsilon(\lambda_2^p)$ совпадает с графиком на рис. 8. Анализ устойчивости аналогичен анализу для случая жесткого нагружения. А именно, условие $R_\varepsilon > 0$ ($\lambda_2^p > 0$) определяет устойчивость невозмущенного положения равновесия (энергия возрастает), $R_\varepsilon < 0$ ($-\lambda_1 < \lambda_2^p \leq 0$) – исходное положение равновесия устойчиво (энергия убывает), $R_\varepsilon < 0$ ($\lambda_2^p < -\lambda_1$) – исходное состояние неустойчиво, $R_\varepsilon = -\infty$ ($\lambda_2^p = -\lambda_1$) – для $d\lambda_2^p/dx \geq 0$ исходное состояние устойчиво, для $d\lambda_2^p/dx < 0$ – неустойчиво. При плавном изменении параметра ε потеря устойчивости системы может произойти тогда и только тогда, когда $R = -\infty$.

3.4. S_t -критерий. При формулировке S_t -критерия устойчивости будем рассматривать те же стержневые системы, что и пунктах 3.2 и 3.3.

Мягкое нагружение. Сформулируем определение устойчивости положения равновесия системы в смысле Ляпунова [27].

Определение 3.4. *Положение равновесия системы при мягком нагружении является устойчивым, если для любого $\delta > 0$ можно указать такие $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$, что при увеличении растягивающего усилия на $dp > 0$ из неравенства $dp < \delta$ следуют неравенства $dx < \alpha_1, dx^p < \alpha_2$, где $dx > 0$ и $dx^p > 0$ связаны отношением (8) и с dp условиями равновесия.*

Рассмотрим некоторое положение равновесия и возмутим его, увеличив растягивающее усилие на $dp > 0$. Запишем решение уравнений равновесия для возмущенного состояния (23) в виде суммы решений основной и корректирующей задач также для возмущенного равновесия, которые получаются, если выражения (10) и (11) записать в приращениях. Имеем

$$dx = d\gamma + d\beta = dp/\lambda + dx^p.$$

Заменим второе слагаемое выражением, полученным из закона (8), а именно,

$$dx^p = (1 - \lambda^p/\lambda) dx. \quad (28)$$

Тогда после простых преобразований получаем

$$S_t dx = dp, \quad S_t = \lambda^p. \quad (29)$$

Здесь λ^p имеет постоянное значение, равное величине касательного модуля упругопластического стержня в исходном (невозмущенном) положении равновесия системы.

Если оператор S_t^{-1} , обратный оператору S_t , неограничен, то нарушается непрерывная зависимость одного из параметров состояния системы (x) от параметра управления (p), т.е. при ограниченном произвольно малом значении dp приращение dx не ограничено. Согласно опре-

делению 3.4 в этом случае положение равновесия неустойчиво. Очевидно, что оператор S_t^{-1} неограничен, когда $\lambda^p = 0$. Отсюда положение равновесия системы, в котором значение $\lambda^p = 0$, неустойчиво.

Когда оператор S_t имеет ограниченный обратный оператор, то решение уравнения (29) существует и корректно по Адамару. Согласно определению 3.4 для $\lambda^p > 0$ исходное положение равновесия устойчиво. При $\lambda^p < 0$ уравнение (28) определяет отрицательное значение величины dx . Равновесие возможно лишь при разгрузке ($dp > 0$). Для догрузки равновесие невозможно, и исходное положение равновесия системы неустойчиво.

Так как свойства оператора S_t позволяют характеризовать устойчивость положений равновесия системы, то будем называть его оператором устойчивости.

Отметим, что данные выводы совпадают с результатами, приведенными выше (пункты 3.2; 3.3).

Жесткое нагружение. В этом разделе будем использовать следующее определение устойчивости.

Определение 3.5. Положение равновесия системы при жестком нагружении является устойчивым, если для любого $\delta > 0$ можно указать такие $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$, что при увеличении параметра управления на $du > 0$ из неравенства $du < \delta$ следуют неравенства $dx < \alpha_1$, $dx^p < \alpha_2$, где $dx > 0$ и $dx^p > 0$ связаны отношением (8) и с du условиями равновесия.

Возмутим некоторое положение равновесия системы, увеличив перемещение правого конца упругого стержня 3 на малую величину $du > 0$. Запишем решение уравнения равновесия для возмущенного состояния (первое уравнение из формул (23)) в виде суммы решений основной и корректирующей задач также для возмущенного равновесия, которые получаются, если равенства (13) и (14) записать в приращениях. Имеем

$$dx = d\gamma + d\beta = c du / (\lambda + c) + \lambda dx^p / (\lambda + c).$$

Подставляя сюда выражение (28) и преобразуя, получаем

$$S_t d c du, \quad S_t = \lambda^p + c. \quad (30)$$

Проводя рассуждения, аналогичные изложенным в предыдущем разделе, находим, что при $\lambda^p > -c$ исходное положение равновесия устойчиво, при $\lambda^p < -c$ – неустойчиво. Условие $\lambda^p = -c$, при котором обратный оператор S_t^{-1} неограничен, является необходимым для прогнозирования неустойчивости.

Рассмотрим подробнее последний случай. Возьмем вместо оператора S_t нелинейный оператор $S_x = \lambda^p(x) + c$, который в точке x_0 равен нулю ($\lambda^p(x_0) + c = 0$). Здесь x_0 – параметр состояния системы в исследуемом положении равновесия. Оператор $S_x(x)$ дифференцируем в точке x_0 (в смысле Фреше [28]), т.е.

$$S_x(x_0 + h) - S_x(x_0) = S'_x(x_0)h + o(|h|).$$

Здесь $h = x - x_0 > 0$, $|h| < \delta$, $o(|h|)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $|h|$. Очевидно, что в данной задаче $S'_x = d\lambda^p/dx$. Если $S'_x(x) \neq 0$, то из теоремы об обратном операторе [28] следует существование обратного оператора S_x^{-1} , непрерывного в окрестности точки $y_0 = S_x(x_0) = \lambda^p(x_0) + c = 0$. Далее заменим оператор S_x в окрестности точки x_0 линейным оператором $S'_x(x_0) = \text{const}$ и подставим его вместо оператора S_t в формулу (30). Фактически эта операция означает замену участка кривой $\lambda^p(x) + c$ отрезком касательной в точке $x = x_0$. Теперь, используя рассуждения, приведенные выше, находим, что исходное положение равновесия неустойчиво, если $d\lambda^p/dx < 0$ в точке x_0 , и устойчиво, если $d\lambda^p/dx > 0$ в точке x_0 . Отметим, что данный анализ отвечает случаю, когда уравнение $\lambda^p(x) + c = 0$ имеет не менее двух корней.

Наконец, исследуем случай, когда $S'_x(x_0) = 0$, т.е. уравнение $\lambda^p(x) + c = 0$ имеет один корень. Для этого найдем $S''_x(x_0)$. Так как $\lambda^p = -c < 0$, то свойства упругопластического стержня

характеризуются падающей ветвью диаграммы растяжения, где $\lambda^p < 0$. Отсюда $d\lambda^p/dx = 0$ определяет в точке x_0 минимум функции $\lambda^p(x)$. Следовательно, на отрезке $x_0 + h$ вторая производная $d^2\lambda^p/dx^2 > 0$. Отсюда, рассуждая аналогично только что рассмотренному случаю, находим, что исходное положение равновесия, в котором $\lambda^p(x_0) + c = 0$, $d\lambda^p/dx = 0$ при $x = x_0$, является устойчивым.

Полученные результаты согласуются с выводами, приведенными в параграфах 3.2; 3.3.

Система с начальными напряжениями. Наконец, рассмотрим систему, изображенную на рис. 1, при отсутствии внешних сил. В системе изначально стержень 2 короче стержня 1 на величину $\varepsilon > 0$.

Определение 3.6. *Положение равновесия после объединения параллельных стержней разной длины в единую систему является устойчивым, если для любого $\delta > 0$ можно указать такие $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$, что при увеличении параметра управления на $d\varepsilon > 0$ из неравенства $d\varepsilon < \delta$ следуют неравенства $dw < \alpha_1$, $dw^p < \alpha_2$, где $dw > 0$, $dw^p > 0$ связаны отношением типа (8) и с $d\varepsilon$ условиями равновесия.*

Возмутим некоторое исходное положение равновесия, увеличив параметр управления на $d\varepsilon > 0$. Запишем решение уравнения равновесия для возмущенного состояния (3.20) в виде суммы решений основной и корректирующей задач также для возмущенного равновесия, которые получаются, если равенства (17) и (18) записать в приращениях. Имеем

$$dw = dz + dy = \lambda_1 d\varepsilon / (\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_2 dw^p / (\lambda_1 + \lambda_2).$$

Подставляя сюда выражение для dw^p , найденное из соотношений типа (18) или (28), где $\lambda^p = \lambda_2^p$, $\lambda = \lambda_2$, получаем

$$S_t dw = \lambda_1 d\varepsilon, \quad S_t = \lambda_2^p + \lambda_1. \quad (31)$$

Сравнивая формулы (30) и (31), замечаем их идентичность (при замене λ_2^p на λ^p и c на λ_1). Отсюда анализ устойчивости аналогичен случаю жесткого нагружения.

Итак, при $\lambda_2^p > -\lambda_1$ исходное положение равновесия устойчиво, при $\lambda_2^p < -\lambda_1$ — неустойчиво. Условие $\lambda_2^p = -\lambda_1$ является необходимым для прогнозирования неустойчивости. В этом случае, если $d\lambda_2^p/dx > 0$, то исходное положение равновесия устойчиво, если $d\lambda_2^p/dx < 0$, то неустойчиво. Когда $d\lambda_2^p/dx = 0$, то $d^2\lambda_2^p/dx^2 > 0$ и определяется устойчивость рассматриваемого положения равновесия.

Отметим, что данный анализ также согласуется с результатами, приведенными в предыдущих параграфах.

Заключение

1. Сформулирована и формализована задача живучести механических систем. На примере простой стержневой системы, работающей на растяжение, проиллюстрирована методика расчета на живучесть, опирающаяся на определение положений равновесия системы и их устойчивости. С этой целью использовался аппарат теории катастроф.

2. Рассмотрены итерационные методы определения параметров равновесных состояний той же стержневой системы. Показано, что начало расхожимости итерационного процесса отвечает потере устойчивости процесса деформирования.

3. Представлены два критерия (R -критерий, S_t -критерий) для определения устойчивости положений равновесия стержневой системы. Установлено, что они дают те же результаты, которые получаются и при использовании аппарата теории катастроф.

Работа выполнена в соответствии с планом интеграционного проекта между ИМАШ УрО РАН и ИТПМ СО РАН.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Никитин Л.В., Рыжак Е.И. Об осуществимости состояний материала, соответствующих «падающему» участку диаграммы // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. №2. С.155-161.
2. Лебедев А.А., Чаусов Н.Г., Марусий О.И. и др. Кинематика разрушения листовой аустенитной стали на заключительной стадии деформирования // Проблемы прочности. 1989. № 3. С.16-21.

3. Степанов С.Л. Экспериментальные исследования разрушения материалов при шейкообразовании и локализации пластических деформаций по жесткопластической схеме Оната и Прагера // Вестн. СамГТУ. Сер.: Физ.-мат. науки. 2004. Вып. 26. С.127-130.
4. Миронов В.И., Микушин В.И., Владимиров А.П. и др. Установка для определения механических свойств материала на стадии разупрочнения // Завод. лаборатория. 2001. Т.67. № 3. С.48-51.
5. Радченко В.П., Небогина Е.В., Басов М.В. Структурная модель закритического упругопластического деформирования материалов в условиях одноосного растяжения // Вестн. СамГТУ. Сер.: Физ.-мат.науки. 2000. Вып. 9. С.55-65.
6. Стружанов В.В., Миронов В.И. Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций. Екатеринбург: УрО РАН, 1995. 190с.
7. Стружанов В.В. О разрушении диска с ослабленной центральной зоной // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С.135-141.
8. Стружанов В.В. Об одном подходе к изучению механизма зарождения и распространения трещин // ПМТФ. 1986. № 6. С.118-123.
9. Стружанов В.В. Об одном подходе к исследованию разрушения механических систем // Пробл. прочности. 1987. № 6. С.57-63.
10. Стружанов В.В. О применении полных диаграмм деформирования в расчетах на прочность // Пробл. прочности. 1988. № 5. С.122-123.
11. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420с.
12. Парс А. Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 636с.
13. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 608с.
14. Стружанов В.В. Об одном критерии устойчивости в атомарных моделях // Математическое моделирование систем и процессов. Сб. научн. тр. Пермь: ПГТУ, 1997. № 5. С.121-126.
15. Стружанов В.В., Жижерин С.В. Об одной модели деформирования повреждающегося материала при одноосном нагружении // Математическое моделирование систем и процессов. Сб.научн.тр. Пермь: ПГТУ, 1998. № 6. С.119-124.
16. Стружанов В.В., Башуров Вяч.В. Критерии потери устойчивости предварительно напряженной стержневой системы // Современные проблемы математического моделирования. Труды VIII Всероссийской школы-семинара. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского госуниверситета. 1999. С.208-214.
17. Стружанов В.В., Жижерин С.В. Модель повреждающегося материала и итерационные методы расчета напряженного состояния при кручении // Вычислительные технологии. 2000. Т.5, № 2. С.92-104.
18. Жижерин С.В., Стружанов В.В. Об устойчивости положений равновесия одной стержневой системы // Математическое моделирование систем и процессов. Пермь: ПГТУ, 2000. № 8. С.21-29.
19. Стружанов В.В., Жижерин С.В. Об устойчивости процесса растяжения с кручением одной стержневой системы последовательно соединенных стержней // Изв. Урал. ун-та. 2000. № 8. (Математика и механика. Вып.3) С.176-184.
20. Стружанов В.В., Жижерин С.В. Об устойчивости равновесия закручиваемого цилиндрического стержня из пластического материала // ПМТФ. 2001. Т.42, № 5. С.168-175.
21. Жижерин С.В., Стружанов В.В., Миронов В.И. Итерационные методы расчета напряжений при чистом изгибе балки из повреждающегося материала // Вычислительные технологии. 2001. Т.6, № 5. С.24-33.
22. Стружанов В.В., Башуров Вяч. В. О сходимости методов расчета и устойчивости самоуравновешенных напряжений при усадке шаровых включений из повреждающегося материала // ПМТФ. 2003. Т.44, № 4. С.116-125.
23. Жижерин С.В., Стружанов В.В. Итерационные процедуры и устойчивость в задаче о равномерном деформировании шара с центральной зоной из повреждающегося материала // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 2. С.114-125.
24. Башуров Вяч. В., Стружанов В.В. Об одном критерии устойчивости усадочных напряжений в одномерных композитных системах // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды Всероссийской научн. конф. Часть I. Секция: Математические модели механики, прочность и надежность элементов конструкций. Самара: СамГТУ, 2004. С.31-36.
25. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.: Физматгиз. 1960. 296с.
26. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712с.
27. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 224с.
28. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520с.

Поступила 10.08.2004 г.