Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Немировский, А. П. Янковский, Упругопластический динамический изгиб слоисто-волоконистых пластин при действии нагрузок взрывного типа, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 30, 22–40

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu305>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 02:54:47

**УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ ИЗГИБ
СЛОИСТО-ВОЛОКНИСТЫХ ПЛАСТИН ПРИ ДЕЙСТВИИ
НАГРУЗОК ВЗРЫВНОГО ТИПА**

Сформулирована задача упругопластического динамического изгиба слоисто-волоконистых пластин. Разработан оригинальный метод численного интегрирования поставленной задачи, основанный на обобщении методов Рунге—Кутты. Проведены конкретные расчеты по определению предельного динамического состояния прямоугольных удлиненных изотропных, армированных однослойных и трехслойных пластин постоянной и переменной толщины и исследовано динамическое поведение таких конструкций до появления вторичной пластичности в фазах композиции.

Введение. Конструктивные элементы в виде тонких пластин составляют основу многих защитных ограждений и ответственных элементов судостроительной, машиностроительной и авиационной техники, объектов стройиндустрии. При воздействии взрывных нагрузок высокой интенсивности их повреждаемость определяет возможность дальнейшего функционирования рассматриваемых объектов. Поэтому проблема динамического расчета таких элементов конструкций является одной из важнейших в механике деформируемого твердого тела. Большинство существующих на данный момент решений основано на модели идеального жесткопластического тела. Их обзор и анализ приведены в [1, 2 и др.]. Существенным недостатком таких решений является то, что мерой повреждаемости жесткопластической конструкции служит остаточный прогиб, по которому нельзя судить о степени разрушения материала изделия. Кроме того, в [3] авторами на примере упругопластической динамики стержней показано: приближение реальной диаграммы деформирования материала конструкции к жесткопластической схеме приводит к значительному (иногда в разы) завышению величины остаточного прогиба и уменьшению периода времени, за который достигается максимум модуля прогиба конструкции.

Проблема упругопластического изгиба при оценке повреждаемости до сих пор в основном рассматривалась применительно к однородным изотропным балкам и плитам [4, 5]. Особенностью этих исследований является то, что в них изучалась неупругая динамика конструкций лишь на начальном этапе деформирования — первичная пластичность и последующая разгрузка в течение времени, равном 1—3 периодам собственных упругих колебаний конструкции. Однако в [3] показано, что вторичная и третичная пластичность, а также начальное разрушение могут появиться и после нескольких десятков периодов собственных упругих колебаний. Искусственное же занижение характерного периода времени, в течение которого изучается процесс колебаний, может приводить к неоправданному завышению амплитуд и интенсивностей взрывных нагрузок, выдерживаемых конструкцией [3].

В последние десятилетия в инженерной практике в качестве эффективных защитных элементов используются слоистые плиты, армированные высокопрочными и высокомодульными волокнами. Исследование их неупругого деформирования находится пока в зачаточном состоянии [6]. Целью настоящей работы является разработка общего подхода к анализу динамического упругопластического деформирования слоисто-волоконистых пластин при произвольных структурах армирования и метода интегрирования соответствующей начально-краевой задачи.

Постановка задачи упругопластической динамики слоисто-волоконистых пластин. Будем исследовать упругопластический поперечный изгиб кирхгофовой пластины переменной толщины $2H$, состоящей из нечетного числа армированных слоев, расположенных симметрично относительно среднего слоя: именно, к среднему слою с обеих сторон примыкают два слоя одинаковой толщины с одинаковыми структурами армирования и фазовыми материалами; к внешним поверхностям этих слоев примыкают еще два одинаковых слоя и т.д. Предполагается, что по толщине каждый слой имеет регулярную и квазиоднородную структуру, скольжение слоев друг по другу невозможно, так как слои склеены или спаяны друг с другом по поверхностям соприкосновения и при деформации работают совместно. Тепловое воздействие не учитывается, прогибы считаются малыми.

Для описания нелинейно-упругого или неупругого поведения фазовых материалов используются соотношения теории упругопластических деформаций [7, 8]. Обоснованность использования этих соотношений можно подкрепить результатами исследований, проведенных в [3], где на примерах неупругой динамики стержней показано, что при нагрузках взрывного типа, не

вызывающих появления вторичной или третичной пластичности, конструкция колеблется по формам, близким к первой собственной форме упругих колебаний. Возникающие при этом пластические деформации малы по величине и сопоставимы с предельными упругими деформациями. Ограничиваясь исследованием динамики пластин лишь до появления вторичной или третичной пластичности, можно предположить, что при взрывных нагрузках пластины, как и стержни, будут колебаться практически неотличимо от первой собственной формы упругих колебаний, т.е. путь деформирования точек конструкции будет мало отличаться от простого и пластические деформации будут сопоставимы по модулю с предельными упругими деформациями фаз композиции, в силу чего можно обоснованно использовать деформационную теорию пластичности [9]. Кроме того, в [3] продемонстрировано, что возможно возникновение начального разрушения колеблющейся конструкции еще до появления третичной пластичности, поэтому деформационная теория может оказаться пригодной и для изучения предельного динамического состояния конструкций из некоторых типов композитных материалов, особенно для металлических пластин, армированных упруго-хрупкими волокнами (композиции типа Al-B, Al-C, Mg-B, Mg-C, Al-W, Mg-W, Ni-W, Ni-C, Cu-C и др.) и в которых пластические деформации в связующей матрице, возникающие к моменту появления начального разрушения таких волокон, будут по модулю, как правило, всего в 1,5–4 раза больше предельной упругой деформации связующего (т.е. сопоставимы с последней), так как предельная деформация волокон в таких композициях всего 2,5–5 раз больше предельной упругой деформации связующего [10].

Пластина рассматривается в прямоугольной декартовой системе координат x_1x_2z ; плоскость x_1x_2 совмещена со срединной плоскостью центрального слоя (она же срединная плоскость пластины) до изгиба, а ось z перпендикулярна этой плоскости. Центральный слой будем называть «нулевым»; выше него ($z > 0$) последовательно располагаются слои с номерами $m = 1, 2, \dots, M$, ниже ($z < 0$) — слои с номерами $m = M + 1, M + 2, \dots, 2M$ (всего $2M + 1$ слоев, причем M -й слой является верхним, а $2M$ -ый слой — нижним). Каждый m -ый слой армирован $N^{(m)}$ семействами волокон (возможно, различной физической природы), которые уложены в плоскостях, параллельных плоскости x_1x_2 (плоское армирование), или на поверхностях, состоящих между которыми по оси z изменяются пропорционально изменению толщины слоя (пространственное армирование).

Обозначим через $H_m(x_1, x_2) \geq 0$ аппликату границы между m -ым и $(m + 1)$ -ым слоями ($0 \leq m \leq M$, $H_M = H$), тогда $z = -H_m \leq 0$ будет задавать границу между $(m + M)$ -ым и $(m + M + 1)$ -ым слоями ($1 \leq m \leq M$), а $z = -H_0 \leq 0$ — границу между центральным слоем и соседним нижним $(M + 1)$ -ым слоем, при этом $2H_0 \geq 0$ — толщина среднего слоя, $H_m - H_{m-1} \geq 0$ — толщина m -го и $(m + M)$ -го слоев ($1 \leq m \leq M$).

Распределенная нагрузка $p(x_1, x_2, t)$ действует в направлении z , поэтому при сделанных выше предположениях о структуре пластины в случае малых прогибов $w(x_1, x_2, t)$ будет реализоваться поперечный изгиб конструкции. Уравнения динамического изгиба такой пластины без учета инерции вращения согласно принципу Даламбера имеют вид

$$F_{1,1} + F_{2,2} + p = R(x_1, x_2)w_{,tt}(x_1, x_2, t), \quad M_{i1,1} + M_{i2,2} = F_i, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

где

$$M_{ij} = \int_{-H}^H \sigma_{ij} z dz = 2 \sum_{m=0}^M \int_{H_{m-1}}^{H_m} \sigma_{ij}^{(m)} z dz \quad (i, j = 1, 2), \quad R = \int_{-H}^H \rho(x_1, x_2, z) dz = 2 \sum_{m=0}^M \int_{H_{m-1}}^{H_m} \rho^{(m)} dz \quad (H_{-1} \equiv 0),$$

$$\rho^{(m)} = a^{(m)} \rho_c^{(m)} + \sum_k \rho_k^{(m)} \omega_k^{(m)}(x_1, x_2), \quad a^{(m)}(x_1, x_2) = 1 - \sum_k \omega_k^{(m)}(x_1, x_2); \quad (2)$$

M_{ij}, F_i — внутренние силовые факторы (моменты и перерезывающие силы соответственно); $\sigma_{ij}^{(m)}$ — осредненные напряжения в композиции m -ного слоя; $\rho_c^{(m)}, \rho_k^{(m)}$ — объемные плотности материалов связующего и арматуры k -того семейства m -ного слоя соответственно; $\omega_k^{(m)}$ — интенсивность (плотность) армирования m -ного слоя волокнами k -того семейства ($1 \leq k \leq N^{(m)}$). Суммирование здесь и далее производится по указанному индексу от 1 до $N^{(m)}$, если не представлены пределы; нижний индекс после запятой означает частное дифференцирование по пространственной переменной x_i или времени t соответственно; верхний индекс в скобках озна-

чает номер армированного слоя (если некоторые соотношения формально выполняются для всех слоев, то для упрощения записи далее будем опускать верхний индекс в скобках).

Осредненные напряжения $\sigma_{ij}^{(m)}$ в (2) выразим через напряжения в фазовых материалах m -ного слоя (используется структурная модель армированного слоя из [11])

$$\sigma_{ij}^{(m)} = a^{(m)} \sigma_{cij}^{(m)} + \sum_k \sigma_k^{(m)} \omega_k^{(m)} l_{ki}^{(m)} l_{kj}^{(m)} \quad (i, j = 1, 2), \quad l_{k1}^{(m)} = \cos \psi_k^{(m)}, \quad l_{k2}^{(m)} = \sin \psi_k^{(m)}, \quad (3)$$

где $\sigma_{cij}^{(m)}$, $\sigma_k^{(m)}$ – напряжения в связующем и арматуре k -того семейства m -ного слоя соответственно; $\psi_k^{(m)}$ – угол армирования m -того слоя волокнами k -того семейства, отсчитываемый от направления x_1 .

Предположим, что диаграммы растяжения и сжатия всех фазовых материалов совпадают и имеют линейное упрочнение. Тогда связь между напряжением σ_k и деформацией ε_k арматуры k -того семейства до начала разгрузки имеет вид [7, 11]

$$\sigma_k = \begin{cases} E_k \varepsilon_k, & |\varepsilon_k| \leq \varepsilon_{tk} = \sigma_{tk} / E_k; \\ \text{sign}(\varepsilon_k) \sigma_{tk} + E_{tk} (\varepsilon_k - \text{sign}(\varepsilon_k) \varepsilon_{tk}), & \varepsilon_{tk} < |\varepsilon_k| \leq \varepsilon_{bk}, \end{cases} \quad (4)$$

где $\sigma_{tk} \equiv \sigma_{tk}^{(m)}$ — предел текучести материала волокон k -того семейства в m -ном слое; $E_k \equiv E_k^{(m)}$, $E_{tk} \equiv E_{tk}^{(m)}$ — модули упругости и упрочнения материала волокон k -того семейства в m -ном слое; $\varepsilon_{tk} \equiv \varepsilon_{tk}^{(m)}$, $\varepsilon_{bk} \equiv \varepsilon_{bk}^{(m)}$ — деформации, соответствующие пределу текучести и временному сопротивлению $\sigma_{bk}^{(m)}$ материала волокон k -того семейства в m -ном слое.

Связь между деформациями пластины ε_{ij} и деформациями ε_k волокон k -того семейства в рамках используемой структурной модели определяется соотношениями [11]

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{11} \cos^2 \psi_k + \varepsilon_{22} \sin^2 \psi_k + \varepsilon_{12} \sin 2\psi_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

где в силу кинематических гипотез Кирхгофа

$$\varepsilon_{ij} = -zw_{,ij}, \quad i, j = 1, 2 \quad (|z| \leq H). \quad (6)$$

Из (4)–(6) следует выражение для напряжений в волокнах k -того семейства в m -ном слое (до начала первичной разгрузки)

$$\sigma_k^{(m)} = \begin{cases} E_k^{(m)} e_k^{(m)} z, & H_{m-1} < z \leq h_k^{(m)}; \\ \text{sign}(e_k^{(m)} z) \sigma_{tk}^{(m)} + E_{tk}^{(m)} [e_k^{(m)} z - \text{sign}(e_k^{(m)} z) \varepsilon_{tk}^{(m)}], & h_k^{(m)} < z \leq H_m, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$h_k^{(m)} = \begin{cases} H_m & \text{при } h_{*k}^{(m)} \geq H_m; \\ h_{*k}^{(m)} & \text{при } H_{m-1} < h_{*k}^{(m)} < H_m; \\ H_{m-1} & \text{при } h_{*k}^{(m)} \leq H_{m-1}, \end{cases} \quad h_{*k}^{(m)} = \frac{\varepsilon_{tk}^{(m)}}{|e_k^{(m)}|} = \frac{\sigma_{tk}^{(m)}}{E_k^{(m)} |e_k^{(m)}|}; \quad (8)$$

$$e_k^{(m)} = -w_{,11} \cos^2 \psi_k^{(m)} - w_{,22} \sin^2 \psi_k^{(m)} - w_{,12} \sin 2\psi_k^{(m)}, \quad 1 \leq k \leq N^{(m)}, \quad 0 \leq m \leq M; \quad (9)$$

$h_k^{(m)} > 0$ аппликата границы между упругой и неупругой зонами в арматуре k -того семейства в m -ном слое (т.е. при $H_{m-1} < |z| \leq h_k^{(m)}$ волокна k -того семейства в m -ном и $(m+M)$ -ном слоях ведут себя упруго, а при $h_k^{(m)} < |z| \leq H_m$ — неупруго); $e_k^{(m)}$ — параметр искривления срединной плоскости пластины в направлении армирования волокном k -того семейства в m -ном слое.

Линейно-упругое поведение материала связующего каждого слоя согласно статической гипотезе Кирхгофа определяется законом Гука

$$\sigma_{cii} = E a_1 (\varepsilon_{ii} + \nu \varepsilon_{jj}), \quad \sigma_{cij} = E a_2 \varepsilon_{ij}, \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

а интенсивность деформаций ε_{0u} при этом равна [7, 8]

$$\varepsilon_{0u} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1-\nu+\nu^2}{3(1-\nu)^2} \left(\varepsilon_{11}^2 - \frac{1-4\nu+\nu^2}{1-\nu+\nu^2} \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2 \right) + \varepsilon_{12}^2}, \quad (11)$$

где

$$a_1 = 1/(1-\nu^2), \quad a_2 = 1/(1+\nu); \quad (12)$$

$E \equiv E^{(m)}$, $\nu \equiv \nu^{(m)}$ — модуль упругости и коэффициент Пуассона связующего m -го слоя.

Нелинейно-упругое и неупругое поведение материала связующего определяется основными соотношениями теории упругопластических деформаций [7, 8], упрощенным допущением о несжимаемости материала (не меняя существа дела, учет сжимаемости при неупругом деформировании связующих материалов слоев изгибаемой пластины связан со значительными техническими трудностями и для армированной конструкции практически не влияет на результаты расчетов [12]). В случае использования диаграммы деформирования с линейным упрочнением связь между напряжениями σ_{cij} и деформациями ε_{ij} за пределами линейной упругости при отсутствии дилатации имеет вид:

$$\sigma_{cii} = \frac{2[\sigma_{\tau} + E_*(\varepsilon_u - \varepsilon_*)]}{3\varepsilon_u} (2\varepsilon_{ii} + \varepsilon_{jj}), \quad \sigma_{cij} = \frac{2[\sigma_{\tau} + E_*(\varepsilon_u - \varepsilon_*)]}{3\varepsilon_u} \varepsilon_{ij}, \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2, \quad (13)$$

где $\sigma_{\tau} \equiv \sigma_{\tau}^{(m)}$, $E_* \equiv E_*^{(m)}$ — предел текучести и модуль упрочнения материала связующего m -го слоя, известные из диаграммы деформирования [7]; ε_* — значение интенсивности деформаций, соответствующее σ_{τ} на диаграмме деформирования; интенсивность деформаций ε_u в предположении о несжимаемости материала связующего каждого слоя имеет выражение [8]

$$\varepsilon_u^2 = 4(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{12}^2)/3. \quad (14)$$

Введем в рассмотрение положительные величины e_{0u} , e_u , составленные из параметров искривления $w_{,ij}$ срединной плоскости пластины таким же образом, как и интенсивности ε_{0u} , ε_u (11), (14) соответственно,

$$e_{0u} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1-\nu+\nu^2}{3(1-\nu)^2} \left(w_{,11}^2 - \frac{1-4\nu+\nu^2}{1-\nu+\nu^2} w_{,11} w_{,22} + w_{,22}^2 \right) + w_{,12}^2}; \quad (15)$$

$$e_u^2 = 4(w_{,11}^2 + w_{,11} w_{,22} + w_{,22}^2 + w_{,12}^2)/3, \quad (16)$$

тогда из соотношений (6), (11), (14)—(16) следует

$$\varepsilon_{0u}^{(m)} = |z| e_{0u}^{(m)}(x_1, x_2, t), \quad \varepsilon_u = |z| e_u(x_1, x_2, t). \quad (17)$$

Если $h^{(m)}$ — аппликата границы между упругой и неупругой зонами в связующем m -ного слоя, то интенсивность напряжений

$$\sigma_u^{(m)} \leq \sigma_{\tau}^{(m)} \quad (H_{m-1} < z \leq h^{(m)}), \quad \sigma_u^{(m)} > \sigma_{\tau}^{(m)} \quad (h^{(m)} < z \leq H_m). \quad (18)$$

В упругой зоне связующего m -го слоя интенсивность напряжений [7, 8]:

$$\sigma_u^{(m)} = 3G_c^{(m)} \varepsilon_{0u}^{(m)} = 3G_c^{(m)} |z| e_{0u}^{(m)}, \quad G_c^{(m)} = 0,5E^{(m)} / (1 + \nu^{(m)}), \quad (19)$$

где $G_c^{(m)}$ — модуль сдвига связующего. На границах $z = h^{(m)}$ между упругой и неупругой зонами в связующем $\sigma_u^{(m)} = \sigma_{\tau}^{(m)}$, поэтому из (19) следует

$$h_*^{(m)} = \sigma_{\tau}^{(m)} / (3G_c^{(m)} e_{0u}^{(m)}), \quad (20)$$

откуда

$$h^{(m)} = \begin{cases} H_m & \text{при } h_*^{(m)} \geq H_m; \\ h_*^{(m)} & \text{при } H_{m-1} < h_*^{(m)} < H_m; \\ H_{m-1} & \text{при } h_*^{(m)} \leq H_{m-1}, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad H_{-1} \equiv 0. \end{cases} \quad (21)$$

Соотношения (15), (20), (21) определяют функцию $h^{(m)}$ через вторые производные от прогиба.

Окончательно напряжения $\sigma_{cij}^{(m)}$ в связующем m -ного слоя с учетом выражений (6), (10), (13), (17) задаются соотношениями

$$\sigma_{cii}^{(m)} = -zE^{(m)} a_1^{(m)} (w_{,ii} + \nu^{(m)} w_{,jj}), \quad \sigma_{cij}^{(m)} = -zE^{(m)} a_2^{(m)} w_{,ij} \quad (H_{m-1} < |z| \leq h^{(m)}); \quad (22)$$

$$\sigma_{cii}^{(m)} = -2 \left[zE_*^{(m)} + \text{sign}(z) (\sigma_{\tau}^{(m)} - E_*^{(m)} \varepsilon_*^{(m)}) / e_u \right] (2w_{,ii} + w_{,jj}) / 3; \quad (23)$$

$$\sigma_{cij}^{(m)} = -2 \left[zE_*^{(m)} + \text{sign}(z) (\sigma_{\tau}^{(m)} - E_*^{(m)} \varepsilon_*^{(m)}) / e_u \right] w_{,ij} / 3 \quad (h^{(m)} < |z| \leq H_m), \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2,$$

где величины $a_1^{(m)}$, $a_2^{(m)}$ определены в (12).

Подставляя в выражения (2) соотношения (3) и учитывая представления (7), (8), (21)—(23), получим выражения для моментов до начала разгрузки через прогиб слоисто-волокнистой пластины:

$$M_{ij}(x_1, x_2, t) = -\frac{2}{3} \left(\sum_{s=1}^2 \sum_{l=1}^2 C_{ijst}(x_1, x_2; w) w_{,sl}(x_1, x_2, t) - D_{ij}(x_1, x_2; w) \right), \quad i, j = 1, 2, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} C_{iiii} &= \sum_{m=0}^M \left\{ \sum_k \omega_k^{(m)} (l_{ki}^{(m)})^4 \left[E_k^{(m)} \left((h_k^{(m)})^3 - H_{m-1}^3 \right) + E_{\tau k}^{(m)} \left(H_m^3 - (h_k^{(m)})^3 \right) \right] + a^{(m)} \left[a_1^{(m)} E^{(m)} \times \right. \right. \\ &\times \left. \left((h^{(m)})^3 - H_{m-1}^3 \right) + 4 \left[E_*^{(m)} \left(H_m^3 - (h^{(m)})^3 \right) / 3 + \left(H_m^2 - (h^{(m)})^2 \right) \left(\sigma_{\tau}^{(m)} - E_*^{(m)} \varepsilon_*^{(m)} \right) / e_u \right] \right] \right\}, \quad C_{ijij} = \\ &= \sum_{m=0}^M \left\{ \sum_k \omega_k^{(m)} (l_{ki}^{(m)})^2 (l_{kj}^{(m)})^2 \left[E_k^{(m)} \left((h_k^{(m)})^3 - H_{m-1}^3 \right) + E_{\tau k}^{(m)} \left(H_m^3 - (h_k^{(m)})^3 \right) \right] + a^{(m)} \left[a_1^{(m)} E^{(m)} v^{(m)} \times \right. \right. \\ &\times \left. \left((h^{(m)})^3 - H_{m-1}^3 \right) + 2 \left[E_*^{(m)} \left(H_m^3 - (h^{(m)})^3 \right) / 3 + \left(H_m^2 - (h^{(m)})^2 \right) \left(\sigma_{\tau}^{(m)} - E_*^{(m)} \varepsilon_*^{(m)} \right) / e_u \right] \right] \right\}, \quad C_{iiij} = \quad (25) \\ &= \sum_{m=0}^M \sum_k \omega_k^{(m)} (l_{ki}^{(m)})^3 l_{kj}^{(m)} \left[E_k^{(m)} \left((h_k^{(m)})^3 - H_{m-1}^3 \right) + E_{\tau k}^{(m)} \left(H_m^3 - (h_k^{(m)})^3 \right) \right], \quad C_{ijij} = \sum_{m=0}^M \left\{ \sum_k \omega_k^{(m)} \times \right. \\ &\times \left. (l_{ki}^{(m)})^2 (l_{kj}^{(m)})^2 \left[E_k^{(m)} \left((h_k^{(m)})^3 - H_{m-1}^3 \right) + E_{\tau k}^{(m)} \left(H_m^3 - (h_k^{(m)})^3 \right) \right] + a^{(m)} \left[a_2^{(m)} \frac{E^{(m)}}{2} \left((h^{(m)})^3 - H_{m-1}^3 \right) + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{E_*^{(m)}}{3} \left(H_m^3 - (h^{(m)})^3 \right) + \left(H_m^2 - (h^{(m)})^2 \right) \left(\sigma_{\tau}^{(m)} - E_*^{(m)} \varepsilon_*^{(m)} \right) / e_u \right] \right\} \quad (j = 3 - i, \quad i = 1, 2), \quad a^{(m)} = 1 - \sum_k \omega_k^{(m)}, \\ D_{ij} &= 3 \sum_{m=0}^M \sum_k \omega_k^{(m)} l_{ki}^{(m)} l_{kj}^{(m)} \text{sign}(e_k^{(m)}) \left(H_m^2 - (h_k^{(m)})^2 \right) \left(\sigma_{\tau k}^{(m)} - E_{\tau k}^{(m)} \varepsilon_{\tau k}^{(m)} \right) \quad (i, j = 1, 2), \quad H_{-1} \equiv 0; \\ e_k^{(m)}, e_u^{(m)}, h_k^{(m)}, h^{(m)}, a_1^{(m)}, a_2^{(m)} &\text{ определены в (8), (9), (12), (16), (20), (21).} \end{aligned}$$

Если в точке (x_1, x_2, z) m -ного слоя имеет место разгрузка волокон k -того семейства, то напряжения в этих волокнах равны [7, 11, 13]

$$\sigma_k^{(m)} = \begin{cases} E_k^{(m)} \varepsilon_k^{(m)} = z E_k^{(m)} e_k^{(m)}, & H_{m-1} \leq |z| \leq h_{0k}^{(m)}; \\ \sigma_{0k}^{(m)} + E_k^{(m)} (\varepsilon_k^{(m)} - \varepsilon_{0k}^{(m)}) = \sigma_{0k}^{(m)} + z E_k^{(m)} (e_k^{(m)} - e_{0k}^{(m)}), & h_{0k}^{(m)} < |z| \leq H_m, \end{cases} \quad (26)$$

где согласно второму равенству (7)

$$\sigma_{0k}^{(m)} = \text{sign}(e_{0k}^{(m)} z) \sigma_{\tau k}^{(m)} + E_{\tau k}^{(m)} \left[e_{0k}^{(m)} z - \text{sign}(e_{0k}^{(m)} z) \varepsilon_{\tau k}^{(m)} \right], \quad h_{0k}^{(m)} < |z| \leq H_m; \quad (27)$$

$\varepsilon_{0k}^{(m)}, e_{0k}^{(m)}, h_{0k}^{(m)}$ — значения функций $\varepsilon_k^{(m)}, e_k^{(m)}, h_k^{(m)}$ соответственно (см. (5), (8), (9)), определенных в момент времени $t = t_k^{(m)}(x_1, x_2)$ начала разгрузки волокон k -того семейства в m -ном слое, который характеризуется соотношениями

$$e_{k,t}^{(m)}(x_1, x_2, t_k^{(m)}) = 0, \quad e_{k,tt}^{(m)}(x_1, x_2, t_k^{(m)}) \neq 0, \quad (28)$$

в которых следует учесть (9); при этом смешанные производные $w_{,ijtt}$, появляющиеся в левой части неравенства (28), можно определить за счет дифференцирования по x_i, x_j первого уравнения (1).

Если в процессе разгрузки в точке (x_1, x_2) выполняются соотношения

$$e_k^{(m)} = e_{0k}^{(m)}, \quad \text{sign}(e_{0k}^{(m)}) e_{k,t}^{(m)} > 0 \quad (\varepsilon_k^{(m)} = \varepsilon_{0k}^{(m)}, \quad \text{sign}(\varepsilon_{0k}^{(m)}) \varepsilon_{k,t}^{(m)} > 0), \quad (29)$$

то в волокнах k -того семейства в m -ном слое вновь будет развиваться первичная пластичность и от равенств (26), (27) следует перейти к (7)—(9). Если же в процессе разгрузки рассматриваемых волокон выполняются соотношения

$$|\varepsilon_k^{(m)} - \varepsilon_{0k}^{(m)}| = 2\varepsilon_{\tau k}^{(m)}, \quad |\varepsilon_k^{(m)}| < |\varepsilon_{0k}^{(m)}| \quad \text{при} \quad |z| = H_m(x_1, x_2), \quad (30)$$

то на внешних поверхностях m -ного и $(m + M)$ -ного слоев ($|z| = H_m$) в волокнах k -того семейства с учетом идеального эффекта Баушингера [7] достигается вторичная пластичность (противоположная по знаку первичной пластичности).

Если в точке (x_1, x_2) связующее разгружается (в отличие от волокон, одна часть семейств которых в данный момент времени в рассматриваемой точке может разгружаться, а другая часть — догружаться, материал связующего во всех слоях в точках с координатами $|z| \leq H$ (x_1, x_2 фиксированы) одновременно либо разгружается, либо догружается, что является следствием выражения для интенсивности деформаций в связующем (17)), то компоненты напряжения в нем определяются равенствами [13]

$$\begin{aligned}\sigma_{cii}^{(m)} &= -zE^{(m)}a_1^{(m)}(w_{,ii} + v^{(m)}w_{,jj}), \quad \sigma_{cij}^{(m)} = -zE^{(m)}a_2^{(m)}w_{,ij} \quad (H_{m-1} < |z| \leq h_0^{(m)}), \\ \sigma_{cii}^{(m)} &= \sigma_{0ii}^{(m)} - 2zE^{(m)}(2w_{,ii} + w_{,jj})/3 + 2zE^{(m)}(2w_{0,ii} + w_{0,jj})/3, \\ \sigma_{cij}^{(m)} &= \sigma_{0ij}^{(m)} - 2zE^{(m)}(w_{,ij} - w_{0,ij})/3, \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2 \quad (h_0^{(m)} < |z| \leq H_m),\end{aligned}\quad (31)$$

где согласно (16), (23)

$$\begin{aligned}\sigma_{0ii}^{(m)} &= -2[zE_*^{(m)} + \text{sign}(z)(\sigma_{\tau}^{(m)} - E_*^{(m)}\varepsilon_*^{(m)})/e_u^0](2w_{0,ii} + w_{0,jj})/3, \\ \sigma_{0ij}^{(m)} &= -2[zE_*^{(m)} + \text{sign}(z)(\sigma_{\tau}^{(m)} - E_*^{(m)}\varepsilon_*^{(m)})/e_u^0]w_{0,ij}/3, \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2 \quad (h_0^{(m)} < z \leq H_m), \\ e_u^0 &= 2\sqrt{w_{0,11}^2 + w_{0,11}w_{0,22} + w_{0,22}^2 + w_{0,12}^2}/\sqrt{3};\end{aligned}\quad (32)$$

$h_0^{(m)}$, $w_{0,ij}$ — значения функций $h^{(m)}$, $w_{,ij}$ соответственно (см. (21)), определенных в момент времени $t = t_*(x_1, x_2)$ начала разгрузки связующего в точке (x_1, x_2) во всех слоях, который характеризуется соотношениями

$$e_{u,t}(x_1, x_2, t_*) = 0, \quad e_{u,tt}(x_1, x_2, t_*) < 0, \quad (33)$$

где следует учесть выражение (14).

В соотношениях (31) в точках $h_0^{(m)} < |z| \leq H_m$ коэффициент Пуассона связующего $v^{(m)} = 0,5$, что соответствует отсутствию дилатации. При задании истинного значения $v^{(m)}$ в этих точках получим разрыв напряжений $\sigma_{cij}^{(m)}$ в момент t_* начала разгрузки в пластической зоне связующего m -ного слоя, в которой объемное сжатие до момента t_* не учитывалось.

Если в процессе разгрузки связующего в точке (x_1, x_2) выполняются соотношения

$$e_{u\Delta}(x_1, x_2, t) = 0, \quad e_{u,t}(x_1, x_2, t) > 0 \quad (t > t_*), \quad (34)$$

где

$$e_{u\Delta} \equiv \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(w_{,11} - w_{0,11})^2 + (w_{,11} - w_{0,11})(w_{,22} - w_{0,22}) + (w_{,22} - w_{0,22})^2 + (w_{,12} - w_{0,12})^2}, \quad (35)$$

то в связующем вновь будет развиваться первичная пластичность и от равенств (31), (32) следует вернуться к (22), (23). Если же в процессе разгрузки связующего хотя бы для одного m -го слоя выполняется равенство

$$e_{u\Delta}(x_1, x_2, t) = 2\varepsilon_*^{(m)}/H_m(x_1, x_2) \quad (m = 0, 1, \dots, M), \quad (36)$$

то на внешних поверхностях m -ного и $(m + M)$ -ного слоев ($|z| = H_m$) в связующем с учетом идеального эффекта Баушингера достигается вторичная пластичность [13].

Можно выписать связь между напряжениями $\sigma_k^{(m)}$, $\sigma_{cij}^{(m)}$ в фазах композиции и прогибом пластины w при развитии вторичной пластичности и последующей «вторичной» разгрузке субструктурных элементов, а также и при последующих циклах знакопеременной пластичности. Однако это выходит за рамки настоящего исследования, тем более что с увеличением числа циклов знакопеременной пластичности такая связь становится все более громоздкой.

Подставим выражения (26), (31) в равенства (3), а последние в первое соотношение (2). Тогда после вычисления интегралов получим представление для моментов при разгрузке всех или части субструктурных элементов конструкции, совпадающее с (24), где коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned}
C_{iiii} &= \sum_{m=0}^M \left\{ C_{iiii}^0(x_1, x_2; w) + \sum_{\alpha} \omega_{\alpha}^{(m)} (l_{\alpha i}^{(m)})^4 \left[E_{\alpha}^{(m)} \left((h_{\alpha}^{(m)})^3 - H_{m-1}^3 \right) + E_{\tau\alpha}^{(m)} \left(H_m^3 - (h_{\alpha}^{(m)})^3 \right) \right] + \right. \\
&+ \sum_{\beta} \omega_{\beta}^{(m)} (l_{\beta i}^{(m)})^4 E_{\beta}^{(m)} (H_m^3 - H_{m-1}^3) \left. \right\}, \quad C_{iijj} = \sum_{m=0}^M \left\{ C_{iijj}^0(x_1, x_2; w) + \sum_{\alpha} \omega_{\alpha}^{(m)} (l_{\alpha i}^{(m)})^2 (l_{\alpha j}^{(m)})^2 \times \right. \\
&\times \left[E_{\alpha}^{(m)} \left((h_{\alpha}^{(m)})^3 - H_{m-1}^3 \right) + E_{\tau\alpha}^{(m)} \left(H_m^3 - (h_{\alpha}^{(m)})^3 \right) \right] + \sum_{\beta} \omega_{\beta}^{(m)} (l_{\beta i}^{(m)})^2 (l_{\beta j}^{(m)})^2 E_{\beta}^{(m)} (H_m^3 - H_{m-1}^3) \left. \right\}, \\
C_{iiij} &= \sum_{m=0}^M \left\{ \sum_{\alpha} \omega_{\alpha}^{(m)} (l_{\alpha i}^{(m)})^3 l_{\alpha j}^{(m)} \left[E_{\alpha}^{(m)} \left((h_{\alpha}^{(m)})^3 - H_{m-1}^3 \right) + E_{\tau\alpha}^{(m)} \left(H_m^3 - (h_{\alpha}^{(m)})^3 \right) \right] + \right. \\
&+ \sum_{\beta} \omega_{\beta}^{(m)} (l_{\beta i}^{(m)})^3 l_{\beta j}^{(m)} E_{\beta}^{(m)} (H_m^3 - H_{m-1}^3) \left. \right\}, \quad C_{ijij} = \sum_{m=0}^M \left\{ C_{ijij}^0(x_1, x_2; w) + \sum_{\alpha} \omega_{\alpha}^{(m)} (l_{\alpha i}^{(m)})^2 (l_{\alpha j}^{(m)})^2 \times \right. \\
&\times \left[E_{\alpha}^{(m)} \left((h_{\alpha}^{(m)})^3 - H_{m-1}^3 \right) + E_{\tau\alpha}^{(m)} \left(H_m^3 - (h_{\alpha}^{(m)})^3 \right) \right] + \sum_{\beta} \omega_{\beta}^{(m)} (l_{\beta i}^{(m)})^2 (l_{\beta j}^{(m)})^2 E_{\beta}^{(m)} (H_m^3 - H_{m-1}^3) \left. \right\} \\
&(j = 3 - i, \quad i = 1, 2), \quad D_{ij} = \sum_{m=0}^M \left\{ 3 \sum_{\alpha} \omega_{\alpha}^{(m)} l_{\alpha i}^{(m)} l_{\alpha j}^{(m)} \text{sign}(e_{\alpha}^{(m)}) \left(H_m^2 - (h_{\alpha}^{(m)})^2 \right) (\sigma_{\tau\alpha}^{(m)} - E_{\tau\alpha}^{(m)} \varepsilon_{\tau\alpha}^{(m)}) + \right. \\
&+ \sum_{\beta} \omega_{\beta}^{(m)} l_{\beta i}^{(m)} l_{\beta j}^{(m)} \left[e_{0\beta}^{(m)} (E_{\tau\beta}^{(m)} - E_{\beta}^{(m)}) \left(H_m^3 - (h_{0\beta}^{(m)})^3 \right) + 3 \text{sign}(e_{0\beta}^{(m)}) (\sigma_{\tau\beta}^{(m)} - E_{\tau\beta}^{(m)} \varepsilon_{\tau\beta}^{(m)}) \times \right. \\
&\times \left. \left. \left(H_m^2 - (h_{0\beta}^{(m)})^2 \right) \right] \right\} + D_{ij}^0(x_1, x_2; w) \quad (i, j = 1, 2), \quad H_{-1} \equiv 0. \tag{37}
\end{aligned}$$

Здесь индекс α пробегает значения от 1 до $N^{(m)}$ только для тех номеров семейств волокон m -го слоя, в которых продолжается догрузка; индекс β пробегает значения от 1 до $N^{(m)}$ только для тех номеров семейств волокон m -го слоя, в которых имеет место разгрузка ($1 \leq \alpha, \beta \leq N^{(m)}$, $\alpha \neq \beta$). При догрузке связующего коэффициенты C_{ijsl}^0 , D_{ij}^0 в (37) имеют выражения

$$\begin{aligned}
C_{iiii}^0 &= \sum_{m=0}^M \left\{ a^{(m)} \left[a_1^{(m)} E^{(m)} \left((h^{(m)})^3 - H_{m-1}^3 \right) + 4 \left[\frac{1}{3} E_*^{(m)} \left(H_m^3 - (h^{(m)})^3 \right) + (\sigma_{\tau}^{(m)} - E_*^{(m)} \varepsilon_*^{(m)}) \times \right. \right. \right. \\
&\times \left. \left. \frac{1}{e_u} \left(H_m^2 - (h^{(m)})^2 \right) \right] \right\}, \quad C_{iijj}^0 = \sum_{m=0}^M \left\{ a^{(m)} \left[a_1^{(m)} E^{(m)} v^{(m)} \left((h^{(m)})^3 - H_{m-1}^3 \right) + 2 \left[\frac{1}{3} E_*^{(m)} \left(H_m^3 - (h^{(m)})^3 \right) + \right. \right. \right. \\
&+ \left. \frac{1}{e_u} (\sigma_{\tau}^{(m)} - E_*^{(m)} \varepsilon_*^{(m)}) \left(H_m^2 - (h^{(m)})^2 \right) \right] \right\}, \quad C_{iiij}^0 = \sum_{m=0}^M a^{(m)} \left[\frac{1}{2} a_2^{(m)} E^{(m)} \left((h^{(m)})^3 - H_{m-1}^3 \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{3} E_*^{(m)} \left(H_m^3 - (h^{(m)})^3 \right) + \frac{1}{e_u} (\sigma_{\tau}^{(m)} - E_*^{(m)} \varepsilon_*^{(m)}) \left(H_m^2 - (h^{(m)})^2 \right) \right], \quad C_{ijij}^0 = 0 \quad (j = 3 - i, \quad i = 1, 2), \\
D_{ij}^0 &= 0 \quad (i, j = 1, 2), \quad H_{-1} \equiv 0,
\end{aligned} \tag{38}$$

совпадающие с соответствующими слагаемыми в (25); при разгрузке связующего вместо (38) получаем

$$\begin{aligned}
C_{iiii}^0 &= \sum_{m=0}^M a^{(m)} E^{(m)} \left[a_1^{(m)} \left((h_0^{(m)})^3 - H_{m-1}^3 \right) + \frac{4}{3} \left(H_m^3 - (h_0^{(m)})^3 \right) \right], \quad C_{iijj}^0 = \sum_{m=0}^M a^{(m)} E^{(m)} \times \\
&\times \left[a_1^{(m)} v^{(m)} \left((h_0^{(m)})^3 - H_{m-1}^3 \right) + \frac{2}{3} \left(H_m^3 - (h_0^{(m)})^3 \right) \right], \quad C_{iiij}^0 = \sum_{m=0}^M a^{(m)} E^{(m)} \left[0,5 a_2^{(m)} \left((h_0^{(m)})^3 - H_{m-1}^3 \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{3} \left(H_m^3 - (h_0^{(m)})^3 \right) \right], \quad C_{ijij}^0 = 0, \quad D_{ii}^0 = -2(2w_{0,ii} + w_{0,jj}) \sum_{m=0}^M a^{(m)} \left[\frac{1}{3} (E_*^{(m)} - E^{(m)}) \left(H_m^3 - (h_0^{(m)})^3 \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{e_u} (\sigma_{\tau}^{(m)} - E_*^{(m)} \varepsilon_*^{(m)}) \left(H_m^2 - (h_0^{(m)})^2 \right) \right], \quad D_{ij}^0 = -2w_{0,ij} \sum_{m=0}^M a^{(m)} \left[\frac{1}{3} (E_*^{(m)} - E^{(m)}) \left(H_m^3 - (h_0^{(m)})^3 \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{e_u^0}\left(\sigma_{\tau}^{(m)}-E_*^{(m)}\varepsilon_*^{(m)}\right)\left(H_m^2-\left(h_0^{(m)}\right)^2\right)\left] \quad (j=3-i, i=1,2), \quad H_{-1}\equiv 0, \quad (39)$$

где функция e_u^0 определена в (32). Если не учитывается сжимаемость в упругих зонах связующего ($v^{(m)}=0,5$), то коэффициенты C_{ijil}^0, D_{ij}^0 в (39) редуцируются к

$$C_{iii}^0=\frac{4}{3}\sum_{m=0}^M a^{(m)} E^{(m)}\left(H_m^3-H_{m-1}^3\right), \quad C_{ijj}^0=\frac{2}{3}\sum_{m=0}^M a^{(m)} E^{(m)}\left(H_m^3-H_{m-1}^3\right), \quad (40)$$

$$C_{ijij}^0=\frac{1}{3}\sum_{m=0}^M a^{(m)} E^{(m)}\left(H_m^3-H_{m-1}^3\right), \quad C_{ijij}^0=0 \quad (j=3-i, i=1,2), \quad H_{-1}\equiv 0, \quad v^{(m)}=0,5.$$

Таким образом, до появления вторичной пластичности хотя бы в одной из фаз композиции моменты в пластине определяются равенствами (24) с учетом соотношений (25) или (37)—(40), последние же являются обобщением равенств (25).

В случае пространственного армирования тонких слоев пластины непрерывными волокнами постоянного поперечного сечения между параметрами армирования существует связь, приближенно определяемая равенством [14]:

$$\left[\omega_k^{(m)}\left(H_m-H_{m-1}\right)\cos\psi_k^{(m)}\right]_{,1}+\left[\omega_k^{(m)}\left(H_m-H_{m-1}\right)\sin\psi_k^{(m)}\right]_{,2}=0 \quad (H_{-1}\equiv 0), \quad (41)$$

которое при плоском армировании редуцируется к точному соотношению

$$\left(\omega_k^{(m)}\cos\psi_k^{(m)}\right)_{,1}+\left(\omega_k^{(m)}\sin\psi_k^{(m)}\right)_{,2}=0, \quad 1\leq k\leq N^{(m)}, \quad 0\leq m\leq M. \quad (42)$$

Пусть область G , занимаемая пластиной в плане, ограничена контуром Γ , тогда на одной части этого контура (обозначим ее Γ_p) могут быть заданы граничные условия по изгибающему моменту [8]

$$M_{11}n_1^2+M_{22}n_2^2+2M_{12}n_1n_2=M_n, \quad n_1=\cos\gamma, \quad n_2=\sin\gamma, \quad (x_1,x_2)\in\Gamma_p \quad (43)$$

и приведенной поперечной силы Кирхгофа

$$F_1n_1+F_2n_2+\partial_{\tau}(M_{n\tau})=F_{nz}, \quad M_{n\tau}\equiv(M_{22}-M_{11})n_1n_2+ \\ +M_{12}(n_1^2-n_2^2), \quad \partial_{\tau}(M_{n\tau})=-n_2M_{n\tau,1}+n_1M_{n\tau,2}, \quad (x_1,x_2)\in\Gamma_p, \quad (44)$$

а на другой части (обозначим ее Γ_u) — кинематические граничные условия

$$w(\Gamma_u)=w_n, \quad w_{,1}n_1+w_{,2}n_2=\theta_n, \quad (x_1,x_2)\in\Gamma_u, \quad (45)$$

где M_n, F_{nz} — изгибающий момент и приведенная поперечная сила Кирхгофа, заданные на Γ_p ; w_n, θ_n — прогиб на Γ_u и производная от прогиба по направлению внешней нормали к контуру, задаваемой углом γ ; ∂_{τ} — производная вдоль контура. (На контуре Γ могут быть заданы и смешанные из (43)—(45) граничные условия, например условия свободного опирания.)

На той части контура Γ (обозначим ее $\Gamma_k^{(m)}$), на которой волокна k -го семейства m -го слоя входят в область G , необходимо задать краевые условия для интенсивностей армирования [14]:

$$\omega_k^{(m)}\left(\Gamma_k^{(m)}\right)=\omega_{0k}^{(m)}, \quad k=1,2,\dots,N^{(m)}, \quad m=0,1,\dots,M, \quad (46)$$

где $\omega_{0k}^{(m)}$ — заданные на $\Gamma_k^{(m)}$ функции.

В начальный момент времени $t=t_0$ должны выполняться начальные условия для прогиба и его скорости

$$w(x_1,x_2,t_0)=w^0(x_1,x_2), \quad w_{,t}(x_1,x_2,t_0)=v^0(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2)\in G, \quad (47)$$

где w^0, v^0 — заданные функции.

Решение задачи о динамическом изгибе армированной слоистой пластины должно удовлетворять прочностным ограничениям [7, 8, 11]

$$\sigma_u^{(m)}(x_1,x_2,H_m,t)\leq\sigma_c^{(m)}, \quad \left|\sigma_k^{(m)}(x_1,x_2,H_m,t)\right|\leq\sigma_k^{*(m)}=\min\left(\sigma_k^{-{(m)}},\sigma_k^{+{(m)}}\right), \quad (48)$$

$$\sigma_c^{(m)}>0, \quad \sigma_k^{\pm{(m)}}>0, \quad 1\leq k\leq N^{(m)}, \quad 0\leq m\leq M,$$

где $\sigma_c^{(m)}$ — предел прочности связующего m -го слоя, равный пределу текучести $\sigma_{\tau}^{(m)}$ при упругом изгибе или временному сопротивлению $\sigma_b^{(m)}$ при упругопластическом изгибе; $\sigma_k^{\pm{(m)}}$ — пределы прочности волокон k -го семейства m -го слоя при сжатии (–) и растяжении (+) (в сжа-

той зоне может возникнуть некоторая форма неустойчивости волокон, поэтому в общем случае $\sigma_k^{-(m)} \neq \sigma_k^{+(m)}$.

Структура армирования слоев должна удовлетворять физическим неравенствам

$$0 \leq \omega_k^{(m)} \quad (k=1, 2, \dots, N^{(m)}), \quad \sum_k \omega_k^{(m)} \leq \omega_*^{(m)} \leq 1 \quad (m=0, 1, 2, \dots, M), \quad (49)$$

где $\omega_*^{(m)} = \text{const}$ — предельно допустимая суммарная интенсивность армирования m -го слоя.

Для получения разрешающего уравнения упругопластического динамического изгиба армированных слоистых пластин и соответствующих ему граничных условий в прогибах необходимо соотношения (24) подставить в уравнения движения (1) и граничные условия (43), (44) и исключить из рассмотрения поперечные силы F_i . Тогда уравнение движения примет вид

$$R(x_1, x_2) w_{,tt} = p(x_1, x_2, t) - \frac{2}{3} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left(\sum_{s=1}^2 \sum_{l=1}^2 C_{ijsl}(x_1, x_2; w) w_{,sl} - D_{ij}(x_1, x_2; w) \right)_{,ij}, \quad (50)$$

а граничные условия по силовым факторам преобразуются к виду: по изгибающему моменту

$$-(C_{1111} \cos^2 \gamma + C_{1122} \sin^2 \gamma + C_{1112} \sin 2\gamma) w_{,11} - (C_{2211} \cos^2 \gamma + C_{2222} \sin^2 \gamma + C_{2212} \sin 2\gamma) w_{,22} - \quad (51)$$

$$-2(C_{1211} \cos^2 \gamma + C_{1222} \sin^2 \gamma + C_{1212} \sin 2\gamma) w_{,12} + D_{11} \cos^2 \gamma + D_{22} \sin^2 \gamma + D_{12} \sin 2\gamma = 3M_n / 2;$$

по приведенной силе Кирхгофа

$$-\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left(\sum_{s=1}^2 \sum_{l=1}^2 C_{ijsl} w_{,sl} - D_{ij} \right)_{,j} n_i - \frac{1}{2} \partial_\tau \{ [(C_{1122} - C_{1111}) \sin 2\gamma + 2C_{1112} \cos 2\gamma] w_{,11} + \quad (52)$$

$$+ [(C_{2222} - C_{2211}) \sin 2\gamma + 2C_{2212} \cos 2\gamma] w_{,22} + 2[(C_{1222} - C_{1211}) \sin 2\gamma + 2C_{1212} \cos 2\gamma] w_{,12} -$$

$$-(D_{22} - D_{11}) \sin 2\gamma - 2D_{12} \cos 2\gamma \} = 3F_{nz} / 2, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p,$$

где функции M_n , F_{nz} могут зависеть от времени t и координаты, заданной вдоль контура Γ_p , а коэффициенты C_{ijml} , D_{ij} имеют выражения (25) или (37)—(40) и нелинейно зависят от $w_{,ij}$, H_m и параметров армирования $\psi_k^{(m)}$, $\omega_k^{(m)}$. При линейно-упругом поперечном изгибе в (25), (37)—(39) следует принять $h_k^{(m)} = h^{(m)} = h_{0k}^{(m)} = h_0^{(m)} = H_m$, тогда получим линейные относительно прогиба уравнение движения (50), граничные условия (51), (52) и выражения для моментов (24).

Если толщины слоев (или, что то же самое, аппликаты границ между слоями $z = H_m$) и траектории армирования (т.е. углы $\psi_k^{(m)}$) каждого слоя заданы, то краевая задача (41), (46) или (42), (46) определяет интенсивности армирования $\omega_k^{(m)}$ m -го слоя волокнами k -го семейства. (Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных первого порядка (41), (42) хорошо изучены [15], поэтому не будем останавливаться на этом вопросе более подробно; отметим лишь, что уравнения (41), (42) имеют действительные характеристики, совпадающие с траекториями армирования k -го семейства m -го слоя.)

Если функции $\psi_k^{(m)}$, $\omega_k^{(m)}$, H_m известны (заданы) и удовлетворяют физическим ограничениям (49), то уравнение движения (50) замкнуто относительно прогиба w . Этому квазилинейному (в случае упругопластического изгиба) или линейному (в случае линейно-упругого изгиба) параболическому дифференциальному уравнению в частных производных (содержащему производные второго порядка по времени t и четвертого порядка по пространственным переменным x_i) соответствуют нелинейные или линейные граничные (45), (51), (52) и начальные (47) условия. Решение сформулированной начально-краевой задачи упругопластического динамического изгиба слоисто-волоконистых пластин должно удовлетворять прочностным ограничениям (48).

Численный метод интегрирования начально-краевой задачи упругопластической динамики композитных пластин. Для приближенного интегрирования уравнения (50) по времени t используем обобщенные методы Рунге—Кутты [16, 17]. С этой целью уравнение (50) разделим на R и перепишем в виде системы

$$w_{,t}(\mathbf{x}, t) = v(\mathbf{x}, t), \quad v_{,t}(\mathbf{x}, t) = q(\mathbf{x}, t) - L(\mathbf{x}; w), \quad (53)$$

где

$$L(\mathbf{x}; w) = \frac{2}{3R(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left(\sum_{s=1}^2 \sum_{l=1}^2 C_{ijsl}(\mathbf{x}; w) w_{,sl}(\mathbf{x}, t) - D_{ij}(\mathbf{x}; w) \right)_{,ij}, \quad q(\mathbf{x}, t) = \frac{p(\mathbf{x}, t)}{R(\mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}. \quad (54)$$

Численно систему (53) проинтегрируем с помощью двустадийного обобщенного метода Лобатто IIIA — метода трапеций (наименования методов будем использовать в соответствии с принятой в [18] терминологией), имеющего второй порядка точности по τ , где τ — шаг по времени t . Согласно основной идее обобщения методов Рунге–Кутты [16, 17] этот метод применительно к системе (53) реализуется так:

$$\begin{aligned} w^{n+1} &= w^n + \tau(V_1 + V_2)/2, \quad v^{n+1} = v^n + \tau(q^n - L(\mathbf{x}; W_1) + q^{n+1} - L(\mathbf{x}; W_2))/2, \\ W_1 &= w^n + 0 \cdot \tau(V_1 + V_2), \quad W_2 = w^n + \tau(V_1 + V_2)/2, \\ V_1 &= v^n + 0 \cdot \tau(q^n - L(\mathbf{x}; W_1) + q^{n+1} - L(\mathbf{x}; W_2)), \quad V_2 = v^n + \tau(q^n - L(\mathbf{x}; W_1) + q^{n+1} - L(\mathbf{x}; W_2))/2, \end{aligned}$$

откуда после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} w^{n+1} &= W_2(\mathbf{x}), \quad w^n = W_1(\mathbf{x}), \quad v^{n+1} = V_2(\mathbf{x}), \quad v^n = V_1(\mathbf{x}), \\ v^{n+1} &= 2(w^{n+1} - w^n)/\tau - v^n, \quad v^{n+1} = v^n + \tau(q^n - L(\mathbf{x}; w^n) + q^{n+1} - L(\mathbf{x}; w^{n+1}))/2; \end{aligned} \quad (55)$$

$$\tau^2 D(\mathbf{x}; w^{n+1}) + 4R(\mathbf{x})w^{n+1} = \tau^2(p^n + p^{n+1} - D(\mathbf{x}; w^n)) + 4R(\mathbf{x})(\tau v^n + w^n), \quad (56)$$

где

$$D(\mathbf{x}; w^n) = R(\mathbf{x})L(\mathbf{x}; w^n) = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left(\sum_{s=1}^2 \sum_{l=1}^2 C_{ijsl}(\mathbf{x}; w^n) w_{,sl}^n(\mathbf{x}) - D_{ij}(\mathbf{x}; w^n) \right)_{,ij}, \quad q^n(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}, t_n),$$

$$p^n(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}, t_n), \quad w^n(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}, t_n), \quad v^n(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}, t_n), \quad t_{n+1} = t_n + \tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (t_0 = 0); \quad (57)$$

шаг по времени $\tau > 0$ может быть переменным ($\tau = \tau_n$); W_1, W_2, V_1, V_2 — вспомогательные функции.

Если решение на n -ом «слое» по времени известно (известны w^n, v^n), то уравнение (56) задает решение на следующем $(n+1)$ -ом «слое». Определенным недостатком уравнения (56) является то, что для вычисления его правой части необходимо применить дифференциальный оператор четвертого порядка $D(\mathbf{x}; \bullet)$ к известной функции w^n (см. (56), (57)). Чтобы избежать этого дифференцирования, введем в рассмотрение функции

$$P_n(\mathbf{x}) = \tau^2 D(\mathbf{x}; w^n) + 4R(\mathbf{x})w^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (58)$$

Тогда разрешающее уравнение (56) примет вид

$$\tau^2 D(\mathbf{x}; w^{n+1}) + 4R(\mathbf{x})w^{n+1} = P_{n+1}(\mathbf{x}), \quad (59)$$

где правая часть известна и определяется по рекуррентной формуле

$$P_{n+1}(\mathbf{x}) = -P_n(\mathbf{x}) + 4R(\mathbf{x})(\tau v^n + 2w^n) + \tau^2(p^n + p^{n+1}), \quad (60)$$

вытекающей из сравнения (58) и правой части (56). В момент времени $t = t_0$ в силу начальных условий (47) из (58) получим известную функцию

$$P_0(\mathbf{x}) = \tau^2 D(\mathbf{x}; w^0(\mathbf{x})) + 4R(\mathbf{x})w^0(\mathbf{x}). \quad (61)$$

В частности, при нулевых начальных условиях

$$P_0(\mathbf{x}) = 0 \quad (v^0(\mathbf{x}) = 0, \quad w^0(\mathbf{x}) = 0), \quad (62)$$

а из (60), (62) следует

$$P_1(\mathbf{x}) = \tau^2(p^0(\mathbf{x}) + p^1(\mathbf{x})). \quad (63)$$

Таким образом, для определения прогиба на $(n+1)$ -ом «слое» по времени необходимо проинтегрировать уравнение (59) с известной правой частью (60)–(63) при граничных условиях, которые полностью соответствуют граничным условиям исходной начально-краевой задачи. (В частности, в граничных условиях (45), (51), (52) необходимо заменить w на $w^{n+1}(\mathbf{x})$.)

Уравнение (59) формально совпадает с уравнением статического упругопластического изгиба слоисто-волоконистой пластины на упругом основании. Для интегрирования граничной задачи, соответствующей уравнению (59), можно использовать известные методы статики.

Основная трудность, возникающая при решении граничной задачи для уравнения (59), заключается в ее существенной нелинейности при наличии пластических зон в фазах композиции. Для линеаризации задачи упругопластического изгиба можно использовать следующий итерационный процесс, качественно аналогичный методу переменных параметров упругости [7]. Пусть $w_{(r)}^{n+1}(\mathbf{x})$ — известное r -е приближение разыскиваемой функции w^{n+1} . Тогда в (51), (52), (57) по формулам (25), (37)—(40) с учетом (8), (16), (21) определим r -ые приближения $C_{ijsl(r)}$, $D_{ij(r)}$ коэффициентов C_{ijsl} , D_{ij} , после чего вместо (59) получим линейное уравнение

$$\tau^2 D_{(r)}(\mathbf{x}; w_{(r+1)}^{n+1}(\mathbf{x})) + 4R(\mathbf{x}) w_{(r+1)}^{n+1}(\mathbf{x}) = P_{n+1}(\mathbf{x}) \quad (64)$$

и соответствующие ему линейные граничные условия (45), (51), (52), в которых (а также и в (64) с учетом (57)) следует w^{n+1} заменить на $w_{(r+1)}^{n+1}$ и C_{ijsl} , D_{ij} — на приближения $C_{ijsl(r)}$, $D_{ij(r)}$.

В качестве начального приближения для w^{n+1} можно выбрать функцию

$$w_{(0)}^{n+1}(\mathbf{x}) = w^n(\mathbf{x}) + \tau v^n(\mathbf{x}), \quad (65)$$

получающуюся по формуле Тейлора в предположении, что на предыдущем n -ом «слое» по времени решение задачи уже известно. Авторам пока не удалось доказать сходимость такого итерационного метода, но многочисленные расчеты показывают, что он всегда сходится в смысле ограниченности нормы приближения решения и стремления к нулю нормы разности двух последовательных приближений решения при увеличении количества итераций.

При решении граничной задачи для уравнения (59) (или (64)) следует учитывать, что диаграммы деформирования фазовых материалов предполагаются кусочно-линейными. Поэтому в точках излома этих диаграмм функции $\sigma_u^{(m)}(\epsilon_u)$, $\sigma_k^{(m)}(\epsilon_k^{(m)})$ ($1 \leq k \leq N^{(m)}$, $0 \leq m \leq M$) непрерывны, но их производные испытывают разрыв. Следовательно, частные производные от коэффициентов C_{ijsl} , D_{ij} в (51), (52), (57) испытывают разрыв на линиях Γ_* , определяемых равенствами

$$\Gamma_*: h_k^{(m)} = H_{m-1}, h_k^{(m)} = H_m, h^{(m)} = H_{m-1}, h^{(m)} = H_m \quad (1 \leq k \leq N^{(m)}, 0 \leq m \leq M) \quad (66)$$

(так как на этих линиях испытывают разрыв производные от функций $h_k^{(m)}$, $h^{(m)}$, см. (8), (21)), а значит, на линиях (66) необходимо ставить общеизвестные условия сопряжения решения [8]. Задача усложняется тем, что линии (66) изменяются при переходе от n -го «слоя» по времени t_n к следующему t_{n+1} , а также при реализации итерационного процесса (64), (65). Чтобы избежать необходимости решения сопряженной задачи упругопластического изгиба при гладких структурах армирования слоев, для приближенного решения задачи целесообразно использовать энергетические методы, которые в ряде случаев за счет интегральных преобразований (интегрирование по частям, формула Грина и т.д.) позволяют избежать дифференцирования функций C_{ijsl} , D_{ij} . В частности, с этой целью можно использовать метод Бубнова—Галеркина.

Для интегрирования граничной задачи (45), (51), (52), (59) (или (45), (51), (52), (64)) методом Бубнова—Галеркина, как обычно, представим решение в виде суммы [19]

$$w^{n+1}(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^K W_i^{n+1} w_i(x_1, x_2) \quad (K \geq 1), \quad (67)$$

где $w_i(x_1, x_2)$ — базисные функции, тождественно удовлетворяющие граничным условиям на всем контуре пластины; W_i^{n+1} — коэффициенты, подлежащие определению. Для прямоугольных, эллиптических (односвязных и двусвязных), круглых и кольцевых пластин, жестко защемленных по всему контуру Γ , базисные функции $w_i(x_1, x_2)$ приведены в [19]. В случае прямоугольной пластины вместо (67) можно использовать разложение вида

$$w^{n+1}(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{K_1} \sum_{j=1}^{K_2} W_{ij}^{n+1} X_{1i}(x_1) X_{2j}(x_2) \quad (K_1 \geq 1, K_2 \geq 1), \quad (68)$$

где $X_{1i}(x_1)$, $X_{2j}(x_2)$ — базисные функции, тождественно удовлетворяющие граничным условиям на противоположных сторонах прямоугольной пластины; W_{ij}^{n+1} — коэффициенты, подлежащие определению. Если пластина жестко защемлена по всему контуру, то при любых структурах армирования в качестве $X_{1i}(x_1)$, $X_{2j}(x_2)$ можно использовать известные балочные функции или другие базисные функции, приведенные в [19].

В случае шарнирного опирания прямоугольной пластины ($0 \leq x_1 \leq c$, $0 \leq x_2 \leq b$) имеем граничные условия

$$w(0, x_2) = w(c, x_2) = w(x_1, 0) = w(x_1, b) = 0; \quad (69)$$

$$M_{11}(w)|_{x_1=0, c} = M_{22}(w)|_{x_2=0, b} = 0, \quad (70)$$

где $M_{ii}(w)$ определены в (24) с учетом (25), (37)—(40). В общем случае равенства (70) являются нелинейными граничными условиями по моменту. При линейно-упругом деформировании (в частности, при разгрузке всех фаз композиции) на кромках пластины моменты M_{ii} суть линейные операторы от прогиба w .

Если структура армирования каждого слоя такова, что все $N^{(m)} = 2L^{(m)}$ ($N^{(m)}$ — четное) семейств волокон m -го слоя можно разбить на пары так, что волокна семейств, образующих пару, изготовлены из одного материала и пересекают кромки прямоугольной пластины по симметричным направлениям ($\psi_{2l-1}^{(m)} = -\psi_{2l}^{(m)}$) с одинаковой интенсивностью ($\omega_{2l-1}^{(m)} = \omega_{2l}^{(m)}$, $l = 1, 2, \dots, L^{(m)}$, $m = 0, 1, \dots, M$), то можно показать, что с учетом равенств (69) условия по моментам (70) эквивалентны кинематическим условиям

$$w_{,11}(0, x_2) = w_{,11}(c, x_2) = w_{,22}(x_1, 0) = w_{,22}(x_1, b) = 0. \quad (71)$$

Указанные типы структур существуют и достаточно разнообразны. Во-первых, к ним относятся прямолинейные структуры армирования ($\psi_k^{(m)} = \text{const}$). Например, при $N^{(m)} = 4$: первое семейство волокон направлено вдоль x_1 ($\psi_1^{(m)} = 0$), второе — вдоль x_2 ($\psi_2^{(m)} = \pi/2$), третье и четвертое семейства — по направлениям $\psi_3^{(m)} = -\psi_4^{(m)} = \text{const}$ ($\omega_3^{(m)} = \omega_4^{(m)} = \text{const}$, а интенсивности армирования первого и второго семейств могут быть непостоянными, т.е. $\omega_1^{(m)} = \omega_1^{(m)}(x_2)$, $\omega_2^{(m)} = \omega_2^{(m)}(x_1)$).

Во-вторых, такие структуры получаются, если в каждой паре семейств функции $\psi_{2l-1}^{(m)} = -\psi_{2l}^{(m)}$, $\omega_{2l-1}^{(m)} = \omega_{2l}^{(m)}$ зависят только от одной переменной:

$$\psi_{2l-1}^{(m)}(x_i) = -\psi_{2l}^{(m)}(x_i); \quad (72)$$

$$\omega_{2l-1}^{(m)}(x_i) = \omega_{2l}^{(m)}(x_i) = \omega_{2l}^{*(m)} / \cos \psi_{2l}^{(m)}(x_i), \quad (73)$$

где последнее равенство является следствием условия постоянства поперечных сечений волокон (42) (или (41) при $H_m - H_{m-1} = \text{const}$); $\omega_{2l}^{*(m)} = \text{const}$ — заданные постоянные интегрирования [14]. Если $H_m - H_{m-1} = f_m(x_i) \neq \text{const}$, то из (41) в случае пространственного армирования вместо (73) с учетом (72) получим

$$\omega_{2l-1}^{(m)}(x_i) = \omega_{2l}^{(m)}(x_i) = \omega_{2l}^{*(m)} / [f_m(x_i) \cos \psi_{2l}^{(m)}(x_i)] \quad (i=1 \text{ или } i=2, 1 \leq l \leq L^{(m)}, 0 \leq m \leq M). \quad (74)$$

Для таких структур армирования в качестве базисных функций в (68) можно использовать

$$X_{1i}(x_1) = \sin(\pi i x_1 / c), \quad X_{2j}(x_2) = \sin(\pi j x_2 / b), \quad i, j = 1, 2, \dots, \quad (75)$$

удовлетворяющие условиям (69), (71).

Если некоторые стороны кромки прямоугольной пластины защемлены, а другие — оперты (при выполнении на опертых кромках условий, аналогичных (72)—(74)), то также можно использовать соответствующие балочные функции для задания $X_{1i}(x_1)$, $X_{2j}(x_2)$ в (68).

Отметим, что разложение вида (68) при соответствующем выборе функций $X_{1i}(x_1)$, $X_{2j}(x_2)$ можно использовать и в случае круглых или кольцевых пластин, а также и для пластин, занимающих в плане область в виде кругового или кольцевого сектора и др. При этом под x_1 следует понимать полярный радиус, под x_2 — полярный угол, а уравнение (59) и соответствующие ему граничные условия нужно переписать в полярной системе координат.

В заключение настоящего раздела кратко обсудим возможность использования еще одного обобщенного метода Рунге—Кутты для численного интегрирования задачи динамического изгиба слоисто-волоконистых пластин. Для простоты рассмотрим линейно-упругое деформирование всех фаз композиции. В этом случае $D_{ij} \equiv 0$ и вместо (50) получим линейное уравнение движения параболического типа

$$w_{,tt}(\mathbf{x}, t) + \frac{2}{3R(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left(\sum_{s=1}^2 \sum_{l=1}^2 C_{ijsl}(\mathbf{x}) w_{,sl}(\mathbf{x}, t) \right)_{,ij} = q(\mathbf{x}, t) \quad (t \geq t_0, \quad \mathbf{x} \in G), \quad (76)$$

где коэффициенты C_{ijsl} не зависят от $w_{,ij}$ и определены в (25) при $h_k^{(m)} = h^{(m)} = H_m$, а функция q задана в (54).

Численно проинтегрировать уравнение (76) можно по-прежнему по схеме (55)–(57), где L , D суть линейные дифференциальные операторы, в которых $D_{ij} \equiv 0$. Если ввести в рассмотрение вспомогательную функцию $W = (w^{n+1} + w^n)/2$, то из (55), (56) получим следующую схему:

$$\begin{aligned} w^{n+1}(\mathbf{x}) &= 2W(\mathbf{x}) - w^n(\mathbf{x}), \quad v^{n+1}(\mathbf{x}) = 4(W(\mathbf{x}) - w^n(\mathbf{x}))/\tau - v^n(\mathbf{x}); \\ \tau^2 \frac{2}{3} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left(\sum_{s=1}^2 \sum_{l=1}^2 C_{ijsl}(\mathbf{x}) W_{,sl}(\mathbf{x}) \right)_{,ij} + 4R(\mathbf{x})W(\mathbf{x}) &= \tau^2 p^{n+1/2}(\mathbf{x}) + 2R(\mathbf{x})(\tau v^n(\mathbf{x}) + 2w^n(\mathbf{x})), \end{aligned} \quad (77)$$

где

$$p^{n+1/2}(\mathbf{x}) = (p^n(\mathbf{x}) + p^{n+1}(\mathbf{x}))/2 = p(\mathbf{x}, t_n + \tau/2) + O(\tau^2). \quad (78)$$

Равенства (77) формально совпадают с уравнениями одностадийного обобщенного метода Гаусса—Лежандра (метода средней точки), также имеющего второй порядок точности по τ . (Единственное количественное отличие заключается лишь в том, что в методе средней точки $p^{n+1/2}(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}, t_n + \tau/2)$. Эта функция отличается от (78) на малую величину $O(\tau^2)$ порядка точности численной схемы.) Следовательно, в линейном случае обобщенные методы средней точки и трапеций формально совпадают.

В [17, 20] авторы подробно исследовали применимость обобщенных методов Рунге—Кутты (в частности, метода средней точки) для численного интегрирования задачи поперечных колебаний упругой однородной цилиндрической оболочки, описываемой линейным параболическим уравнением, содержащим, как и (76), производные от прогиба второго порядка по времени и четвертого порядка по пространственной переменной. Предполагая, что из каких-то соображений известны собственные функции начально-краевой задачи для однородного уравнения (76) ($q \equiv 0$), и дословно повторяя ход рассуждений, приведенный в [17, 20], можно доказать спектральную устойчивость схемы (77) при $p^{n+1/2} \equiv 0$ и нулевых граничных условиях. (Это доказательство весьма громоздко, поэтому не будем его здесь приводить.) Из спектральной устойчивости следует устойчивость по начальным данным в энергетической норме [21]. Известно [21], что для двухслойных схем (к которым относятся схемы (55), (57), (59) и (77)), применяемых к интегрированию линейных уравнений типа (76), из устойчивости по начальным данным следует устойчивость по правой части. Следовательно, численная схема (77), а значит и схема (55), (59), устойчива при линейно-упругом деформировании фазовых материалов. Аналогично можно доказать устойчивость рассматриваемых схем и при разгрузке всех фаз композиции, когда C_{ijsl} , D_{ij} суть известные функции переменных x_1, x_2 (см. (37)–(40)); при этом

известную функцию $\frac{2}{3} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 D_{ij,ij}(\mathbf{x})$ в (50) можно объединить с $p(\mathbf{x}, t)$ и рассматривать как

фиктивную составляющую внешней распределенной нагрузки, после чего уравнение (50) редуцируется в (76), для которого схема (55), (59) устойчива.

При наличии пластических зон в фазах композиции, когда C_{ijsl} , D_{ij} суть нелинейные операторы от прогиба w , устойчивость численной схемы (55)–(63) авторам пока доказать не удалось. Но в пользу устойчивости этой схемы говорит физическая корректность (непротиворечивость) результатов многочисленных расчетов, проведенных авторами, и тот факт, что при переходе от линейно-упругого к упругопластическому деформированию (и наоборот — разгрузка) конструкции тип уравнения движения (50) не изменяется.

Несмотря на формальное сходство методов средней точки и трапеций (77), (78) в случае линейно-упругих колебаний пластины, эти методы существенно различаются при нелинейных (неупругих) колебаниях. В настоящем исследовании для интегрирования системы (53) использовался метод трапеций (55)–(63), а не метод средней точки (77) (хотя, на первый взгляд, второй метод кажется более компактным) по следующим соображениям. Согласно методу трапеций, на $(n+1)$ -ом «слое» по времени прогиб $w^{n+1}(\mathbf{x})$ определяется из граничной задачи для уравнения (59), коэффициенты которого C_{ijsl} , D_{ij} (см. (57)) зависят от параметров искривления срединной плоскости пластины $w_{,ij}^{n+1}$, т.е. от состояния фаз композиции (упругого или пласти-

ческого). Согласно же методу средней точки, прогиб w^{n+1} определяется первым равенством (77) с использованием вспомогательной функции W , которую в силу коллокационного свойства этого метода [18], можно рассматривать как прогиб на промежуточном $(n+1/2)$ -ом «слое» по времени ($t_{n+1/2} = t_n + \tau/2$). Функция W определяется из граничной задачи для уравнения, формально совпадающего с (59) при замене w^{n+1} на W и при выражении для P_{n+1} , совпадающем с правой частью третьего уравнения (77). При этом коэффициенты C_{ijst} , D_{ij} в таком уравнении зависят от $W_{,ij}$, т.е. от состояния фаз композиции (упругих и пластических) на промежуточном $(n+1/2)$ -ом «слое» по времени. А значит, при вычислении прогиба w^{n+1} не используется информация о состоянии фаз композиции на $(n+1)$ -ом «слое» по времени; состояния фаз композиции как бы экстраполируются с промежуточного «слоя» $(n+1/2)$ на $(n+1)$ -ый «слой». В силу этого недостатка метода средней точки авторы предпочли ему метод трапеций.

Обсуждение результатов расчетов упругопластической динамики пластин. В качестве примера рассмотрим упругопластический динамический изгиб прямоугольной удлиненной пластины. Предполагается, что внешняя распределенная поперечная нагрузка, закрепление пластины, структуры армирования и толщины слоев не изменяются в продольном направлении. Тогда, пренебрегая локальными торцевыми эффектами, изгиб такой пластины можно считать цилиндрическим и для описания неупругого поведения фазовых материалов даже при развитых пластических деформациях можно обоснованно использовать деформационную теорию пластичности, так как путь деформирования каждой точки конструкции в этом случае является простым [9].

Ориентируем пластину так, чтобы ось Ox_2 совпадала с продольным направлением пластины. Тогда в силу сделанных предположений прогиб w зависит только от времени t и координаты x_1 в поперечном направлении. Для численного интегрирования соответствующей начально-краевой задачи можно использовать метод (55), (57)–(63), где оператор D редуцируется к виду (см. (57))

$$D(x_1; w^n) = \frac{2}{3} \frac{d^2}{dx_1^2} \left(C_{1111} \left(x_1; \frac{d^2 w^n(x_1)}{dx_1^2} \right) \frac{d^2 w^n(x_1)}{dx_1^2} - D_{11} \left(x_1; \frac{d^2 w^n(x_1)}{dx_1^2} \right) \right). \quad (79)$$

Для численного интегрирования двухточечной граничной задачи, соответствующей уравнению (59), где следует x заменить на x_1 и учесть (79), можно использовать описанную выше линеаризацию с последующим применением метода матричной прогонки на трехточечном шаблоне с регулярной сеткой. (Более подробно реализацию этого алгоритма см. в [3], так как цилиндрический изгиб кирхгофовой пластины качественно схож с изгибом стержней.) В целом такой метод имеет второй порядок точности по обоим переменным x_1, t .

Исследуем динамический изгиб изотропных и армированных однослойных и трехслойных прямоугольных удлиненных пластин шириной $l = 1$ м. Толщина пластин может быть постоянной ($2H(x) = 2H_* = \text{const}$) или переменной и определяется формулой

$$2H(x_1) = 2\eta H_* + \pi \sin(\pi x_1 / l) (1 - \eta) H_*, \quad (0 \leq x_1 \leq l, \quad \eta \geq 0). \quad (80)$$

(При однородном армировании пластин ($\omega_k = \text{const}$) и задании их толщины в виде (80) расход материала k -той фазы композиции будет такой же, как и в пластине постоянной толщины $2H_*$, так как объем пластин одинаков и равен $H_* l b$, где $b(l)$ — длина пластины вдоль оси x_2 . При значениях параметра $0 \leq \eta < 1$ из (80) следует, что толщина пластины на краях $x_1 = 0, l$ меньше, чем в центре ($x_1 = l/2$); при $\eta = 1$ получаем пластину постоянной толщины $2H_*$.) Для пластин постоянной толщины примем $2H_* = 0,03$ м. На краях $x_1 = 0, l$ пластины могут быть шарнирно оперты или защемлены. Внешняя распределенная нагрузка является нагрузкой взрывного типа и затухает по экспоненциальному закону

$$p(x_1, t) = p(t) = p_0 \exp(-\alpha t) \quad (\alpha = 12 \text{ с}^{-1}, \quad t \geq 0), \quad (81)$$

где p_0 — значение нагрузки в начальный момент времени $t = 0$, в который конструкция находится в покое, т.е. $w^0 = 0, v^0 = 0$ (см. (47)). Изотропные пластины изготовлены из алюминиевого сплава АДН; армированные пластины изготовлены из того же сплава АДН и усилены одно-

родно и прямолинейно тремя семействами борных волокон ($\psi_1 = 0, \psi_2 = -\psi_3 \geq 0, \omega_2 = \omega_3$). Механические характеристики фазовых материалов приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Механические характеристики фазовых материалов [10]

Материал	E , ГПа	ν	$\sigma_{0,2}$, МПа	σ_B , МПа	δ , %
Сплав АДН	71,0	0,325	100,0	150,0	6,0
Волокна бора	416,0	0,23	—	3150,0	0,2

Будем подбирать максимальные значения p_0 в (81) так, чтобы за характерный период времени $T > 0$, в течение которого исследуется процесс колебаний, напряженное состояние в фазах композиции пластины не превышало некоторого предельного состояния. Через p_s обозначим $\max p_0$, при котором хоть в одной из фаз композиции напряженное состояние достигает предела текучести $\sigma_{0,2}$, но пластичность не развивается (при $p_0 \leq p_s$ — упругие колебания, при $p_0 > p_s$ — упругопластические колебания); через p_{ss} обозначим $\max p_0$, при котором хоть в одной из фаз композиции достигается вторичная пластичность, но вторичная пластичность не развивается (при $p_s < p_0 \leq p_{ss}$ — первичная пластичность и разгрузка, при $p_0 > p_{ss}$ — вторичная пластичность); через p_y обозначим значение p_0 , при котором в момент $t_{\max}$ достижения центральным сечением пластины ($x_1 = l/2$) максимального прогиба напряженное состояние хоть в одной из фаз композиции достигает предела временного сопротивления σ_B (начальное разрушение; при $t \leq t_{\max}$ — первичная пластичность, при $t > t_{\max}$ — первичная разгрузка в опасном сечении пластины).

В качестве характерного периода T выберем время, в течение которого нагрузка (81) уменьшается в 1000 раз ($T = -\ln(0,001)/\alpha = 0,576$ с). При $t > T$ внешняя нагрузка ничтожно мала ($p(t) < 0,001 p_0$) и колебания можно считать установившимися, по крайней мере при упругом изгибе.

В расчетах характерный период времени T будем разбивать на 1000 «слоев» ($\tau = T/1000$), а по ширине пластины равномерно введем 401 узел.

Исследуем динамическое поведение регулярно армированных по толщине пластин ($M = 0$) со следующими структурами армирования: 1) поперечное армирование ($\omega_1^{(0)} = 0,4$, $\omega_2^{(0)} = \omega_3^{(0)} = 0$ или, что то же самое, $\omega_2^{(0)} = \omega_3^{(0)} = 0,2$, $\psi_2^{(0)} = -\psi_3^{(0)} = 0$, $\omega_1^{(0)} = 0$); 2) перекрестное армирование под углами $\psi_2^{(0)} = -\psi_3^{(0)} = \pi/6$ ($\omega_1^{(0)} = 0$, $\omega_2^{(0)} = \omega_3^{(0)} = 0,2$); 3) перекрестное армирование под углами $\psi_2^{(0)} = -\psi_3^{(0)} = \pi/4$ ($\omega_1^{(0)} = 0$, $\omega_2^{(0)} = \omega_3^{(0)} = 0,2$); 4) квазиизотропное армирование ($\psi_1^{(0)} = 0$, $\psi_2^{(0)} = -\psi_3^{(0)} = \pi/3$, $\omega_1^{(0)} = \omega_2^{(0)} = \omega_3^{(0)} = 0,4/3$). В каждой точке таких пластин суммарная плотность армирования $\sum_k \omega_k^{(0)} = 0,4$ и общий расход арматуры при фиксированной геометрии одинаков.

Для сравнения исследуем динамику трехслойных ($M = 1$) пластин тех же размеров, изготовленных из тех же фазовых материалов, с тем же расходом арматуры, при аналогичных структурах армирования внешних несущих слоев. Внутренний слой является изотропным и изготовлен из сплава АДН; внешние слои изготовлены также из сплава АДН и однородно армированы тремя семействами волокон бора с суммарной плотностью $\sum_k \omega_k^{(m)} = 0,7$ ($m = 1,2$), что,

как правило, на практике соответствует максимально допустимой плотности армирования. Чтобы общий расход волокон в трехслойных пластинах был такой же, как в регулярно армированных по толщине конструкциях, рассмотренных выше, толщину внутреннего слоя в трехслойных пластинах нужно задать так: $2H_0 = 2(0,7 - 0,4)H/0,7 = 6H/7$ (где толщина $2H$ определена в (80)), а плотности армирования соответствующих семейств волокон в несущих слоях нужно увеличить в 7/4 раза.

В табл. 2 и 3 приведены рассчитанные значения p_s , p_{ss} , p_y для шарнирно опертых и защемленных пластин постоянной толщины ($H = H_*$) соответственно, а в табл. 4 — для шарнирно опертых пластин переменной толщины (80) при значении параметра $\eta = 0,5$ (на кромках толщина такой пластины вдвое меньше, чем в случае $H = const$, а в центре — в $(1 + \pi/2)/2 \approx 1,29$ раза больше). Структура с номером «0» соответствует изотропной пластине из сплава АДН.

Т а б л и ц а 2

Предельные динамические характеристики шарнирно опертых пластин постоянной толщины ($\eta = 1$)

Номер структуры армирования	Регулярно армированные по толщине пластины			Трехслойные пластины		
	p_s , кПа	p_{ss} , кПа	p_y , кПа	p_s , кПа	p_{ss} , кПа	p_y , кПа
0	70,1	99,5	273,4	70,1	99,5	273,4
1	168,5	219,4	872,3	235,4	306,7	1380,1
2	110,8	146,8	689,8	143,1	186,5	1063,3
3	72,5	97,2	520,0	74,2	97,9	734,9
4	88,1	117,8	401,2	100,8	132,7	557,8

Т а б л и ц а 3

Предельные динамические характеристики жестко защемленных пластин постоянной толщины ($\eta = 1$)

Номер структуры армирования	Регулярно армированные по толщине пластины			Трехслойные пластины		
	p_s , кПа	p_{ss} , кПа	p_y , кПа	p_s , кПа	p_{ss} , кПа	p_y , кПа
0	111,8	152,3	434,7	111,8	152,3	434,7
1	272,4	357,9	1371,0	381,4	504,8	2157,5
2	174,8	235,6	1114,0	235,1	308,3	1671,7
3	117,3	155,5	851,0	122,1	160,3	1198,0
4	141,1	187,8	633,6	160,3	214,5	883,6

Т а б л и ц а 4

Предельные динамические характеристики шарнирно опертых пластин переменной толщины ($\eta = 0,5$)

Номер структуры армирования	Регулярно армированные по толщине пластины			Трехслойные пластины		
	p_s , кПа	p_{ss} , кПа	p_y , кПа	p_s , кПа	p_{ss} , кПа	p_y , кПа
0	103,8	173,0	407,2	103,8	173,0	407,2
1	243,9	326,0	1270,0	361,4	471,1	2113,9
2	163,3	219,8	1025,0	207,0	275,8	1557,9
3	107,6	147,7	757,7	110,9	147,5	1117,5
4	130,2	178,1	604,6	148,5	197,9	820,0

Значения p_s , приведенные в табл. 2–4, характеризуются возникновением пластических деформаций в связующем на лицевых поверхностях ($z = \pm H/2$) в центральном сечении пластины $x_1 = l/2$ (табл. 2), на кромках $x_1 = 0, l$ (табл. 3) и в промежуточных сечениях $x_1 = x_*$, $x_1 = l - x_*$, $0 < x_* \leq l/2$ (табл. 4); при этом волокна бора имеют значительный (80-процентный и более) запас прочности. Значениям же p_{ss} соответствует появление вторичных пластических деформаций на лицевых поверхностях в связующем в указанных сечениях, а p_y характеризуются началом разрушения связующего в изотропных пластинах или упруго-хрупких борных волокон в армированных пластинах (в среднем сечении для шарнирно опертых пластин и на кромках — для защемленных).

Сравнение значений p_s , p_{ss} , p_y , соответствующих изотропным и армированным пластинам, показывает, что за счет армирования конструкции ее несущую способность при динамиче-

ском изгибе можно увеличить на десятки процентов и даже в разы. Сопоставление тех же значений для армированных пластин со структурами №№ 1 – 3 позволяет проследить за изменением несущей способности конструкции при изменении углов перекрестного армирования от $\psi_2 = -\psi_3 = 0$ (структура № 1) до $\psi_2 = -\psi_3 = \pi/4$ (структура № 3), откуда следует: варьирование структуры (направления) армирования приводит к существенному (в разы) изменению несущей способности пластины как при упругом, так и упругопластическом изгибах. Поэтому имеет смысл ставить задачи рационального и оптимального армирования тонкостенных конструкций по критериям предельного динамического состояния. Так, из всех рассматриваемых структур наилучшим является армирование в поперечном направлении (вдоль направления x_1 — структура № 1).

Из табл. 2 – 4 вытекает, что квазиизотропное армирование (структура № 4), часто встречающееся на практике, далеко не всегда обеспечивает высокую несущую способность конструкции при динамическом изгибе, а по критерию p_y является худшей из всех рассматриваемых структур армирования.

Сравнение значений p_s и p_{ss} показывает, что за счет предварительного нагружения до значений p_{ss} несущую способность изотропной пластины постоянной толщины при шарнирном опирании можно увеличить на 41,9 %, при защемлении — на 36,2 %, а изотропной пластины переменной толщины — на 66,7 %. Несущую же способность армированных пластин при таком нагружении можно увеличить на 30—37 % (без появления пластичности при повторных нагружениях с интенсивностью $0 < p_0 \leq p_{ss}$).

На рисунке изображены кривые, характеризующие колебания центрального сечения $x_1 = l/2$ шарнирно опертой трехслойной пластины постоянной толщины с поперечным армированием несущих слоев (см. структуру № 1 в табл. 2). Линия 1 соответствует

Упругие и упругопластические колебания точек центрального сечения прямоугольной удлиненной пластины

предельным упругим колебаниям конструкции и рассчитана при значении нагрузки $p_s = 235,4$ кПа; кривая 2 характеризует предельные упругопластические колебания до появления вторичной пластичности и получена при нагрузке $p_{ss} = 306,7$ кПа. Сравнение этих линий позволяет получить качественное и количественное представление о приспособляемости пластины при динамическом упругопластическом изгибе. (По оси ординат на рисунке отложен безразмерный прогиб $W = H_* w / (2l^2 \epsilon_{bl})$, где $\epsilon_{bl} = \sigma_{bl} / E_1 > 0$ — предельная упругая деформация борных волокон, σ_{bl}, E_1 — предел временного сопротивления и модуль упругости упруго-хрупких борных волокон, см. табл. 1.)

Из сопоставления в каждой табл. 2–4 значений p_s, p_{ss}, p_y для регулярно армированных по толщине и трехслойных пластин следует: за счет разнесения несущих армированных слоев при том же расходе фазовых материалов несущую способность конструкции при динамическом изгибе можно увеличить от нескольких процентов до 40—66 %.

Сравнение данных, приведенных в табл. 2 и 3, показывает, что при тех же структурах армирования и одинаковой толщине конструкций несущая способность защемленных пластин на 53—65 % больше, чем у шарнирно опертых. Это объясняется большей жесткостью защемленных пластин и развитием в них трех пластических зон — в окрестности защемленных кромок и в окрестности центрального сечения $x_1 = l/2$; в шарнирно опертых пластинах постоянной толщины развивается лишь одна пластическая зона в окрестности центрального сечения, что приводит к значительному снижению жесткости связующего в этом сечении и более глубокому проникновению пластических деформаций по толщине пластины.

Сопоставление данных из табл. 2 и 4 позволяет заключить: при одинаковых структурах армирования, расходах фазовых материалов и типах закрепления пластин за счет рационального профилирования (подбора толщины) несущую способность тонкостенной конструкции при динамическом изгибе можно увеличить на 45 – 75 %. Поэтому целесообразно осуществлять рациональное и оптимальное проектирование таких конструкций, отыскивая не только эффективные структуры армирования несущих слоев, но и эффективное распределение слоев в пластине и их толщин.

Отметим, что результаты расчетов, приведенные в табл. 2 – 4, получены в предположении о несжимаемости материала связующего (т.е. в упругих зонах коэффициент Пуассона связующего $\nu^{(m)}$ принимался равным 0,5, а не 0,325, как указано в табл. 1). Отказ от учета сжимаемости связующего в упругих зонах приводит к завышению значений p_s , p_y для изотропных пластин не более чем на 3 %, а для армированных пластин — к занижению p_s на 9 – 11 % и завышению p_y всего на 1 %, однако оказывает существенное влияние на определение величин p_{ss} . Как показано в [12], учет сжимаемости в пластической зоне связующего приводит к значительным техническим трудностям (в частности, не позволяет записать коэффициенты C_{1111} , D_{11} в равенстве (79) в явной форме), но при статическом упругопластическом изгибе практически не влияет на результаты расчетов армированных пластин. При учете же сжимаемости в упругой зоне и не учете ее в пластической зоне при переходе через границу от упругой зоны к пластической интенсивность деформаций при цилиндрическом изгибе испытывает скачок на 35 % в сторону увеличения [12]. Этот скачок приводит к искажению информации о накопленных пластических деформациях в связующем и, как следствие этого, о моменте появления вторичной (знакопеременной) пластичности: расчеты показали, что в этом случае для изотропных и армированных пластин всегда $p_{ss} = p_s$, т.е. как бы не наблюдается эффект приспособляемости конструкции. Отказ от учета сжимаемости материала связующего как в пластических, так и упругих зонах приводит к непрерывному распределению интенсивности деформаций в конструкции, что позволило отследить эффект приспособляемости пластин при динамическом нагружении ($p_{ss}/p_s = 1,3-1,7$). Значения p_{ss} , приведенные в табл. 2 – 4 для армированных пластин, по-видимому, занижены на несколько процентов (как и p_s) по сравнению со случаем учета сжимаемости связующего в упругих и пластических зонах.

Выше в качестве характерного периода T было выбрано время, за которое внешняя нагрузка (81) уменьшается по сравнению с начальным значением p_0 в 1000 раз. Если в качестве T выбрать время 100-кратного уменьшения нагрузки, то из (81) получим $T = 0,384$ с. Расчеты, выполненные при таком T , приводят к завышению на 3 – 5 % значений p_{ss} по сравнению с указанными в табл. 2 – 4. (На значения p_s , p_y выбор времени T не оказывает влияния, необходимо лишь, чтобы время T было больше времени начала полной первичной разгрузки и времени достижения центральным сечением максимального прогиба соответственно.) Если в качестве T выбрать время 20-кратного уменьшения нагрузки ($T = 0,250$ с), то рассчитанные значения p_{ss} будут на десятки процентов превосходить те, что указаны в табл. 2 – 4. Следовательно, при нагрузках взрывного типа (81) в качестве T вполне достаточно выбрать время 1000-кратного уменьшения внешней нагрузки. К концу этого времени колебания становятся установившимися.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 02-01-00115).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мазалов В.Н., Немировский Ю.В. Динамика тонкостенных пластических конструкций // Проблемы динамики упруго-пластических сред. Сер.: Новое в зарубежной науке. М.: Мир, 1975. Вып. 5. С. 155-247.
2. Комаров К.Л., Немировский Ю.В. Динамика жестко-пластических элементов конструкций. Новосибирск: Наука, 1984. 236 с.
3. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Интегрирование задачи динамического упругопластического изгиба армированных стержней переменного поперечного сечения обобщенными методами Рунге-Кутты // Вычислительные технологии. 2004. Т.9. № 4. С. 77-94.
4. Ананенко Л.А., Комаров К.Л. Динамика неупругих балок. Новосибирск: Наука, 1999. 151 с.
5. Галин М.П. Поперечные колебания балок и плит за пределом упругости под действием импульсных и ударных нагрузок // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 3. С. 42-50.

6. Кошур В.Д., Немировский Ю.В. Континуальные и дискретные модели динамического деформирования элементов конструкций. Новосибирск: Наука, 1990. 200 с.
7. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1968. 400 с.
8. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. школа, 1969. 608с.
9. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.
10. Композиционные материалы. Справочник. Киев: Наук. думка, 1985. 592 с.
11. Немировский Ю.В. Об упруго-пластическом поведении армированного слоя // Прикладная механика и техническая физика. 1969. № 6. С. 81-89.
12. Янковский А.П. Влияние учета сжимаемости материала на упругопластический изгиб пластин // Труды НГАСУ. 2003. Т. 6. № 6. С. 81-97.
13. Москвитин В.В. Циклические нагружения элементов конструкций. М.: Наука, 1981. 344 с.
14. Немировский Ю.В., Янковский А.П. О некоторых особенностях уравнений оболочек, армированных волокнами постоянного поперечного сечения // Механика композитных материалов и конструкций. 1997. Т. 3. № 2. С. 20- 40.
15. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука, 1966. 260 с.
16. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Численное интегрирование двумерных краевых задач с большими градиентами решения // Вычислительные технологии. 2000. Т. 5. № 4. С. 82-96.
17. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Рациональное проектирование армированных конструкций. Новосибирск: Наука, 2002. 488 с.
18. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 334 с.
19. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М., Л.: ГИТТЛ. 1947. 355 с.
20. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Численное интегрирование динамических задач теории оболочек методами Рунге–Кутты // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. 16-й Межресп. конф., Новосибирск, 6-8 июля 1999 г. / Под ред. В.М. Фомина. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. С. 117-124.
21. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.

Поступила 24.06.2004 г.