Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Федотов, Л. Ф. Спевак, В. Б. Трухин, В. В. Привалова, Т. Д. Думшева, Е. С. Зенкова, Исследование сходимости численно-аналитического метода решения задач упругости, теплопроводности и диффузии, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 30, 55–62

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu307>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 14:40:25

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРУГОСТИ, ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ДИФФУЗИИ

На примере задач теории упругости и теплопроводности (диффузии) предлагается подход, основанный на методе граничных элементов, позволяющий ввести распараллеливание на уровне алгоритма и существенную долю расчетов провести аналитически. Проведен анализ эффективности счета по предложенному алгоритму. На примерах двух задач исследована сходимость метода с увеличением числа элементов.

Для решения практических задач математической физики (теплопроводности, диффузии, упругости, пластичности и т.п.), как правило, используются приближенные методы расчета, основанные на алгоритмах и программистской технологии последовательного счета. В последнее время наблюдается прогресс в распараллеливании программ для решения таких задач, однако, они по-прежнему основываются на алгоритмах, разработанных в свое время для последовательного счета (метод разностей, метод конечных элементов, вариационные методы и т.д.). Разработка алгоритмов, в которых изначально была бы заложена идеология распараллеливания, может существенно сократить время решения реальных задач. Вторым резервом для роста быстродействия может быть увеличение аналитической части предварительных расчетов в рассматриваемой задаче. Предлагаемый численно-аналитический метод, основанный на методе граничных элементов, сочетает в себе эти качества и представляется эффективным средством решения задач математической физики.

Несмотря на то, что в работе рассмотрены достаточно простые (линейные) задачи, предложенный метод нацелен, прежде всего, на решение нелинейных задач математической физики, которое можно организовать как последовательность решения линейных. Поэтому разработка быстрого и высокоточного алгоритма решения линейных задач создает базу для решения гораздо более широкого класса проблем.

1. Алгоритм решения упругой задачи. Описание численно-аналитического метода решения, основанного на методе граничных элементов, начнем с задачи теории упругости. Рассмотрим плоскую упругую область произвольной формы, на границе которой заданы некоторые нагрузки или перемещения. Задачей является нахождение вектора перемещений u_i , тензора деформаций ε_{ij} и тензора напряжений σ_{ij} , которые удовлетворяют в области системе уравнений:

$$\sigma_{ij,i} = b_j; \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = (u_{j,i} + u_{i,j})/2; \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\delta_{ij} \quad (3)$$

и заданным граничным условиям:

$$\text{на поверхности } S_f: \quad \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 = f_1 = f_1^*, \quad \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 = f_2 = f_2^*;$$

$$\text{на поверхности } S_u: \quad u_1 = u_1^*, \quad u_2 = u_2^*. \quad (4)$$

Здесь b_i – известные объемные силы, $\sigma_{ij,i} = \partial\sigma_{1j}/\partial x_1 + \partial\sigma_{2j}/\partial x_2$, здесь и далее по повторяющемуся индексу производится суммирование от 1 до 2, $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$, μ – модуль упругости при сдвиге, ν – коэффициент Пуассона, δ_{ij} – единичный тензор, n_i – вектор нормали к поверхности. Обратная к (3) зависимость будет иметь вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \delta_{ij} \right). \quad (5)$$

Согласно методу граничных элементов [1, 2] решение системы (1) – (4) можно выразить через поверхностные перемещения $u_i(x)$ и поверхностные напряжения $f_i(x)$. Для вектора перемещений в любой внутренней точке можно записать

$$u_i(\xi) = \int_{S_f} [u_{ij}^*(\xi, x) f_j^*(x) - f_{ij}^*(\xi, x) u_j(x)] ds + \int_{S_u} [u_{ij}^*(\xi, x) f_j(x) - f_{ij}^*(\xi, x) u_j^*(x)] ds. \quad (6)$$

Здесь $x \in S$ – граничная точка области, ξ – внутренняя точка области, звездочкой (*) обозначены известные из граничных условий для группы поверхностей S_u перемещения $u_j^*(x)$ и для группы поверхностей S_f поверхностные напряжения $f_j^*(x)$. Функции $u_{ij}^*(\xi, x)$ (тензор Грина) и $f_{ij}^*(\xi, x)$ для двумерной задачи имеют вид:

$$u_{ij}^*(\xi, x) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)\mu} [(3-4\nu)\ln(r)\delta_{ij} - \Delta_i r \Delta_j r],$$

$$f_{ij}^*(\xi, x) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2\Delta_i r \Delta_j r] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(\Delta_i r n_j - \Delta_j r n_i) \right\},$$

где $r = r(x, \xi)$ – расстояние между x и ξ , $\Delta_i r = \frac{\partial r}{\partial x_i}$.

Поскольку граничные точки также принадлежат области, то уравнение, аналогичное выражению (6) может быть составлено для всех граничных точек. Для произвольной точки поверхности x_0 граничное интегральное уравнение имеет вид

$$\frac{1}{2} u_i(x_0) = \int_{S_f} [u_{ij}^*(x_0, x) f_j^*(x) - f_{ij}^*(x_0, x) u_j(x)] ds + \int_{S_u} [u_{ij}^*(x_0, x) f_j(x) - f_{ij}^*(x_0, x) u_j^*(x)] ds \quad (7)$$

и используется для определения неизвестных поверхностных перемещений $u_j(x)$ и поверхностных напряжений $f_j(x)$. Таким образом, можно интерпретировать изучаемый процесс как результат влияния приложенных к границе перемещений или поверхностных напряжений на точки, лежащие либо во внутренней области фигуры, либо на границе области.

Разбив границу области на элементы (рис. 1), мы приходим к численной схеме, в основе

Р и с. 1. Область произвольной геометрии и влияние элемента на точку

которой лежит участок граничного элемента (отрезок прямой либо дуга окружности) и произвольная точка, на которую оказывают влияние напряжения и перемещения, действующие на этом элементе. Если сделать разбиение поверхности деформируемой области доста-

точно мелким, то все поверхностные перемещения и напряжения, включая неизвестные, можно считать постоянными в рамках отрезков и помещенными в середину элемента. В этом приближении, записав уравнение (7) для середины каждого граничного элемента, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_i^{(\beta)} = & \sum_{\alpha=1}^N f_j^{(\alpha)*} \int_{S_f^{(\alpha)}} u_{ij}^*(x^{(\beta)}, x) ds - \sum_{\alpha=1}^N u_j^{(\alpha)} \int_{S_f^{(\alpha)}} f_{ij}^*(x^{(\beta)}, x) ds + \\ & + \sum_{\alpha=N+1}^{N+M} f_j^{(\alpha)} \int_{S_u^{(\alpha)}} u_{ij}^*(x^{(\beta)}, x) ds - \sum_{\alpha=N+1}^{N+M} u_j^{(\alpha)*} \int_{S_u^{(\alpha)}} f_{ij}^*(x^{(\beta)}, x) ds, \quad i = 1, 2, \beta = 1 \dots M + N. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь M и N – количество элементов на каждой из групп поверхностей. Соотношения (8) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно $u_j^{(\alpha)}$ и $f_j^{(\alpha)}$. Интегралы $\int_{S_u^{(\alpha)}} u_{ij}^*(x_0, x) ds$ и $\int_{S_u^{(\alpha)}} f_{ij}^*(x_0, x) ds$ вычисляются аналитически и образуют компоненты матрицы и свободного вектора системы. Отметим, что все интегралы для основного блока численной схемы вычисляются независимо, что позволяет использовать быстроразвивающиеся технологии параллельных вычислений на высокопроизводительных вычислительных комплексах.

Интегралы от компонентов функций u_{ij}^* и f_{ij}^* вдоль граничных элементов, являющихся отрезками прямой, были вычислены аналитически. Начало отрезка обозначено точкой $a(a_1, a_2)$, конец отрезка – точкой $b(b_1, b_2)$. Отрезок ориентирован таким образом, что при движении от a к b исследуемая область находится слева, то есть граница области обходится против часовой стрелки. Результаты вычислений выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}\int_a^b u_{11}^*(\xi, x) dS(x) &= c_1 \left(c_2 (d_1 Q_1 + d_2 (b_1 Q_2 - a_1 Q_3) + d_3 Q_4 - d) + d_4 Q_1 + d_5 Q_4 - \frac{\delta_1^2}{d} \right), \\ \int_a^b u_{12}^*(\xi, x) dS(x) &= c_1 \left(\frac{d_5 Q_1}{2} - 2d_4 Q_4 - \frac{\delta_2 \delta_1}{d} \right), \\ \int_a^b u_{22}^*(\xi, x) dS(x) &= c_1 \left(c_2 (d_1 Q_1 + d_2 (b_1 Q_2 - a_1 Q_3) + d_3 Q_4 - d) - d_4 Q_1 - d_5 Q_4 - \frac{\delta_1^2}{d} \right), \\ \int_a^b f_{11}^*(\xi, x) dS(x) &= c_3 (c_4 (Q_4 + 1) - d_6), \\ \int_a^b f_{12}^*(\xi, x) dS(x) &= c_3 \left(\frac{c_4 Q_1}{2} + d_7 \right), \\ \int_a^b f_{21}^*(\xi, x) dS(x) &= c_3 \left(-\frac{c_4 Q_1}{2} + d_7 \right), \\ \int_a^b f_{11}^*(\xi, x) dS(x) &= c_3 (c_4 (Q_4 + 1) + d_6).\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}c_1 &= -\frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}, \quad c_2 = 3 - 4\nu; \quad c_3 = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)}, \quad c_4 = 1 - 2\nu; \\ d_1 &= \frac{-\xi_2 \delta_2 \delta_1 - \xi_1 \delta_1^2 + \delta_2 \delta_7}{2d\delta_1}, \quad d_2 = \frac{d}{2\delta_1}, \quad d_3 = \frac{\delta_2 \delta_3 - \delta_1 \delta_4}{d}, \quad d_4 = -\frac{\delta_1 \delta_2 (\delta_2 \delta_3 - \delta_1 \delta_4)}{d^3}, \\ d_5 &= \frac{(\delta_1^2 - \delta_2^2)(\delta_2 \delta_3 - \delta_1 \delta_4)}{d^3}, \quad d_6 = \frac{\delta_3 \delta_4}{\delta_3^2 + \delta_4^2} - \frac{\delta_5 \delta_6}{\delta_5^2 + \delta_6^2}, \quad d_7 = \frac{\delta_6^2}{\delta_5^2 + \delta_6^2} - \frac{\delta_4^2}{\delta_3^2 + \delta_4^2}, \quad d = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}; \\ Q_1 &= \ln(\delta_1^2 (\delta_5^2 + \delta_6^2)) - \ln(\delta_1^2 (\delta_3^2 + \delta_4^2)), \quad Q_2 = \ln(\delta_5^2 + \delta_6^2), \quad Q_3 = \ln(\delta_3^2 + \delta_4^2), \\ Q_4 &= \arctg\left(\frac{\delta_1 \delta_3 + \delta_2 \delta_4}{\delta_1 \delta_4 - \delta_2 \delta_3}\right) - \arctg\left(\frac{\delta_1 \delta_5 + \delta_2 \delta_6}{\delta_1 \delta_6 - \delta_2 \delta_3}\right);\end{aligned}$$

$$\delta_1 = b_1 - a_1, \quad \delta_2 = b_2 - a_2, \quad \delta_3 = a_1 - \xi_1, \quad \delta_4 = a_2 - \xi_2, \quad \delta_5 = b_1 - \xi_1, \quad \delta_6 = b_2 - \xi_2, \quad \delta_7 = a_2 b_1 - a_1 b_2. \quad (9)$$

Отметим, что приведенные формулы справедливы для произвольно ориентированного отрезка, а значит, могут быть использованы для описания плоской области любой геометрии.

Аналогичные формулы были получены для элемента, являющегося произвольно ориентированной дугой окружности.

После решения системы и получения значений $u_j^{(\alpha)}$ и $f_j^{(\alpha)}$, перемещение в любой точке внутренней области вычисляется по формуле (6). Деформации определяются по формуле

$$\varepsilon_{ij}(\xi) = \int_{S_{u,f}} [w_{ijk}^*(\xi, x) f_k(x) - g_{ijk}^*(\xi, x) u_k(x)] ds, \quad (10)$$

полученной из (6) путем дифференцирования, в силу (2). Здесь

$$w_{ijk}^*(\xi, x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{ik}^*}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_{jk}^*}{\partial \xi_i} \right), \quad g_{ijk}^*(\xi, x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_{ik}^*}{\partial \xi_j} + \frac{\partial f_{jk}^*}{\partial \xi_i} \right).$$

Интегралы по произвольному отрезку прямой от компонент w_{ijk}^* и g_{ijk}^* также вычислены аналитически, причем результаты интегрирования выражаются через те же величины (9).

Определив деформации $\varepsilon_{ij}(\xi)$ из (10), напряжения $\sigma_{ij}(\xi)$ можно вычислить по формуле (3).

Формулы (6), (10) и (3) справедливы для любой внутренней точки области, причем вычисление перемещений, деформаций и напряжений в одной точке не зависит от вычисления этих же величин в других точках, поэтому уровень распараллеливания для вычисления напряженно-деформированного состояния зависит только от количества процессоров.

2. Решение задач теплопроводности и диффузии. Еще одной областью применения предложенного алгоритма являются задачи теплопроводности и диффузии, которые описываются одинаковыми уравнениями. Рассмотрим вновь некоторую двумерную область, граница которой разбита на элементы (рис. 1). Задача состоит в определении температуры (концентрации) ϑ , которая удовлетворяет в области уравнению (для простоты изложения будем считать, что область не содержит источников)

$$k\Delta\vartheta = 0 \quad (11)$$

и граничным условиям:

$$\begin{aligned} \text{на поверхности } S_1: \quad \vartheta &= \vartheta^*; \\ \text{на поверхности } S_2: \quad q &= -k \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} n_i = q^*. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь k – коэффициент теплопроводности (диффузии), $\Delta\vartheta = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_2^2}$ – оператор Лапласа.

Согласно методу граничных элементов [1,2], решение задачи (11), (12) можно выразить через заданные на границе значения температуры $\vartheta(x)$ и потока $q(x)$, аналогично (6):

$$\vartheta(\xi) = \int_{S_1} [F(\xi, x) \vartheta^*(x) - G(\xi, x) q(x)] ds + \int_{S_2} [F(\xi, x) \vartheta(x) - G(\xi, x) q^*(x)] ds. \quad (13)$$

Функции $G(\xi, x)$ и $F(\xi, x)$ имеют вид:

$$G(\xi, x) = -\frac{1}{2\pi k} \ln(r), \quad F(\xi, x) = \frac{1}{2\pi r^2} (x_i - \xi_i) n_i.$$

Считая вновь значения температуры и потока постоянными на каждом граничном элементе и помещенными в точку середины элемента, запишем уравнение (13) для середины каждого элемента:

$$\begin{aligned} \vartheta^{(\beta)} &= \sum_{\alpha=1}^N \vartheta^{(\alpha)*} \int_{S_1^{(\alpha)}} F(x^{(\beta)}, x) ds - \sum_{\alpha=1}^N q^{(\alpha)} \int_{S_1^{(\alpha)}} G(x^{(\beta)}, x) ds + \\ &+ \sum_{\alpha=N+1}^{N+M} \vartheta^{(\alpha)} \int_{S_2^{(\alpha)}} F(x^{(\beta)}, x) ds - \sum_{\alpha=1}^N q^{(\alpha)*} \int_{S_2^{(\alpha)}} G(x^{(\beta)}, x) ds, \quad \beta = 1 \dots M + N. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь M и N – количество элементов на каждой из групп поверхностей. Соотношения (14) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно $\vartheta^{(\alpha)}$ и $q^{(\alpha)}$.

Интегралы $\int_{S_1^{(\alpha)}} F(\xi, x) dS(x)$ и $\int_{S_1^{(\alpha)}} G(\xi, x) dS(x)$ суть слагаемые в уже вычисленных аналитически

интегралах от компонент тензора Грина, соответствующих упругой задаче:

$$\int_a^b G(\xi, x) dS(x) = -\frac{d_1 Q_1 + d_2 (b_1 Q_2 - a_1 Q_3) + d_3 Q_4 - d}{2\pi k}, \quad \int_a^b F(\xi, x) dS(x) = \frac{Q_4}{2\pi}.$$

3. Анализ эффективности счета задачи при замене численного интегрирования функций Грина аналитическим интегрированием. Разработанный алгоритм решения упругой и тепловой задач позволяет благодаря большому объему предварительных аналитических вычислений сократить время решения задач (а значит, увеличить число граничных элементов, на которые разбивается граница), а также повысить точность расчетов. Алгоритм позволяет распараллеливать задачу определения перемещений и тензоров напряжений и деформаций (температуры и потока тепла) за счет использования процедуры распараллеливания на трех уровнях решения данной проблемы. Во-первых, элементы матрицы системы линейных уравнений вычисляются независимо друг от друга, что позволяет расширить количество используемых процессоров до количества элементов матрицы. Во-вторых, решение системы алгебраических уравнений и нахождение искомых поверхностных напряжений и перемещений осуществляется методом Гаусса – Жордана, допускающим распараллеливание. В-третьих, компоненты перемещений и тензоров напряжений и деформаций (или значения температуры) для произвольной точки внутренней области также рассчитываются независимо, что позволяет проводить распарал-

ливание задачи на достаточно большое количество процессоров, без больших затрат на обмен информацией между ними [3, 4]. Для проверки эффективности перехода от численного интегрирования к аналитическому был проведен расчет для задач деформирования различных двумерных областей. Собственно результаты решения никакой смысловой нагрузки не несут, поэтому здесь приводится лишь анализ скорости счета. Расчеты производились на вычислительных комплексах МВС-100 и МВС-1000.

Результаты расчетов показали, что если при приближенном интегрировании возникала ошибка в вычислении, особенно при расчете тензоров деформаций (до 10%), которую не удавалось понизить уменьшением шага интегрирования, то при счете по аналитическим формулам ошибка в вычислении перемещений, тензоров деформаций и напряжений вообще исчезала. Кроме того, получен колоссальный выигрыш во времени при вычислении перемещений и напряжений на границе области – до 3 тысяч раз, а при вычислении перемещений, деформаций и напряжений внутри области – в среднем до 600 раз.

Время решения упругой задачи складывается из 3 частей: t_1 – время вычисления интегралов от компонентов функций Грина для граничных точек, t_2 – время решения системы линейных алгебраических уравнений порядка $M \times k$, где k – число точек разбиения на каждой из M частей границы области, t_3 – время вычисления интегралов от функций Грина и их производных для внутренних точек области на сетке $KK \times KK$. При замене приближенного интегрирования функций Грина на аналитические значения t_1 и t_3 значительно сокращаются, что отражено в таблице. Здесь n/p – отношение порядка системы к числу используемых процессоров, t_1^i, t_3^i – время численного интегрирования функций Грина на этапах 1 и 3, t_1^a, t_3^a – время вычисления интегралов от функций Грина по аналитическим формулам на этапах 1 и 3, k_1^y, k_3^y – соответствующие коэффициенты ускорения.

Ускорение счета при аналитическом интегрировании

n/p	k, KK	t_1^i, c	t_1^a, c	k_1^y	t_3^i, c	t_3^a, c	k_3^y
1	200; 4	4737	1.472	3218	418	0.220	1900
2	200; 4	2370	0.736	3220	224	0.218	1027
4	200; 4	1210	0.367	3297	108	0.246	440
8	200; 4	614	0.221	2778	59	0.328	180
16	200; 4	297	0.117	2538	29	0.393	74
32	200; 4	148	0.112	1325	16	2.047	7.8
2	500; 10	15157	5.0	3031	3292	0.815	4039
4	500; 10	7491	2.4	3121	1657	0.739	2242
8	500; 10	3746	1.2	3121	829	0.708	1171
16	500; 10	1874	0.6	3123	433	0.844	513

4. Исследование сходимости метода. Большое значение для оценки эффективности метода наряду с точностью и скоростью реализации является сходимость численного решения к точному с увеличением числа элементов, на которые разбивается граница области. С целью проверки такой сходимости предложенным методом были решены две задачи с известными аналитическими решениями.

Первая из рассмотренных задач – стационарная тепловая задача для круговой области при заданных на границе значениях температуры:

$$k\Delta\vartheta = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq r < R;$$

$$\vartheta = 1 + \sin \varphi + \frac{1}{2} \sin 3\varphi + \cos 4\varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad r = R.$$

Аналитическое решение такой задачи выглядит следующим образом:

$$\vartheta = 1 + r \sin \varphi + \frac{r^3}{2} \sin 3\varphi + r^4 \cos 4\varphi.$$

Для приближенного решения граница области – окружность с центром в начале координат и радиусом R аппроксимировалась ломаной из n отрезков прямой одинаковой длины, вершины которой лежат на окружности.

Расчеты были произведены при $R = 1$. На рис. 2 показаны значения температуры внутри области, соответствующие численным решениям при $n = 8$ (а), $n = 16$ (б), $n = 32$ (в), а также аналитическому решению (г). На рис. 3 сравниваются значения температуры для этих четырех решений при $r = 0.5$ (а), $r = 0.9$ (б), $r = 0.99$ (в). По рисункам видно, что с увеличением числа граничных элементов численное решение достаточно быстро сходится к точному. При этом нет необходимости в очень мелком разбиении. График решения при $n = 32$ практически сливается с графиком точного решения, немного отличаясь лишь вблизи границы. Даже при $n = 16$ отклонение приближенного решения от точного существенно лишь при приближении к границе области, что естественно при гранично-элементном представлении.

Р и с. 2. Температура внутри круговой области для разных разбиений

Р и с. 3. Сравнение численных и аналитического решений тепловой задачи при различных r :
а - $r = 0.5$; б - $r = 0.9$; в - $r = 0.99$; 1 - $n = 8$, 2 - $n = 16$, 3 - $n = 32$, 4 - аналитическое решение

Рассмотрим теперь задачу о плоском напряженном состоянии кругового кольца при осесимметричном нагружении (рис. 4). Граничные условия имеют следующий вид:

$$\sigma_{rr} = -P_1, r = r_1; \sigma_{rr} = -P_2, r = r_2.$$

Аналитическое решение для радиального перемещения выглядит так:

$$u_r = \frac{1}{E} \left[-(1+\nu) \frac{(P_2 - P_1)r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r} + (1-\nu) \frac{P_1 r_1^2 - P_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} r \right].$$

В приближенном решении каждая из граничных окружностей приближалась ломаной из n отрезков, аналогично предыдущей задаче.

Расчеты были произведены при следующих значениях параметров: $E = 210000$, $\nu = 0.3$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $P_1 = 100$, $P_2 = 200$. На рис. 5 показаны значения компонентов вектора перемещения внутри области, соответствующие численным решениям при $n = 10$ (а), $n = 20$ (б) и аналитическому решению (в). Из рис. 5 видно, что решение внутри области даже при малом числе граничных элементов получается гладким, и лишь при приближении к границе возникают существенные погрешности. На рис. 6 показано сравнение компонентов вектора перемещения для трех полученных решений при $r = 1.5$. Сравнение показывает отсутствие качественных различий численного и аналитического решений, а относительное количественное расхождение является следствием крупного разбиения.

Закключение. Разработанный параллельный алгоритм решения задач на основе метода граничных элементов позволяет быстро и с высокой точностью решать задачи с большим числом граничных элементов. В то же время, приведенные результаты решения тестовых задач дают основания полагать, что подчас нет необходимости слишком мелкого разбиения. В этом случае расчет на высокопроизводительном многопроцессорном комплексе типа МВС-1000 может быть произведен в режиме реального времени, что позволит использовать предложенный алгоритм для мониторинга прочностных свойств конструкций.

Р и с. 4. Осесимметричное нагружение кольца

Р и с. 5. Перемещения внутри кольца при осесимметричном нагружении

Р и с. 6. Сравнение численных и аналитического решений задачи о нагружении кольца:
1 – $n = 10$, 2 – $n = 20$, 3 – аналитическое решение

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C.* Boundary Element Techniques. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New-York Tokyo, 1984. 524 p.
2. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1984, 494 с.
3. *Гасилов В.Л., Думиева Е.С., Зенкова Е.С., Федотов В.П.* Численное моделирование упругой задачи на много-процессорных вычислительных системах // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. Екатеринбург: УрО РАН. Вып. 6. 2002. С. 104–124.
4. *Думиева Е.С., Зенкова Е.С., Федотов В.П., Спевак Л.Ф., Привалова В.В.* Численно-аналитический алгоритм для решения задач упругости, теплопроводности, диффузии // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. Екатеринбург: УрО РАН. Вып. 7. 2003. С. 70–86.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №04-01-00274.

Поступила 28.05.2004 г.