Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Кожанов, О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 30, 63–69

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu308>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 16:38:28

Дифференциальные уравнения

УДК 517.9

А.И. Кожанов

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Исследуется разрешимость начально-краевой задачи для линейных параболических уравнений с заданием на боковой границе условия, связывающего значения решения со значениями некоторого линейного оператора от него. Доказывается существование и единственность регулярного решения.

Задача, исследуемая в настоящей работе, относится к числу нелокальных краевых задач; по своей постановке она представляет собой обобщение некоторых задач с интегральными краевыми условиями. Отметим, что задачи с интегральными условиями активно изучаются в последнее время, но при этом рассматривается в основном лишь одномерный по пространственным переменным случай — см. работы [1–9]. В многомерном же случае можно отметить лишь работу [10], в которой рассматривалась краевая задача с граничным условием

$$u(x, t)|_{(x, t) \in \partial\Omega \times (0, T)} = \int_{\Omega} K(x, y, t) u(y, t) dy|_{(x, t) \in \partial\Omega \times (0, T)} \quad (*)$$

(Ω — область изменения пространственных переменных, $(0, T)$ — интервал изменения временной переменной) и в которой изучались лишь свойства решений.

Перейдем к содержательной части работы.

Пусть Ω есть ограниченная область пространства R^n с гладкой (для простоты бесконечно- дифференцируемой) границей Γ , Q есть цилиндр $\Omega \times (0, T)$ ($0 < T < +\infty$), $S = \Gamma \times (0, T)$ есть его боковая граница, $a^{ij}(x, t)$, $a^i(x, t)$, $a(x, t)$ и $f(x, t)$ — заданные в цилиндре $\bar{Q}$ функции, $u_0(x)$ — заданная на множестве $\bar{\Omega}$ функция, A — линейный оператор, ставящий в соответствие функции $v(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$ функцию $A(x, t, v)$, принадлежащую пространству $L_2(S)$.

Краевая задача: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$Lu \equiv u_t - a^{ij}(x, t) u_{x_i x_j} + a^i(x, t) u_{x_i} + a(x, t) u = f(x, t) \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, t)|_S = A(x, t, u)|_S, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (3)$$

Уточним, что здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до n .

Пусть V_1 и V_2 суть следующие пространства:

$$V_1 = \{v(x, t) : v(x, t) \in L_{\infty}(0, T; W_2^2(\Omega)), v_t(x, t) \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega))\},$$

$$V_2 = \{v(x, t) : v(x, t) \in L_{\infty}(0, T; W_2^2(\Omega)), v_t(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega))\};$$

нормы в этих пространствах определим равенствами

$$\|v\|_{V_1} = \|v\|_{L_{\infty}(0, T; W_2^2(\Omega))} + \|v_t\|_{L_2(0, T; W_2^1(\Omega))},$$

$$\|v\|_{V_2} = \|v\|_{L_{\infty}(0, T; W_2^2(\Omega))} + \|v_t\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega))}.$$

Далее, обозначим через B оператор $I-A$. Через Q_t будем обозначать цилиндр $\Omega \times (0, t)$.

Теорема 1. Пусть оператор A определен как оператор, переводящий пространство $L_2(Q)$ в себя, и при этом пусть B является взаимно-однозначным ограниченным оператором из пространства $L_2(Q)$ на себя. Далее, пусть выполняются условия

$$a^{ij}(x, t) \in C^2(\bar{Q}), a^i(x, t) \in C^1(\bar{Q}), a(x, t) \in C(\bar{Q}), a^{ij}(x, t) = a^{ji}(x, t), (x, t) \in \bar{Q},$$

$$i, j = 1, \dots, n; \quad (4)$$

$$a^{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq k_0 |\xi|^2, k_0 > 0, (x, t) \in \bar{Q}, \xi \in R^n; \quad (5)$$

$$a(x, t) \geq a_0 > 0, (x, t) \in \bar{Q}; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A(x, t, v) &= A(x, t, v_t) + A_1(x, t, v), \quad \|A(x, t, v)\|_{L_2(Q_t)} + \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} A(x, t, v) \right\|_{L_2(Q_t)} + \\ &+ \left\| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} A(x, t, v) \right\|_{L_2(Q_t)} + \|A_1(x, t, v)\|_{L_2(Q_t)} + \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} A_1(x, t, v) \right\|_{L_2(Q_t)} + \\ &+ \left\| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} A_1(x, t, v) \right\|_{L_2(Q_t)} \leq a_1 \|v\|_{L_2(Q_t)}, a_1 \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (x, t) \in \bar{Q}, \quad v \in V_1, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\|A(x, t, \varphi v_{x_i})\|_{L_2(Q_t)} \leq a_2 \|v\|_{L_2(0, t; W_2^1(\Omega))}, \quad a_2 \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\varphi \in C^1(\bar{Q}), \quad (x, t) \in \bar{Q}, \quad v \in V_1; \quad (8)$$

если последовательность $\{v_m(x, t)\}$ слабо сходится в пространстве $W_2^1(Q)$ к функции $v(x, t)$, то имеет место слабая в пространстве $L_2(Q)$ сходимости $A(x, t, \varphi v_{mx_i}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} A(x, t, \varphi v_{x_i})$, $i = 1, \dots, n$, для любой функции $\varphi(x, t)$ из пространства $C^1(\bar{Q})$. (9)

Тогда для любых функций $f(x, t)$ и $u_0(x)$ таких, что $f(x, t) \in L_2(Q)$, $f_t(x, t) \in L_2(Q)$, $u_0(x) \in W_2^2(\Omega)$, $u_0(x) - A(x, 0, u_0) = 0$ при $x \in \Gamma$, краевая задача (1)–(3) имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству V_1 , и это решение единственно.

Доказательство. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \Phi(x, t, v) &= A_1(x, t, v) - a^{ij}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} A(x, t, v) + a^i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} A(x, t, v) + a(x, t) A(x, t, v) + \\ &+ A(x, t, a^{ij} v_{x_i x_j}) - A(x, t, a^i v_{x_i}) - A(x, t, av), \quad L_B v = LBv + \Phi(x, t, v). \end{aligned}$$

Пусть $g(x, t)$ есть заданная функция из пространства $L_2(Q)$. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$L_B u = g(x, t) \quad (10)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$Bu|_S = 0, \quad Bu|_{t=0} = B(x, 0, u_0), \quad x \in \Omega. \quad (11)$$

Докажем, что при выполнении условий (4)–(9) данная краевая задача имеет решение $u(x, t)$ такое, что $u(x, t) \in V_1$, $Bu(x, t) \in V_1$ для любой функции $g(x, t)$, принадлежащей вместе с производной $g_t(x, t)$ пространству $L_2(Q)$, и для любой функции $u_0(x)$, принадлежащей пространству $W_2^2(\Omega)$ и удовлетворяющей условию согласования $u_0(x) - A(x, 0, u_0) = 0$ при $x \in \Gamma$. Воспользуемся методом регуляризации и методом продолжения по параметру. Именно, для чисел λ и ε , $\lambda \in [0, 1]$, $\varepsilon > 0$, определим семейство операторов $\{L_{B, \varepsilon, \lambda}\}$: $L_{B, \varepsilon, \lambda} u = LBu + \lambda \Phi(x, t, u) - \varepsilon a^{ij}(x, t) (Bu)_{x_i x_j t}$.

Рассмотрим краевую задачу: найти решение уравнения

$$L_{B, \varepsilon, \lambda} u = g(x, t), \quad (10_{\varepsilon, \lambda})$$

для которого выполняются условия (11).

Прежде всего покажем, что краевая задача $(10_{\varepsilon, \lambda})$, (11) имеет решение $u(x, t)$ такое, что $u(x, t) \in V_2$, $Bu(x, t) \in V_2$ для любого фиксированного значения числа ε и для всех чисел λ из

отрезка $[0, 1]$ при принадлежности функции $g(x, t)$ лишь пространству $L_2(Q)$. Обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0, 1]$, для которых краевая задача $(10_{\varepsilon, \lambda})$, (11) разрешима в классе функций $\{v : v \in V_2, Bv \in V_2\}$ для любых функций $g(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$ и $u_0(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы. Если мы докажем, что это множество не пусто, открыто и замкнуто, то оно, как известно, будет совпадать со всем отрезком $[0, 1]$.

Краевая задача $(10_{\varepsilon, 0})$, (11) представляет собой первую начально-краевую задачу относительно функции $w = Bu$ для линейного псевдопараболического уравнения третьего порядка. Заметим, что при принадлежности функции $u_0(x)$ пространству $W_2^2(\Omega)$ функция $B(x, 0, u_0)$ также будет принадлежать тому же пространству — это следует из условия (7). Принадлежность начальной функции пространству $W_2^2(\Omega)$, функции $g(x, t)$ пространству $L_2(Q)$ и условия (4)–(6) гарантируют нам разрешимость данной задачи в пространстве V_2 [11, 12]. Далее, из условия взаимной однозначности оператора B и вновь из условия (7) вытекает, что функция $u(x, t)$ однозначно находится как решение уравнения

$$Bu = w$$

и что она будет принадлежать пространству V_2 . Следовательно, число 0 является элементом множества Λ — то есть множество Λ не пусто.

Доказательство открытости и замкнутости множества Λ проводится с помощью априорной оценки решений краевой задачи $(10_{\varepsilon, \lambda})$, (11) в пространстве V_2 .

Анализируя последовательно равенства

$$\int_0^t \int_{\Omega} L_{B, \varepsilon, \lambda} u \cdot w dx d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} g \cdot w dx d\tau, \quad (12)$$

$$\int_0^t \int_{\Omega} L_{B, \varepsilon, \lambda} u \cdot w_{\tau} dx d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} g \cdot w_{\tau} dx d\tau, \quad (13)$$

$$\int_0^t \int_{\Omega} L_{B, \varepsilon, \lambda} u \cdot a^{ij} w_{x_i x_j} dx d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} g \cdot a^{ij} w_{x_i x_j} dx d\tau, \quad (14)$$

$$\int_0^t \int_{\Omega} L_{B, \varepsilon, \lambda} u \cdot (a^{ij} w_{x_i x_j})_{\tau} dx d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} g \cdot (a^{ij} w_{x_i x_j})_{\tau} dx d\tau \quad (15)$$

и используя при этом условия (4)–(8), неравенство Юнга и второе основное неравенство для эллиптических операторов [13], получим, что для решений рассматриваемой краевой задачи будет выполняться неравенство

$$\|w\|_{V_2}^2 \leq K_1 [\|g\|_{L_2(Q)}^2 + \|B(x, 0, u_0)\|_{W_2^2(\Omega)}^2 + \|w\|_{L_2(0, t; W_2^2(\Omega))}^2 + \|u\|_{L_2(0, t; W_2^2(\Omega))}^2],$$

в котором постоянная K_1 зависит лишь от области Ω , коэффициентов оператора L и от чисел a_1, a_2 и ε . Вновь вследствие условия (7) от данного неравенства можно перейти к неравенству

$$\|w\|_{V_2}^2 \leq K_2 [\|g\|_{L_2(Q)}^2 + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}^2 + \|w\|_{L_2(0, t; W_2^2(\Omega))}^2];$$

используя же далее лемму Гронуолла, мы получим, что для функции $w(x, t)$ имеет место априорная оценка

$$\|w\|_{V_2} \leq K_0 [\|g\|_{L_2(Q)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}] \quad (16)$$

с постоянной K_0 , зависящей от тех же величин, от которых зависит постоянная K_1 , а также от числа T . Наконец, еще раз используя условие (7), мы придем к аналогичной оценке для функции $u(x, t)$:

$$\|u\|_{V_2} \leq K'_0 [\|g\|_{L_2(Q)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}]. \quad (17)$$

С помощью оценок (16) и (17) мы и докажем открытость и замкнутость множества Λ .

Пусть λ_0 есть элемент множества Λ , $\lambda = \lambda_0 + \hat{\lambda}$. Покажем, что при малой величине $|\hat{\lambda}|$ число λ также будет принадлежать множеству Λ .

Для произвольной функции $v(x, t)$ из пространства V_2 рассмотрим краевую задачу: *найти решение уравнения*

$$L_{B,\varepsilon,\lambda_0} u = g(x, t) - \hat{\lambda} \Phi(x, t, v), \quad (10'_{\varepsilon,\lambda_0})$$

для которого выполняются условия (11). Из условий (4), (7) и (8) следует, что функция $\Phi(x, t, v)$ будет принадлежать пространству $L_2(Q)$. Но тогда согласно определению множества Λ краевая задача $(10'_{\varepsilon,\lambda_0})$, (11) будет иметь решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству V_2 . Другими словами, данная краевая задача порождает оператор G , переводящий пространство V_2 в себя: $G(v) = u$. Из оценки (17) и из условий (4), (7) и (8) следует, что для любых двух функций $v_1(x, t)$ и $v_2(x, t)$ из пространства V_2 имеет место неравенство

$$\|G(v_1) - G(v_2)\|_{V_2} \leq M|\bar{\lambda}| \|v_1 - v_2\|_{V_2}$$

с фиксированной постоянной M , зависящей лишь от числа K'_0 , коэффициентов оператора L и от чисел a_1 и a_2 . Если теперь для числа $\hat{\lambda}$ будет выполняться неравенство $M|\bar{\lambda}| < 1$, то оператор G окажется сжимающим в пространстве V_2 и тем самым имеющим неподвижную точку: $G(u) = u$. Очевидно, что эта неподвижная точка является решением из пространства V_2 краевой задачи $(10_{\varepsilon,\lambda})$, (11), $\lambda = \lambda_0 + \hat{\lambda}$. Следовательно, число λ будет принадлежать множеству Λ . А это и означает, что множество Λ открыто.

Докажем теперь замкнутость множества Λ .

Пусть $\{\lambda_m\}$ есть последовательность элементов множества Λ , сходящаяся к некоторому числу λ_0 . Покажем, что число λ_0 также будет элементом множества Λ .

Каждому числу λ_m соответствует функция $u_m(x, t)$ принадлежащая пространству V_2 и являющаяся решением краевой задачи $(10_{\varepsilon,\lambda_m})$, (11). Из оценок (16) и (17) следует, что последовательности $\{u_m(x, t)\}$ и $\{w_m(x, t)\}$, $w_m = Bu_m$ будут равномерно ограниченными в пространстве V_2 последовательностями. Но тогда существуют последовательность $\{m_k\}$ натуральных чисел и функции $u(x, t)$ и $w(x, t)$ такие, что при $k \rightarrow \infty$ будут иметь место слабые в пространстве $L_2(Q)$ сходимости $u_{m_k} \rightarrow u$, $u_{m_k t} \rightarrow u_t$, $u_{m_k x_i} \rightarrow u_{x_i}$, $u_{m_k x_i t} \rightarrow u_{x_i t}$,

$u_{m_k x_i x_j} \rightarrow u_{x_i x_j}$, $u_{m_k x_i x_j t} \rightarrow u_{x_i x_j t}$, $w_{m_k} \rightarrow w$, $w_{m_k t} \rightarrow w_t$, $w_{m_k x_i} \rightarrow w_{x_i}$, $w_{m_k x_i t} \rightarrow w_{x_i t}$, $w_{m_k x_i x_j} \rightarrow w_{x_i x_j}$, $w_{m_k x_i x_j t} \rightarrow w_{x_i x_j t}$, $i, j = 1, \dots, n$. Из этих сходимостей, условия непрерывности оператора B , из сходимости $\lambda_{m_k} \rightarrow \lambda_0$ и из условия (9) следует, что будут иметь место равенства $w = Bu$, $L_{B,\varepsilon,\lambda_0} u = g$. Кроме того, будут выполняться условия (11). Наконец, из оценок (16) и (17) следует, что функции $u(x, t)$ и $w(x, t)$ будут принадлежать пространству V_2 .

Но тогда все условия принадлежности числа λ_0 множеству Λ будут выполняться. Принадлежность предельной точки множества ему же и означает его замкнутость.

Итак, множество Λ есть отрезок $[0, 1]$, краевая задача $(10_{\varepsilon,1})$, (11) разрешима в пространстве V_2 для любого фиксированного положительного числа ε . Обозначим решение данной задачи как $u_\varepsilon(x, t)$. Покажем, что при выполнении всех использованных выше условий и при выполнении дополнительного условия $g_t(x, t) \in L_2(Q)$ из семейства функций $\{u_\varepsilon(x, t)\}$ можно выбрать последовательность $\{u_{\varepsilon_m}(x, t)\}$, сходящуюся при $m \rightarrow \infty$ к решению краевой задачи (10), (11).

Вновь анализируя равенства (12)–(15) с тем лишь изменением, что в последнем равенстве выполняется интегрирование по переменной τ , мы получим для семейства функций $\{u_\varepsilon(x, t)\}$ априорные оценки

$$\|w_\varepsilon\|_{V_1}^2 + \varepsilon \sum_{i,j=1}^n \|w_{\varepsilon x_i x_j \tau}\|_{L_2(Q_t)}^2 \leq N_1, \quad (18)$$

$$\|u_\varepsilon\|_{V_1}^2 + \varepsilon \sum_{i,j=1}^n \|u_{\varepsilon x_i x_j \tau}\|_{L_2(Q_t)}^2 \leq N_1 \quad (19)$$

($w_\varepsilon = Bu_\varepsilon$) с постоянными N_1 и N_2 , зависящими от коэффициентов оператора L , от области Ω и от чисел a_1, a_2 и T , но не зависящими от числа ε . Из этих оценок следует, что существуют последовательность чисел $\{\varepsilon_m\}$, функций $\{u_{\varepsilon_m}(x, t)\}$, а также функций $u(x, t)$ и $w(x, t)$, такие, что при $m \rightarrow \infty$ имеют место числовая сходимость $\varepsilon_m \rightarrow 0$, а также сходимости функций $u_{\varepsilon_m} \rightarrow u$, $u_{\varepsilon_m t} \rightarrow u_t$, $u_{\varepsilon_m x_i} \rightarrow u_{x_i}$, $u_{\varepsilon_m x_i t} \rightarrow u_{x_i t}$, $u_{\varepsilon_m x_i x_j} \rightarrow u_{x_i x_j}$, $w_{\varepsilon_m} \rightarrow w$, $w_{\varepsilon_m t} \rightarrow w_t$, $w_{\varepsilon_m x_i} \rightarrow w_{x_i}$, $w_{\varepsilon_m x_i t} \rightarrow w_{x_i t}$, $w_{\varepsilon_m x_i x_j} \rightarrow w_{x_i x_j}$, $\varepsilon_m w_{\varepsilon_m x_i x_j t} \rightarrow 0$, $i, j = 1, \dots, n$, слабые в пространстве $L_2(Q)$. Из этих сходимостей, условия непрерывности оператора B и из условия (9) и вытекает, что будут иметь место равенства $w = Bu$, $L_B u = g$. Далее, предельный переход в неравенствах (18) и (19) дает принадлежность функций $u(x, t)$ и $w(x, t)$ пространству V_1 . Выполнение условий (11) для функции $u(x, t)$ очевидно. Следовательно, найденная функция $u(x, t)$ будет требуемым решением краевой задачи (10), (11).

Выберем функцию $g(x, t)$ специальным образом: $g = Bf$. Из условия (7) следует, что если функции f и f_t принадлежат пространству $L_2(Q)$, то и функции g и g_t будут принадлежать этому же пространству. Согласно доказанному, краевая задача (10), (11) для такой функции $g(x, t)$ будет разрешима в классе $\{u \in V_1, Bu \in V_1\}$. Поскольку уравнение (10) теперь приобретает вид

$$B(Lu - f) = 0 \quad (20)$$

и поскольку оператор B взаимно-однозначен, то функция $u(x, t)$ – решение уравнения (10) – будет решением уравнения (1). Вновь в силу взаимной однозначности оператора B для функции $u(x, t)$ будет выполняться условие (3). Следовательно, функция $u(x, t)$ – решение краевой задачи (10), (11) – будет и решением исходной краевой задачи (1)–(3).

Единственность решений очевидна — достаточно рассмотреть равенство (12) ($\varepsilon = 0$) и вновь воспользоваться взаимной однозначностью оператора B .

Теорема полностью доказана.

Заметим, что возможность предельного перехода как при осуществлении схемы метода продолжения по параметру, так и в уравнении $(10_{\varepsilon_m, 1})$ (более точно говоря, в слагаемых $A(x, t, a^i u_{x_i})$ и $A(x, t, a^{ij} u_{x_i x_j})$) нам обеспечивают условие (9) и необходимые для использования этого условия априорные оценки (17) и (19). И если для доказательства оценки (17) нам требуются естественные для псевдопараболических уравнений условия на функции $f(x, t)$ и $u_0(x)$, то для доказательства оценки (19) требуемые условия представляются завышенными по отношению к первой краевой задаче для параболических уравнений. Приведем другой вариант условия (9) и тем самым теоремы о разрешимости краевой задачи (1)–(3), в которых ограничения на функции $f(x, t)$ и $u_0(x)$ будут естественными для параболических уравнений.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (4)–(8) теоремы 1, а также условие:

если последовательность $\{v_m(x, t)\}$ слабо сходится в пространстве $W_2^{2,1}(Q)$ к функции $v(x, t)$, то имеют место слабые в пространстве $L_2(Q)$ сходимости

$$A(x, t, \varphi v_{mx_i}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} A(x, t, \varphi v_{x_i}), \quad A(x, t, \varphi v_{mx_i x_j}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} A(x, t, \varphi v_{x_i x_j}), \\ i, j = 1, \dots, n, \quad \varphi(x, t) \in C^1(\bar{Q}). \quad (9')$$

Тогда для любых функций $f(x, t)$ и $u_0(x)$ таких, что $f(x, t) \in L_2(Q)$, $u_0(x) \in W_2^1(\Omega)$, $u_0(x) - A(x, 0, u_0) = 0$ при $x \in \Gamma$, краевая задача (1)–(3) имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству $W_2^{2,1}(Q) \cap L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega))$, и это решение единственно.

Доказательство. Вновь рассмотрим краевую задачу (10)–(11). Покажем, что при выполнении условий теоремы эта задача имеет решение $u(x, t)$ такое, что $u(x, t) \in W_2^{2,1}(Q) \cap L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega))$, $Bu(x, t) \in W_2^{2,1}(Q) \cap L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega))$.

Воспользуемся методом продолжения по параметру. Именно, для чисел λ из отрезка $[0, 1]$ рассмотрим семейство краевых задач: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$L_{B,\lambda} u \equiv LBu + \lambda \Phi(x, t, u) = f(x, t) \quad (10_\lambda)$$

и такую, что для нее выполняются условия (11). Множество Λ определим как множество тех чисел λ из отрезка $[0, 1]$, для которых краевая задача (10_λ) , (11) имеет решение $u(x, t)$ из требуемого класса. Это множество не пусто, поскольку число 0 принадлежит ему — это следует из известных результатов о разрешимости первой краевой задачи для параболических уравнений в пространстве $W_2^{2,1}(Q) \cap L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega))$ [14] и из условия взаимной однозначности оператора B . Анализируя далее равенства, аналогичные равенствам (12)–(14), но для оператора $L_{B,\lambda}$, нетрудно установить, что для решений краевой задачи (10_λ) , (11) при выполнении условий (4)–(8) имеет место априорная оценка

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q) \cap L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega))} + \|w\|_{W_2^{2,1}(Q) \cap L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega))} \leq K_0 [\|g\|_{L_2(Q)} + \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}] \quad (21)$$

с постоянной K_0 , зависящей лишь от коэффициентов оператора L , области Ω и чисел a_1, a_2 и T . С помощью оценки (21), вновь условий (4)–(8), а также условия (9') нетрудно показать, что множество Λ будет открытым и замкнутым — делается это так же, как доказывается аналогичный факт в теореме 1. Непустота, открытость и замкнутость множества Λ дают разрешимость задачи (10_1) , (11) в требуемом классе. Переходя же далее к уравнению (20), мы получим разрешимость краевой задачи (1)–(3) в требуемом классе.

Единственность решений очевидна.

Рассмотрим краевую задачу с интегральным условием (*). Пусть функция $K(x, y, t)$ принадлежит классу $C^{2,2,1}(\bar{Q} \times \bar{Q} \times [0, T])$. Тогда оператор A :

$$Au = A(x, t, u) = \int_{\Omega} K(x, y, t) u(y, t) dy$$

определен при $x \in \bar{\Omega}$; очевидно, что вследствие указанной гладкости функции $K(x, y, t)$ для этого оператора будут выполняться условия (7) и (8). Далее, взаимная однозначность оператора B гарантируется однозначной разрешимостью в пространстве $L_2(Q)$ интегрального оператора $u - Au = 0$; последнее имеет место, например, при выполнении условия

$$\max_{[0, T]} \int_{\Omega} \int_{\Omega} K^2(x, y, t) dy dx < 1.$$

Пусть $\varphi(x, t)$ есть функция из класса $C^1(\bar{Q})$. Имеют место равенства

$$\begin{aligned} A(x, t, \varphi v_i) &= \int_{\Omega} \varphi(y, t) K(x, y, t) v_{y_i}(y, t) dy = - \int_{\Omega} (\varphi(y, t) K(x, y, t))_{y_i} v(y, t) dy - \\ &\quad - \int_{\Gamma} \varphi(y, t) K(x, y, t) v(y, t) v_{y_i} ds_y, \\ A(x, t, \varphi v_{x_i x_j}) &= \int_{\Omega} \varphi(y, t) K(x, y, t) v_{y_i y_j}(y, t) dy = - \int_{\Omega} (\varphi(y, t) K(x, y, t))_{y_i} v_{y_j}(y, t) dy - \\ &\quad - \int_{\Gamma} \varphi(y, t) K(x, y, t) v_{y_j}(y, t) v_{y_i} ds_y. \end{aligned}$$

Если теперь для функций $f(x, t)$ и $u_0(x)$ выполняются условия теоремы 1, то имеют место равномерные в пространстве $W_2^1(Q)$ оценки соответствующих семейств первых производных. Из этих оценок следует возможность выбора слабо сходящихся последовательностей и далее — возможность использования условия (9) при осуществлении предельного перехода в предпоследнем и последнем слагаемых функции Φ (как при доказательстве замкнутости множества Λ , так и при доказательстве возможности предельного перехода по параметру ε). При выполнении же дополнительного условия

$$K(x, y, t)|_{y \in \Gamma} = 0 \quad (22)$$

в представлении функции $A(x, t, \varphi v_{x_i x_j})$ мы можем еще раз проинтегрировать по частям (при выполнении условия $\varphi \in C^2(\bar{Q})$) и теперь осуществить всю процедуру выбора слабо сходящихся подпоследовательностей и предельного перехода с помощью условия (9') при наличии априорной оценки в пространстве $W_2^1(Q)$ лишь для семейства решений. Требуемая же оценка имеет место при выполнении для функций $f(x, t)$ и $u_0(x)$ условий теоремы 2.

Проведенные рассуждения показывают, что для краевой задачи (1)–(3) с интегральным условием (*) в общем случае применима теорема 1, требующая дополнительных условий для функций $f(x, t)$ и $u_0(x)$; при выполнении же условия (22) применима теорема 2 и от функций $f(x, t)$ и $u_0(x)$ при этом требуется выполнение естественных для первой краевой задачи для параболических уравнений условий.

Нетрудно провести аналогичный анализ и установить разрешимость краевой задачи (1)–(3) со следующими операторами Λ :

$$Au = \int_{\Omega} \int_0^t K(x, y, t, \tau) u(y, \tau) d\tau dy,$$

$$Au = \int_{\Omega} K_1(x, y, t) u(y, t) dy + \int_{\Omega} \int_0^t K_2(x, y, t, \tau) u(y, \tau) d\tau dy.$$

Нетрудно привести и другие примеры.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Carlson D.E. Linear Thermoelasticity // Encyclopedia of Physics. Berlin, Springer, 1972.
2. Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963, V. 21, P. 155–160.
3. Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // Журнал вычисл. матем. и мат. физики. 1964. Т. 4. № 6. С. 1006 – 1024.
4. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 294 – 304.
5. Cannon J.R., Van der Hoek J. The classical solution of the one-dimensional two-phase Stefan problem with energy specification // Ann. Math. Pura ed Appl. 1982. V. 130. P. 385 – 398.
6. Cannon J.R., Van der Hoek J. The one – phase Stefan problem subject to the specification of energy // J. Math. Anal. and Appl. 1982. V. 86. N 1. P. 281 – 291.
7. Муравей Л.А., Филиновский А.В. Об одной нелокальной краевой задаче для параболического уравнения // Мат. заметки. 1993. Т. 54. № 4. С. 98 – 116.
8. Bouziani A., Benouor N.-E. Problem mixte avec conditions integrales pour une classe d'equations paraboliques // C. R. Acad. Sci. Paris. 1995. V. 321. Ser. I. P. 1177 – 1182.
9. Иванцов Н.И. Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 4. С. 547 – 564.
10. Fridman A. Monotonic decay of solutions of parabolic equations with nonlocal boundary conditions // Quart. of Appl. Math. 1986. V. XLIV. N 3. P. 401 – 407.
11. Якубов С.Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1995.
12. Kozhanov A.I. Composite Type Equations and Inverse Problems // Utrecht: VSP, 1999.
13. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
14. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта 03-01-00819.

Поступила 17.06.2004 г.