Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Репин, О задаче с обобщенными операторами дробного интегродифференцирования для уравнения гиперболического типа, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 30, 70–72

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu309>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 08:21:26

О ЗАДАЧЕ С ОБОБЩЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Для уравнения гиперболического типа поставлена и исследована нелокальная задача, краевые условия которой содержат линейную комбинацию обобщенных операторов дробного интегро-дифференцирования. Доказана однозначная разрешимость задачи, а ее решение получено в явном виде.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$y(U_{xx} - U_{yy}) - 2qU_x - 2pU_y = 0, \quad (1)$$

где $0 < p + q < 1$, $0 < p - q < 1$, $0 < 2p < 1$ в конечной области D , ограниченной характеристиками AC_1 , BC_1 уравнения (1), выходящими из точки $C_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ и характеристикам AC_2 , BC_2 выходящими из точки $C_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Пусть $D_1 = D \cap (y < 0)$, $D_2 = D \cap (y > 0)$, $D = D_1 \cup D_2 \cup J$, J -интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$; $\Theta_0^{(1)}(x)$, $\Theta_0^{(2)}(x)$ - аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x, 0) \in J$, с характеристиками AC_1 и AC_2 соответственно.

Положим [1]

$$(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x) = \begin{cases} \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F(\alpha + \beta, -\eta; \alpha; 1 - \frac{t}{x}) f(t) dt, & \alpha > 0, \\ \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{0+}^{\alpha+n, \beta-n, \eta-n} f)(x), & \alpha < 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$0 < x < 1, \alpha, \beta, \eta \in \mathbb{C}, n = [-\alpha] + 1.$$

Задача. Найти функцию $U(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C'(D_1 \cup J) \cap C'(D_2 \cup J) \cap C^2(D_1 \cup D_2)$, удовлетворяющую уравнению (1) в каждой из областей D_1 и D_2 , краевым условиям

$$A_1(I_{0+}^{a, b, \beta-a-1} U(\Theta_0^{(1)}))(x) + B_1(I_{0+}^{a+\alpha, b, \beta-a-1} \alpha_1(t) U(t, 0))(x) + C_1(I_{0+}^{a+1-\beta, b+\alpha+\beta-1, \beta-a-1} \beta_1(t) U_y(t, 0))(x) = \varphi_1(x) \quad \forall x \in J, \quad (3)$$

$$A_2(I_{0+}^{c, d, \alpha-c-1} U(\Theta_0^{(2)}))(x) + B_2(I_{0+}^{c+\beta, d, \alpha-c-1} \alpha_2(t) U(t, 0))(x) - C_2(I_{0+}^{c+1-\alpha, d+\alpha+\beta-1, \alpha-c-1} \beta_2(t) U_y(t, 0))(x) = \varphi_2(x) \quad \forall x \in J \quad (4)$$

и условиям сопряжения

$$U(x, -0) = U(x, +0) \quad x \in \bar{J}, \quad (5)$$

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\alpha+\beta} U_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{\alpha+\beta} U_y(x, y) \quad x \in J, \quad (6)$$

где $\alpha = p + q$, $\beta = p - q$, A_i , B_i , C_i ($i=1, 2$) - действительные положительные константы; $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$, $\varphi_i(x)$ - заданные функции, такие, что $\varphi_i(x) \in C(\bar{J})$, $\alpha_i(x)$ - неубывающие неотрицательные функции,

$$\alpha_i(x) \in C'(\bar{J}), \beta_i(x) \in C(\bar{J}), \beta_i(x) > 0 \quad \forall x \in \bar{J}. \quad (7)$$

$$a > \max\{\beta - 1, -\alpha\}, c > \max\{\alpha - 1, -\beta\}$$

2. Единственность решения задачи. При доказательстве единственности решения поставленной задачи положим

$$U(x, -0) = \tau_1(x), \quad U(x, +0) = \tau_2(x), \quad x \in \bar{J}, \quad (8)$$

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\alpha+\beta} U_y(x, y) = \nu_1(x), \quad \lim_{y \rightarrow +0} y^{\alpha+\beta} U_y(x, y) = \nu_2(x), \quad x \in J. \quad (9)$$

Выписывая решения задачи Коши для уравнения (1) в областях D_1 и D_2 [2], удовлетворяя краевым условиям (3) и (4), учитывая при этом формулу [3], [4]

$$(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} I_{0+}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta} f)(x) = (I_{0+}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta} f)(x) \quad (\gamma > 0), \quad (10)$$

будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{A_1 \Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\beta)} (I_{0+}^{a+\alpha,b,\beta-1-a} \tau_1)(x) + \frac{A_1 \Gamma(1-\alpha-\beta)}{2\Gamma(1-\alpha)} (I_{0+}^{a+1-\beta,b+\alpha+\beta-1,\beta-1-a} v_1)(x) + \\ & + B_1 (I_{0+}^{a+\alpha,b,\beta-1-a} \alpha_1 \tau_1)(x) + C_1 (I_{0+}^{a+1-\beta,b+\alpha+\beta-1,\beta-1-a} \beta_1 v_1)(x) = \varphi_1(x), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{A_2 \Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)} (I_{0+}^{c+\beta,d,\alpha-c-1} \tau_2)(x) - \frac{A_2 \Gamma(1-\alpha-\beta)}{2\Gamma(1-\beta)} (I_{0+}^{c+1-\alpha,d+\alpha+\beta-1,\alpha-c-1} v_2)(x) + \\ & + B_2 (I_{0+}^{c+\beta,d,\alpha-c-1} \alpha_2 \tau_2)(x) + C_2 (I_{0+}^{c+1-\alpha,d+\alpha+\beta-1,\alpha-c-1} \beta_2 v_2)(x) = \varphi_2(x). \end{aligned} \quad (12)$$

Применив к обеим частям (11) и (12) обратный оператор $[(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} f)(x)]^{-1} = (I_{0+}^{-\alpha,-\beta,\alpha+\eta} f)(x)$ и учитывая (10), получим соотношения между $\tau_i(x)$ и $v_i(x)$ ($i=1,2$), принесенные на J из областей D_1 и D_2 соответственно

$$\begin{aligned} & \left[\frac{A_1 \Gamma(1-\alpha-\beta)}{2\Gamma(1-\alpha)} + C_1 \beta_1(x) \right] v_1(x) = - \frac{A_1 \Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\beta)} (D_{0+}^{1-\alpha-\beta} \tau_1)(x) - B_1 (D_{0+}^{1-\alpha-\beta} \alpha_1 \tau_1)(x) + \\ & + (I_{0+}^{\beta-a-1,1-b-\alpha-\beta,0} \varphi_1)(x), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{A_2 \Gamma(1-\alpha-\beta)}{2\Gamma(1-\beta)} + C_2 \beta_2(x) \right] v_2(x) = \frac{A_2 \Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\beta)} (D_{0+}^{1-\alpha-\beta} \tau_2)(x) + B_2 (D_{0+}^{1-\alpha-\beta} \alpha_2 \tau_2)(x) + \\ & + (I_{0+}^{a-c-1,1-d-\alpha-\beta,0} \varphi_2)(x). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $(D_{0+}^{1-\alpha-\beta} f)(x)$ - оператор дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля [3].

Теперь рассмотрим соответствующую однородную задачу ($\varphi_i(x) \equiv 0$). В силу принципа экстремума для гиперболических уравнений [5] положительный максимум (отрицательный минимум) функции $U(x, y)$ в областях $\overline{D_1}$ и $\overline{D_2}$ достигается на J .

Пусть положительный максимум функции $U(x, y)$ достигается в точке $(x_0, 0) \in J$. Тогда в соответствии с принципом экстремума для операторов дробного дифференцирования [6] и условий (6), (7) получаем $v_1(x_0) < 0, v_2(x_0) > 0$. Это противоречит условию сопряжения (5).

Аналогичные неравенства для функций $v_1(x)$ и $v_2(x)$ имеют место, если в точке $(x_0, 0) \in J$ функция $U(x, y)$ достигает отрицательный минимум. Стало быть $U(x, y) \equiv 0$ в области D .

3. Существование решения задачи. Докажем существование решения исследуемой задачи, если

$$\alpha_1(x) = \mu_1 = \text{const} \neq 0; \alpha_2(x) = \mu_2 = \text{const} \neq 0.$$

Поддействуем на обе части (11) обратным оператором

$$[(I_{0+}^{a+\alpha,b,\beta-1-a} f)(x)]^{-1} = (I_{0+}^{-(a+\alpha),-b,\alpha+\beta-1} f)(x).$$

На основании формулы (10) и с учетом соотношения [3]

$$(I_{0+}^{\alpha,-\alpha,\eta} f)(x) = (I_{0+}^{\alpha} f)(x) \quad (\alpha > 0),$$

где $(I_{0+}^{\alpha} f)(x)$ - оператор дробного интегрирования в смысле Римана-Лиувилля, получим

$$\begin{aligned} & \left[\frac{A_1 \Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\beta)} + B_1 \mu_1 \right] \tau_1(x) + \frac{A_2 \Gamma(1-\alpha-\beta)}{2\Gamma(1-\alpha)} (I_{0+}^{1-\alpha-\beta} v_1)(x) + C_1 (I_{0+}^{1-\alpha-\beta} \beta_1 v_1)(x) = \\ & = (I_{0+}^{-(a+\alpha),-b,\alpha+\beta-1} \varphi_1)(x) \end{aligned} \quad (15)$$

Применим к обеим частям (12) оператор

$$[(I_{0+}^{c+\beta,d,\alpha-c-1} f)(x)]^{-1} = (I_{0+}^{-(c+\beta),-d,\alpha+\beta-1} f)(x).$$

После простых преобразований получим

$$\begin{aligned} & \left[\frac{A_2 \Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)} + B_2 \mu_2 \right] \tau_2(x) - \frac{A_2 \Gamma(1-\alpha-\beta)}{2\Gamma(1-\beta)} (I_{0+}^{1-\alpha-\beta} v_2)(x) + C_2 (I_{0+}^{1-\alpha-\beta} \beta_2 v_2)(x) = \\ & = (I_{0+}^{-(c+\beta),-d,\alpha+\beta-1} \varphi_2)(x). \end{aligned} \quad (16)$$

Введем следующие обозначения:

$$\frac{A_1\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)} + B_1\mu_1 = k_1, \quad \frac{A_2\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)} + B_2\mu_2 = k_2,$$

$$\psi_1(x) = (I_{0+}^{-(a+\alpha), -b, \alpha+\beta-1} \varphi_1)(x), \quad \psi_2(x) = (I_{0+}^{-(c+\beta), -d, \alpha+\beta-1} \varphi_2)(x).$$

А с учетом условий (5)

$$\tau_1(x) = \tau_2(x) = \tau(x), \quad v_1(x) = v_2(x) = v(x).$$

Подставляя $\tau(x)$ из (16) в (15), будем иметь

$$k_1 \left[\frac{A_2\Gamma(1-\alpha-\beta)}{2k_2\Gamma(1-\beta)} (I_{0+}^{1-\alpha-\beta} v)(x) - \frac{C_2}{k_2} (I_{0+}^{1-\alpha-\beta} \beta_2 v_2)(x) + \psi_2(x) \right] + \frac{A_1\Gamma(1-\alpha-\beta)}{2\Gamma(1-\alpha)} (I_{0+}^{1-\alpha-\beta} v)(x) +$$

$$+ C_1 (I_{0+}^{1-\alpha-\beta} \beta_1 v_1)(x) = \psi_1(x). \quad (17)$$

Применяя к обеим частям равенства (17) оператор $D_{0+}^{1-\alpha-\beta}$ и используя свойства операторов дробного интегрирования и дифференцирования [3]

$$D_{0+}^\alpha I_{0+}^\alpha f = f \quad (\alpha > 0),$$

имеем

$$\left[k_1 \left(\frac{A_2\Gamma(1-\alpha-\beta)}{2k_2\Gamma(1-\beta)} - \frac{C_2\beta_2(x)}{k_2} \right) + \frac{A_1\Gamma(1-\alpha-\beta)}{2\Gamma(1-\alpha)} + C_1\beta_1(x) \right] v(x) =$$

$$= (D_{0+}^{1-\alpha-\beta} \psi_1)(x) - k_1 (D_{0+}^{1-\alpha-\beta} \psi_2)(x). \quad (18)$$

Подставляя (18) в равенства (15) или (16), легко найдем явное выражение для $\tau(x)$, что и завершает доказательство существования решения исходной задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Saigo M. A certain boundary value problem for the Euler-Poisson-Darboux equation // Math. Japan. 1979. V 24. № 4. P. 377-385.
2. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. Уч. пос. М.: Высш. шк., 1985. 340 с.
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск. Наука и техника, 1987. 668 с.
4. Репин О.А. Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 1992. 161 с.
5. Agmon S., Nirenberg L., Protter M.N. A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type // Commun Pure and Appl. Math. Vol. 6. № 4. 1953. P. 455-470.
6. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2000. 299 с.

Поступила 8.06.2004 г.