Общероссийский математический портал

В. П. Радченко, Е. В. Небогина, М. В. Басов, Структурная модель закритического упругопластического деформирования материалов в условиях одноосного растяжения, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2000, выпуск 9, 55–65

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu31>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 12:33:54

СТРУКТУРНАЯ МОДЕЛЬ ЗАКРИТИЧЕСКОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ ОДНООСНОГО РАСТЯЖЕНИЯ

Предложена структурная модель для описания полной диаграммы упругопластического деформирования материалов при одноосном растяжении в условиях “жесткого” нагружения. С позиций механики микронеоднородных сред показана осуществимость равновесного протекания процесса накопления повреждений и разрушения материала на закритической стадии упругопластического деформирования. Проанализирована кинематика микронапряженного состояния как на стадии упругочувствования, так и на стадии разрушения материала. Выполнена обстоятельная экспериментальная проверка структурной модели. Наблюдается хорошее соответствие расчетных и экспериментальных диаграмм упругопластического деформирования.

Потеря несущей способности одноосного образца при растяжении с феноменологических позиций является результатом накопления повреждений в результате пластического деформирования, сопровождающегося необратимым изменением внутренней структуры материала. Вопрос описания полной диаграммы упругопластического деформирования достаточно сложной и до настоящего времени во всей его полноте не раскрыт. Основная проблема заключается в объяснении и описании ниспадающего участка диаграммы, так называемой стадии неустойчивого (закритического) деформирования [1,2]. Факторов, влияющих на вид диаграммы, достаточно много.

В [3] отмечалось, что сопротивление разрушению является не только свойством материала, но и зависит от жесткости нагружающей системы, в которую входят как нагружающее устройство, так и само деформируемое тело, окружающее зону разрушения. Существенно сказывается на характере ниспадающей ветви диаграммы и режим нагружения. Так, когда к находящемуся в однородном напряженном состоянии телу прикладываются не зависящие от его сопротивления силы, разрушению соответствуют максимально достижимые значения напряжений, как это обычно и принимается в расчетах на прочность. В другом же предельном случае «жесткого нагружения» (когда задаются перемещения точек на границе) возможно равновесное протекание процесса накопления повреждений, что находит свое отражение на ниспадающей ветви диаграммы деформирования. С аналогичных позиций это явление описывалось и в ряде других работ [4-6].

Наличие ниспадающей ветви на диаграмме деформирования привело к тому, что характеристикой разрушения материала стали считать не точку локального экстремума зависимости «перемещение-нагрузка», а конечную точку диаграммы. Фридман Я.Б. [7] отмечает, что эта точка отражает состояние, соответствующее началу заключительной быстропротекающей неравновесной стадии процесса разрушения, при этом разрушение заканчивается при усилении, близком к нулю.

Вообще говоря, в вопросе возможности построения полной диаграммы существуют диаметрально противоположные мнения. Так, Г.А. Черепанов считает [8], что закритический участок является динамической характеристикой системы образец-испытательная машина в целом и «вообще не зависит от физических свойств материала в закритической области». С другой стороны, в работах [9,10] теоретически обосновывается осуществимость состояний материала, соответствующих ниспадающей ветви диаграммы деформирования, без учета эффекта накопления повреждений.

В свою очередь, ряд экспериментальных работ А.А. Лебедева с соавторами [11-13] показал, что ниспадающая ветвь все же зависит не только от жесткости испытательной машины, но и является характеристикой материала, при этом независимо от класса и исходной структуры материала кинетика разгрузки носит общий стадийный характер. Наличие ниспадающего участка диаграммы свидетельствует о том, что разрушение материала не является мгновенным актом, а происходит непрерывно в течение определенного времени. На это же указывалось и В.В. Стружановым, и В.И. Мироновым [14]. Исследование кинетики разрушения образцов при растяжении показали, что сначала происходит разрыхление материала, образуются микропоры и микротрещины, т.е. происходит рассеянное накопление поврежденности в материале на уровне микроструктуры [15]. Этот процесс можно рассматривать как деформационное разру-

прочнение материала. Затем возникает магистральная внутренняя трещина, и с этого момента резко меняется сопротивление образца, и нагрузка начинает падать.

Таким образом, по всей видимости, падение сопротивления в ходе равновесного необратимого пластического деформирования является следствием уменьшения эффективной площади сечения элементарного объема материала, воспринимающего нагрузку. Теоретические истоки описания этого экспериментального факта заложены еще в работах Ю.Н. Работнова [16], И.И. Новожилова [17], Л.М. Качанова [18].

Целью настоящей работы является разработка математической модели микронеоднородной среды, которая бы описывала полную диаграмму упругопластического деформирования, включая участок закритического деформирования, в случае «жесткого» нагружения. Для этого используется структурная модель среды стержневого типа, предложенная в [19,20].

Хорошо известно, что конструкционные металлические и природные материалы даже малого объема с точки зрения механики микронеоднородных сред представляют сложную статически неопределимую систему случайно ориентированных кристаллических зерен. Поэтому, исходя из общих принципов построения структурных математических моделей микронеоднородных сред [21,22], в настоящей работе поликристаллический материал моделируется системой хаотически ориентированных однородных стержней (локальных элементов) одинаковой длины, работающих на растяжение-сжатие. Каждый локальный элемент этой системы наделяется простейшими деформационными свойствами: линейной упругостью и идеальной пластичностью, которые, по-видимому, являются основными микромеханизмами упругопластической деформации [23-25]. В таком случае задача одноосного деформирования образца сводится к

Р и с. 1. Схематическое изображение структурной модели

изучению поведения стержневой конструкции (рис.1), а деформация каждого локального элемента системы представляется в виде

$$\varepsilon_i = e_i + e_i^p,$$

где $e_i = \sigma / E_M$ – упругая деформация (E_M – микромодуль Юнга); e_i^p – микропластическая деформация, подчиняющаяся закону идеальной пластичности; σ_i – микронапряжение в локальном элементе; i – номер стержня. Ориентация локального элемента задается углами θ и φ (см. рис.1), где Θ – угол между локальным элементом и осью Ox , φ – угол между проекцией стержня на плоскость OYZ и осью Oy ($0 \leq \Theta \leq \pi/2$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

Обозначим через $\sigma = \sigma(\Theta, \varphi)$ напряжение, возникающее в локальном элементе (микронапряжение); $\varepsilon = \varepsilon(\Theta, \varphi)$ – деформацию локального элемента (микродоформацию); $\langle \sigma_x \rangle$ – микронапряжение, приложенное к образцу; $\langle \varepsilon_x \rangle$, $\langle \varepsilon_y \rangle$, $\langle \varepsilon_z \rangle$ – продольную и поперечные микродоформации образца соответственно. В силу симметрии задачи все характеристики микронапряженного состояния будут зависеть только от угла Θ , при этом $\langle \varepsilon_y \rangle = \langle \varepsilon_z \rangle$.

В [19,20] для рассматриваемой структурной модели были получены уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned} \langle \sigma_x \rangle &= 2 \int_0^{\pi/2} \sigma(\Theta) \cos^2 \Theta \sin \Theta d\Theta, \\ \int_0^{\pi/2} \sigma(\Theta) \sin^3 \Theta d\Theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и уравнения совместности деформаций

$$\varepsilon(\Theta) = \langle \varepsilon_x \rangle \cos^2 \Theta + \langle \varepsilon_y \rangle \sin^2 \Theta. \quad (2)$$

Для установления связи между микро- и макродоформацией введена гипотеза однородности деформации по объему в виде

$$\langle \varepsilon_x \rangle = \varepsilon(0), \langle \varepsilon_y \rangle = \langle \varepsilon_z \rangle = \varepsilon\left(\frac{\pi}{2}\right). \quad (3)$$

Для соответствующего расчета диаграммы упругопластического деформирования на основании структурной модели необходимо знать величину микропредела текучести локального элемента σ_{TM} и величину микромодуля Юнга E_M . В [19,20] были установлены следующие зависимости для их вычисления:

$$\sigma_{TM} = 3\sigma_{PP}, E_M = 3\langle E \rangle, \quad (4)$$

где σ_{PP} - предел пропорциональности (упругости) на диаграмме упругопластического деформирования образца, $\langle E \rangle$ - макромодуль Юнга.

Если стандартная схематическая диаграмма упругопластического макродеформирования образца имеет вид, представленный на рис.2, то кинетика поля микронапряжений в процессе упругопластического деформирования и разрушения металлов, изображенная на рис.3, состоит из этапов *a – e* (см. рис.3).

Точке 1 на диаграмме деформирования (см. рис.2) соответствует чисто упругое состояние, поэтому для эпюры микронапряжений имеем $|\sigma(\Theta)| < \sigma_{TM}$, $0 \leq \Theta \leq \pi/2$ (случай *a* на рис. 3)

По мере возрастания нагрузки (точка 2 на рис.2) часть локальных элементов модели достигает предела текучести и возникает зона пластического растяжения ($\sigma(\Theta) = \sigma_{TM}$, $0 \leq \Theta \leq \alpha_1$), остальные элементы находятся в упругом состоянии ($\sigma(\theta) < \sigma_{TM}$, $\alpha_1 < \theta \leq \pi/2$). Этому состоянию соответствует схема *b* на рис. 3. Дальнейшее увеличение нагрузки приводит к увеличению зоны пластически растянутых локальных элементов модели и росту (по модулю) микронапряжений сжатия до тех пор, пока напряжение в стержне при $\Theta = \pi/2$ не достигнет микропредела при сжатии: $\sigma(\pi/2) = -\sigma_{TM}$ (схема *в* на рис.3). Начиная с этого момента в материале образуются зоны пластического растяжения ($0 \leq \Theta \leq \alpha_1$), зоны пластического сжатия ($\alpha_1 \leq \Theta \leq \pi/2$) и упругая зона ($\alpha_1 \leq \Theta \leq \alpha_2$). Этому состоянию соответствует схема *г* на рис. 3. Очевидно, что схема *г* реализуется до состояния, соответствующего на диаграмме упругопластического деформирования временному пределу сопротивления σ_s (максимум зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, рис. 2). В последующем на закритической стадии деформирования естественно предположить, что наиболее нагруженные локальные элементы модели в зоне растяжения начинают разрушаться и микронапряженное состояние среды определяется зоной разрушенных элементов $0 \leq \theta \leq \alpha_3$, зонами пластического растяжения $\alpha_3 \leq \theta \leq \alpha_1$ и пластического сжатия $\alpha_1 \leq \theta \leq \pi/2$, упругой областью $\alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2$ (схема *д* на рис.3). Завершающей стадии закритического деформирования соответствуют зоны разрушения в областях пластического растяжения ($0 \leq \Theta \leq \alpha_3$) и пластического сжатия ($\alpha_4 \leq \Theta \leq \pi/2$), пластического сжатия ($\alpha_4 \leq \Theta \leq \pi/2$) и пластического растяжения ($\alpha_3 \leq \Theta \leq \alpha_1$) без разрушения локальных элементов, а также упругая область ($\alpha_1 \leq \Theta \leq \alpha_2$). Схематически это состояние представлено схемой *e* на рис.3.

Вопрос, связанный с выбором критериев разрушения локального элемента, будет рассмотрен ниже при математическом анализе соответствующих схем.

Рассмотрим теперь вопрос построения математических моделей для случаев *a – e*, представленных на рис.3.

a. Диаграмма микронапряжений в данном случае соответствует упругому состоянию. Исходя из уравнений (1)-(3) и закона Гука нетрудно установить, что

$$\sigma(\theta) = 3\langle \sigma_x \rangle \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{4} \sin^2 \theta \right). \quad (5)$$

Из соотношения (5) следует, что при одноосном растяжении микронапряжения в упругой области находятся в пределах

Рис. 2. Диаграмма упругопластического деформирования образца

$$3\langle\sigma_x\rangle\leq\sigma(\theta)\leq-\frac{3}{4}\langle\sigma_x\rangle,$$

т. е. при одноосном растяжении в образце возникают значительные сжимающие микронапряжения, за счет которых и возникают поперечные макродеформации.

Р и с. 3. Диаграммы распределения микронапряжений в процессе упругопластического деформирования

б. В этом случае часть стержней находится в состоянии упругопластического растяжения, т. е. $\sigma(\Theta)=\sigma_{TM}$ при $0\leq\Theta\leq\alpha_1$, но разрушения ни одного локального элемента не наблюдается. Область же $\alpha_1\leq\theta\leq\pi/2$ соответствует чисто упругому состоянию локальных элементов.

Опишем математически данную схему. Из уравнения совместности (2) при $\theta=\alpha_1$ имеем

$$\varepsilon(\alpha_1)=\langle\varepsilon_x\rangle\cos^2\alpha_1+\langle\varepsilon_y\rangle\sin^2\alpha_1. \quad (6)$$

Поскольку граничный между пластической и упругой областями элемент при $\Theta=\alpha_1$ находится в упругом состоянии, также как и элемент при $\Theta=\pi/2$, то с учетом (3) и закона Гука для локального элемента соотношение (6) примет вид

$$\frac{\sigma_{TM}}{E_M}=\langle\varepsilon_x\rangle\cos^2\alpha_1+\frac{\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right)}{E_M}\sin^2\alpha_1,$$

откуда

$$\langle\varepsilon_x\rangle=\frac{1}{E_M\cos^2\alpha_1}\left(\sigma_{TM}-\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin^2\alpha_1\right). \quad (7)$$

Подставляя (7) в (2) и используя закон Гука, в упругой области для $\alpha_1 \leq \Theta \leq \pi/2$ получим

$$\sigma(\Theta) = \frac{1}{\cos^2 \alpha_1} \left[\sigma_{TM} - \sigma\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin^2 \alpha_1 \right] \cos^2 \Theta + \sigma\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin^2 \Theta. \quad (8)$$

Запишем соотношение (1) в виде аддитивных составляющих по упругопластической и упругой областям:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x \rangle &= 2 \int_0^{\alpha_1} \sigma_{TM} \cos^2 \Theta \sin \Theta d\Theta + \int_{\alpha_1}^{\pi/2} \sigma(\theta) \cos^2 \theta \sin \theta d\theta; \\ \int_0^{\alpha_1} \sigma_{TM} \sin^3 \Theta d\Theta + \int_{\alpha_1}^{\pi/2} \sigma(\theta) \sin^3 \theta d\theta &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя (8) в (9) и интегрируя полученное, имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \langle \sigma_x \rangle = \frac{2}{15} \left[5\sigma_{TM} - 2\cos^3 \alpha_1 \left(\sigma_{TM} - \sigma\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \right]; \\ 5\sigma_{TM} - 5\cos \alpha_1 \left(\sigma_{TM} - \sigma\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) + \cos^3 \alpha_1 \left(\sigma_{TM} - \sigma\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Неизвестными в (10) являются $\langle \sigma_x \rangle, \alpha_1, \sigma(\pi/2)$, т.е. имеем три неизвестных и два уравнения. Однако в процессе упругопластического нагружения при феноменологическом подходе известен некоторый параметр нагружения. В настоящей работе рассматривается случай «жесткого» нагружения, т.е. считается известной величина $\langle \dot{\varepsilon}_x \rangle$, а значит, и $\langle \varepsilon_x \rangle$, которая однозначно связана с величиной α_1 соотношением (7). Поэтому в (10) одну из величин α_1 или $\langle \varepsilon_x \rangle$ можно задавать, считая ее параметром нагружения, и решать систему (10) относительно двух других неизвестных.

Положим в качестве известной величину α_1 . Тогда задавая значение величины α_1 , из второго уравнения системы (10) находим $\sigma(\pi/2)$, затем из первого уравнения - $\langle \sigma_x \rangle$, а из (7) - $\langle \varepsilon_x \rangle$.

в. Для схемы, представленной на рис.3, в, имеем, что $\sigma(\theta) = \sigma_{TM} (0 \leq \theta \leq \alpha_1)$, $\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sigma_{TM}$, а локальные элементы, соответствующие углам $\alpha_1 \leq \theta < \pi/2$, находятся в упругом состоянии. Аналогично рассмотренному выше случаю, подставляя значения микронапряжений в уравнения равновесия (1), используя уравнение совместности (2) и закон Гука, получим

$$\begin{cases} \langle \sigma_x \rangle = \frac{2\sigma_{TM} (5 - 4\cos^3 \alpha_1)}{15}, \\ 5 + 2\cos^3 \alpha_1 - 10\cos \alpha_1 = 0, \\ \langle \varepsilon_x \rangle = \frac{\sigma_{TM}}{15} (1 + \sin^2 \alpha_1). \end{cases} \quad (11)$$

Из второго уравнения определяется значение α_1 , что позволяет найти $\langle \sigma_x \rangle$ и $\langle \varepsilon_x \rangle$. В частности, распределение поля микронапряжений в упругой области $\alpha_1 < \theta < \pi/2$ имеет вид

$$\sigma(\theta) = \frac{\sigma_{TM}}{\cos^2 \alpha_1} (\cos^2 \theta + \sin^2 \alpha_1 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \alpha_1).$$

г. Для данного состояния материала (рис. 3, г) при $0 < \theta < \alpha_1$ имеем $\sigma(\theta) = \sigma_{TM}$; при $\alpha_2 \leq \theta \leq \pi/2 - \sigma(\theta) = -\sigma_{TM}$; а в области $\alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2$ будет упругое распределение микронапряжений. Предполагается, что в этой области разрушения локальных элементов также не происходит.

Запишем уравнения совместности (2) для углов $\theta = \alpha_1$ и $\theta = \alpha_2$ с учетом закона Гука:

$$\begin{cases} \frac{\sigma(\alpha_1)}{E_M} = \langle \varepsilon_x \rangle \cos^2 \alpha_1 + \langle \varepsilon_y \rangle \sin^2 \alpha_1, \\ \frac{\sigma(\alpha_2)}{E_M} = \langle \varepsilon_x \rangle \cos^2 \alpha_2 + \langle \varepsilon_y \rangle \sin^2 \alpha_2. \end{cases} \quad (12)$$

Решая систему (12) относительно $\langle \varepsilon_x \rangle$ и $\langle \varepsilon_y \rangle$, с учетом $\sigma(\alpha_1) = \sigma_{TM}$, $\sigma(\alpha_2) = -\sigma_{TM}$, получим

$$\langle \varepsilon_x \rangle = -\frac{\sigma_{TM}}{E_M} \frac{\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2}{\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_1}; \quad \langle \varepsilon_y \rangle = \frac{\sigma_{TM}}{E_M} \frac{\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2}{\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_1}. \quad (13)$$

В упругой области для $\alpha_1 \leq \Theta \leq \alpha_2$ из (2) имеем

$$\sigma(\Theta) = E_M (\langle \varepsilon_x \rangle \cos^2 \Theta + \langle \varepsilon_y \rangle \sin^2 \Theta). \quad (14)$$

Подставляя в (14) соотношения (13), находим упругое распределение микронапряжений ($\alpha_1 \leq \Theta \leq \alpha_2$):

$$\sigma(\Theta) = \sigma_{TM} \left[-\frac{\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2}{\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_1} \cos^2 \Theta + \frac{\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2}{\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_1} \sin^2 \Theta \right]. \quad (15)$$

Запишем теперь уравнения равновесия (1):

$$\langle \sigma_x \rangle = 2 \left[\int_0^{\alpha_1} \sigma_{TM} \cos^2 \Theta \sin \Theta d\Theta + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sigma(\Theta) \cos^2 \Theta \sin \Theta d\Theta - \int_{\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}} \sigma_{TM} \cos^2 \Theta \sin \Theta d\Theta \right]; \quad (16)$$

$$\int_0^{\alpha_1} \sigma_{TM} \sin^3 \Theta d\Theta + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sigma(\Theta) \sin^3 \Theta d\Theta - \int_{\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}} \sigma_{TM} \sin^3 \Theta d\Theta = 0,$$

где $\sigma(\Theta)$ задается (15). Интегрируя (16), получим

$$\begin{cases} \langle \sigma_x \rangle = \frac{2\sigma_{TM}}{15(\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_1)} \cdot [5(\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_1) - 4(\cos^5 \alpha_2 - \cos^5 \alpha_1)] \\ 2(\cos^5 \alpha_2 - \cos^5 \alpha_1) - 10(\cos^3 \alpha_2 - \cos^3 \alpha_1) + 5(\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_1) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Полная система уравнений для рассматриваемого случая состоит из уравнений (13) и (17). Неизвестными в этой системе являются $\alpha_1, \alpha_2, \langle \sigma_x \rangle, \langle \varepsilon_x \rangle, \langle \varepsilon_y \rangle$, т. е. пять неизвестных, а уравнений – четыре. Но по вышеизложенным соображениям одну из неизвестных можно считать параметром нагружения и задавать, а далее решать систему четырех уравнений относительно остальных четырех неизвестных. Поэтому алгоритм решения системы (13), (17) может быть следующим: задавая значение угла $\alpha_2 < \frac{\pi}{2}$, из второго уравнения (17) определяется значение угла α_1 , а затем последовательно определяются $\langle \sigma_x \rangle, \langle \varepsilon_x \rangle, \langle \varepsilon_y \rangle$.

д. Перейдем теперь к описанию следующего этапа деформирования материала, сопровождающегося разрушением локальных элементов модели (рис.3, д). Но для этого необходимо ввести критерий разрушения локального элемента системы.

Будем использовать энергетический подход, предполагая, что разрушение локального элемента наступает тогда, когда работа микронапряжения на микродеформации пластичности достигает критического значения. В качестве критического будем использовать состояние материала, соответствующее локальному экстремуму на диаграмме упругопластического макродеформирования образца, характеризующегося точкой (σ_S, e_S^p) (см. рис. 2) и отделяющего участки устойчивого и неустойчивого (закритического) деформирования. Тогда элементарный стержень при $\Theta = const$ находится в неразрушенном состоянии, если

$$\int_0^{e^p} \sigma(\Theta) de^p(\Theta) < A_p^* \quad (18)$$

и разрушается, если выполняется условие

$$\int_0^{e^p} \sigma(\Theta) de^p(\Theta) = A_p^*, \quad (19)$$

где A_p^* - критическая величина работы (характеристика материала).

В силу того, что в пластическом состоянии в зоне растяжения $\sigma(\Theta) = \sigma_{TM}$ и $e^p(\Theta) > 0$, а в зоне сжатия $\sigma(\Theta) = -\sigma_{TM}$ и $e^p(\Theta) < 0$, неравенство (18) принимает вид

$$\sigma_{TM} |e^p(\Theta)| < A_p^*. \quad (20)$$

Величину A_p^* можно определить следующим образом. Первым разрушится наиболее нагруженный локальный элемент при $\Theta = 0$. Поскольку в силу гипотезы однородности деформации по объему (3) в момент разрушения имеем, что $e^p(0) = \langle \varepsilon_x \rangle = e_s^p$, то тогда из (19) получим

$$A_p^* = \int_0^{e_s^p} \sigma_{TM} de^p(0) = \sigma_{TM} e_s^p. \quad (21)$$

С учетом (21) критерий разрушения (19) принимает деформационный характер и имеет вид

$$|e^p(\Theta)| = e_s^p. \quad (22)$$

Учитывая вышеизложенное, рассмотрим схему деформирования, представленную на рис. 3, д. Здесь при $0 \leq \Theta \leq \alpha_3$ локальные элементы модели разрушены; при $\alpha_3 \leq \Theta \leq \alpha_1$ имеем $\sigma(\Theta) = \sigma_{TM}$; при $\alpha_1 \leq \Theta \leq \alpha_2$ будет упругое состояние, а при $\alpha_2 \leq \Theta \leq \pi/2$ - $\sigma(\Theta) = -\sigma_{TM}$.

Записывая уравнения совместности деформаций (2) для $\Theta = \alpha_1$, $\Theta = \alpha_2$ с учетом закона Гука, получим систему (12), решение которой относительно $\langle \varepsilon_x \rangle, \langle \varepsilon_y \rangle$ имеет вид (13).

При $\Theta = \alpha_3$ из (2) (с учетом выражений для $\langle \varepsilon_x \rangle, \langle \varepsilon_y \rangle$ из (13)) имеем

$$\frac{\sigma_{TM}}{E_M} + e_s^p = -\frac{\sigma_{TM}}{E_M} \left[\frac{\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2}{\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_1} \cos^2 \alpha_3 - \frac{\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2}{\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_1} \sin^2 \alpha_3 \right]. \quad (23)$$

Записывая уравнения равновесия (1), получим

$$\langle \sigma_x \rangle = 2 \left[\int_{\alpha_3}^{\alpha_1} \sigma_{TM} \cos^2 \Theta \sin \Theta d\Theta + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sigma(\Theta) \cos^2 \Theta \sin \Theta d\Theta - \int_{\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}} \sigma_{TM} \cos^2 \Theta \sin \Theta d\Theta \right]; \quad (24)$$

$$\int_{\alpha_3}^{\alpha_1} \sigma_{TM} \sin^3 \Theta d\Theta + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sigma(\Theta) \sin^3 \Theta d\Theta - \int_{\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}} \sigma_{TM} \sin^3 \Theta d\Theta = 0,$$

где $\sigma(\Theta)$ в упругой области задается так же, как и в случае z соотношением (15). Интегрируя (24) и присоединяя к полученному (13), (23) имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \langle \sigma_x \rangle = \frac{2\sigma_{TM}}{15(\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_1)} \left[5\cos^3 \alpha_3 (\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_1) - 4(\cos^5 \alpha_2 - \cos^5 \alpha_1) \right] \\ 4(\cos^5 \alpha_2 - \cos^5 \alpha_1) - 20(\cos^3 \alpha_2 - \cos^3 \alpha_1) - 5(\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_1) \times \\ \times (\cos^2 \alpha_3 - 3\cos \alpha_3) = 0; \\ \langle \varepsilon_x \rangle = -\frac{\sigma_{TM}}{E} \frac{\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2}{\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_1}; \\ \langle \varepsilon_y \rangle = \frac{\sigma_{TM}}{E} \frac{\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2}{\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_1}; \\ e_s^p = -\frac{\sigma_{TM}}{E_M} \left[1 + \frac{\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2}{\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_1} \cos^3 \alpha_3 - \frac{\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2}{\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_1} \sin^2 \alpha_3 \right]. \end{cases} \quad (25)$$

Алгоритм решения системы (25) может быть следующим: задается значение угла α_3 , играющего роль параметра нагружения; из системы уравнений, образованной вторым и пятым

уравнениями (25) ,определяются значения α_1 и α_2 ; зная $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. находим последовательно $\langle \varepsilon_x \rangle, \langle \varepsilon_y \rangle, \langle \sigma_x \rangle$.

е. Рассмотрим заключительный этап разрушения образца, изображенный схематически на рис. 3, е. Здесь разрушаются не только элементы в зоне пластического растяжения при $0 \leq \Theta \leq \alpha_3$, но и в зоне пластического сжатия $\alpha_4 \leq \Theta \leq \pi/2$. В области $\alpha_3 \leq \Theta \leq \alpha_1$ имеем $\sigma(\Theta) = \sigma_{TM}$; при $\alpha_4 \leq \Theta \leq \alpha_2$ - $\sigma(\Theta) = -\sigma_{TM}$, а в зоне $\alpha_1 \leq \Theta \leq \alpha_2$ локальные элементы находятся в упругой области.

Записывая уравнения совместности деформации для $\Theta = \alpha_1, \Theta = \alpha_2, \Theta = \alpha_3, \Theta = \alpha_4$, подставляя напряжение $\sigma(\Theta)$ в уравнения равновесия и выполняя их интегрирование, получим следующую математическую модель для рассматриваемого случая:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \varepsilon_x \rangle = -\frac{\sigma_{TM}}{E} \frac{\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2}{\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_1}; \\ \langle \varepsilon_y \rangle = \frac{\sigma_{TM}}{E} \frac{\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2}{\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_1}; \\ \frac{\sigma_{TM}}{E_M} + e_s^p = \langle \varepsilon_x \rangle \cos^2 \alpha_3 + \langle \varepsilon_y \rangle \sin^2 \alpha_3; \\ -\frac{\sigma_{TM}}{E_M} - e_s^p = \langle \varepsilon_x \rangle \cos^2 \alpha_4 + \langle \varepsilon_y \rangle \sin^2 \alpha_4; \\ \langle \sigma_x \rangle = \frac{2\sigma_{TM}}{15(\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_1)} \left[5(\cos^3 \alpha_4 + \cos^3 \alpha_3)(\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_1) - 4(\cos^5 \alpha_2 - \cos^5 \alpha_1) \right] \\ 4(\cos^5 \alpha_2 - \cos^5 \alpha_1) - 20(\cos^3 \alpha_2 - \cos^3 \alpha_1) - 5(\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_1) \times \\ \times (\cos^3 \alpha_3 - \cos^3 \alpha_4) + 15(\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_1)(\cos \alpha_3 - \cos \alpha_4) = 0. \end{array} \right. \quad (26)$$

Схема решения системы (26) может быть следующей. Задавая, например, в качестве параметра нагружения α_4 , из третьего, четвертого и пятого уравнений (26) имеем систему трех уравнений относительно трех неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; зная величины всех углов α_i ($i = \overline{1,4}$), определяем величины $\langle \sigma_x \rangle, \langle \varepsilon_x \rangle, \langle \varepsilon_y \rangle$. Таким образом, схема деформирования одноосного образца вплоть до разрушения математически описана полностью.

Реализация изложенного алгоритма осуществлялась с использованием численных процедур решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений.

Экспериментальная проверка результатов расчета диаграмм упругопластического дефор-

Р и с. 4. Экспериментальная (сплошная линия) и расчетная по структурной модели (штриховая линия) диаграммы упругопластического деформирования жаропрочного сплава ЭИ617 при $T = 900^\circ \text{C}$

Р и с. 5. Экспериментальная (сплошная линия) и расчетная по структурной модели (штриховая линия) диаграммы упругопластического деформирования жаропрочного сплава ЭП693 при $T = 850^\circ \text{C}$

мирования на основании структурной модели проводилась для различных классов материалов и температур. В качестве примера на рис. 4-5 приведены экспериментальные (сплошные линии) и расчетные (штриховые линии) по структурной модели диаграммы мгновенного упругопластического деформирования для жаропрочных сплавов ЭИ617 при $T=900^{\circ}\text{C}$ и ЭП693 при $T=850^{\circ}\text{C}$.

Экспериментальные данные для сплава ЭП693 – из работы [26], а для ЭИ617 взяты из работы [27].

На рис. 6 представлены расчетная (штриховая линия) и экспериментальная (сплошная линия) [28] диаграммы упругопластического деформирования при сжатии каменной соли при комнатной температуре.

Как следует из приведенных на рис. 4-6 графических зависимостей диаграмм упругопластического деформирования, для разных классов материалов наблюдается удовлетворительное соответствие расчетных и экспериментальных данных.

Проанализируем более подробно эффекты накопления поврежденности, следствием которых в конечном итоге является участок неустойчивого деформирования, с позиций предложенной структурной модели.

Идеализированные схемы б, в, г на рис.3 с феноменологических позиций описывают процесс накопления рассеянной поврежденности без эффекта существенного изменения эффективной площади сечения образца, так как здесь локальные элементы структурной модели не разрушаются. Однако в них накапливаются необратимые изменения, что ведет к концентрации энергии в наиболее нагруженных элементах системы. С феноменологических позиций эти схемы описывают концентрацию микронапряжений в областях, содержащих дефекты внутренней структуры материала (дефекты в геометрии атомной (кристаллической) решетки и межатомных связей, дислокации и т.п.). При этом нарушения сплошности материала на этих стадиях упрочнения не наблюдается.

Схемы д и е на рис. 3 моделируют ниспадающую ветвь диаграммы за счет разрушения локальных элементов модели и, как следствие этого, снижение несущей способности образца при растяжении. С феноменологических позиций эти схемы отражают процессы появления в материале микропор, микротрещин, пустот между кристаллами и т. п. Здесь происходит нарушение сплошности материала на микроуровне, что ведет на феноменологическом уровне к уменьшению эффективной площади поперечного сечения образца и снижению величины растягиваемой нагрузки при заданной скорости деформирования ($\dot{\epsilon} = \text{const}$).

Коснемся еще одного важного экспериментального факта, обнаруженного в работе [28], где экспериментально определялся модуль упругости горных пород в зависимости от степени накопления деформации и поврежденности. Отмечено, что модули упругости, определенные по продольным деформациям при разгрузке образца, изменяются незначительно в довольно широком диапазоне нагрузок: от начала нагрузки до максимально достижимого напряжения при сжатии σ_s^c и в процессе разупрочнения образца до напряжения, составляющего около 60% σ_s^c , модули упругости практически были постоянными. При дальнейшем деформировании в области физического разрушения образца модули Юнга уменьшились в 2-3 раза. Параллельно с этим резко увеличились поперечные деформации по сравнению с продольными, так что это привело к увеличению объема образца примерно до 10 % и более от первоначального. Все это свидетельствует о раскрытии микротрещин в материале на заключительной стадии деформирования, существенному разрушению микроструктуры образца и резкому уменьшению эффективной площади поперечного сечения образца.

Этот экспериментальный факт также моделируется структурной моделью и характеризует переход механизма разрушения от схемы д к схеме е на рис. 3. Здесь начинают разрушаться поперечно ориентированные локальные элементы, что ведет к резкой интенсификации поперечной макродеформации. С феноменологических позиций это, по всей видимости, соответствует появлению трещины и образованию шейки на образце.

Р и с. 6. Экспериментальная сплошная линия [822] и расчетная по структурной модели (штриховая линия) диаграммы мгновенного упругопластического деформирования каменной соли при комнатной температуре при одноосном сжатии

Таким образом, суммируя вышеизложенное, можно утверждать, что ниспадающий участок диаграммы деформирования является характеристикой материала, что подтверждено как экспериментальными, так и теоретическими исследованиями. Причиной этого участка является структурное разрушение микронеоднородной среды.

Здесь уместно отметить, что стремление описать накопление повреждений на закритической стадии деформирования породило развитие новой ветви в механике деформируемого твердого тела, а именно, разработку и усовершенствование моделей материала с целью описания накопления повреждений на закритической стадии деформирования. Это, в свою очередь, стимулировало развитие методов решения краевых задач пластичности по определению напряженно-деформированного состояния, предельной несущей способности и разрушению элементов конструкций, учитывающих возможность работы материала на стадии разрушения, которая характеризуется падающей ветвью диаграммы деформирования [1,2,14,29,30].

На основании вышеизложенного можно сделать следующие выводы.

1. Предложенная структурная модель позволяет с позиций статики расчетным путем прогнозировать диаграмму упругопластического деформирования металлов, включая участок закритического деформирования.
2. Показано, что участок закритического деформирования связан с появлением и развитием зон микроразрушения локальных элементов, что с феноменологических позиций соответствует интенсивному накоплению поврежденности, уменьшению истинной площади поперечного сечения образца (пластическому разрыхлению материала) и одновременно уменьшению номинального напряжения при увеличении значения пластической деформации.
3. Предложенная модель может быть использована в качестве математического моделирующего комплекса упругопластического деформирования, накопления поврежденности и разрушения металлов с целью построения адекватных феноменологических моделей указанных процессов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вильдеман В. Э., Соколкин Ю. В., Ташикинов А. А. Краевые задачи континуальной механики разрушения. Пермь, Препринт/УрОРАН, 1992. 78с.
2. Вильдеман В. Э., Соколкин Ю. В., Ташикинов А. А. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1997. 288с.
3. Фридман Я.Б. Механические свойства металлов. Ч.1 Деформация и разрушение. М.:Машиностроение, 1974. 472с.
4. Лебедев А.А., Марусий О.И., Чаусов Н.Г., Зайцева Л.В. Исследование кинетики разрушения материалов на заключительной стадии деформирования // Проблемы прочности. 1982. №1. С.12-18.
5. Дубровина Г.И., Соковнин Ю.П., Гуськов Ю.П. и др. К теории накопления повреждений// Проблемы прочности. 1975. №2. С.21-24.
6. Пежина П. Моделирование закритического поведения и разрушения диссипативного твердого тела// Теоретические основы инженерных расчетов. 1984. Т.106. №4. С.107-117.
7. Фридман Я.Б. Механические свойства металлов. Ч.2. Механические испытания. Конструкционная прочность. М.: Машиностроение, 1974. 368с.
8. Черепанов Г.П. О закритических деформациях // Проблемы прочности. 1985. №8. С.3-8.
9. Никитин Л.В., Рыжак Е.И. Об осуществимости состояний материала, соответствующих “падающему” участку диаграммы // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. №2. С.155-161.
10. Рыжак Е.И. К вопросу об осуществимости однородного закритического деформирования при испытаниях в жесткой трехосной машине // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. №1. С. 111-127.
11. Лебедев А.А., Чаусов Н.Г. Установка для испытания материалов с построением полностью равновесных диаграмм деформирования // Проблемы прочности. 1981. №12. С.104-106.
12. Лебедев А.А., Чаусов Н.Г., Евсцкий Ю.П. Методика построения полных диаграмм деформирования листовых материалов. // Проблемы прочности. 1986. №9. С.29-32.
13. Лебедев А.А., Чаусов Н.Г., Марусий О.И. и др. Кинематика разрушения листовой аустенитной стали на заключительной стадии деформирования. // Проблемы прочности. 1989. №3. С.16-21.
14. Стружасов В.В., Миронов В.И. Деформационное разрушение материала в элементах конструкций. Екатеринбург: УрО РАН, 1995. 190 с.
15. Шин Р.Г., Катков В.Л. Механизмы деформирования микронеоднородной среды // Проблемы прочности. 1987. №10. С.72-74.
16. Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения. // Вопросы прочности материалов и конструкций. Сб. тр. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С.5-7.
17. Новожилов В.В. О пластическом разрыхлении // Прикладная математика и механика. 1965. Т.29. №4. С. 681-689.
18. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести / Изв. АН СССР. ОТН. 1958. №8. С.26-31.

19. Радченко В.П., Панферова Е.В. Структурная математическая модель упругопластического деформирования и разрушения металлов в одноосном случае // Вестн. СамГТУ. Вып. 4. Сер. «Физ. – мат. науки». Самара: СамГТУ, 1996. С.78-84.
20. Радченко В.П., Панферова Е.В. Моделирование неупругого деформирования и разрушения материалов на основании структурной модели // Численные и аналитические методы расчета конструкций: Тр. междунар. конф. Самара, 1998. С.82 –86.
21. Новожилов В.В., Кадашечев Ю.И. Микронапряжения в конструкционных материалах. Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1990. 223 с.
22. Гохфельд Д.А., Садаков О.С. Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторном нагружении. М.: Машиностроение, 1984. 256 с.
23. Розенберг В.М. Основы жаропрочности металлических материалов. М.: Металлургия, 1973. 328с.
24. Weng G.J. A physically consistent method for the predictions of creep behavior of metals // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1979. №4. P.800 – 804.
25. Besseling J.F. Plasticity and creep theory in engineering mechanics // Top. Appl. Continuum. Mech.- Wien – New – York. 1974. P. 115 – 135.
26. Радченко В.П. Энергетический вариант одноосной теории ползучести и длительной прочности // Журн. прикл. мех. и техн. физики. 1991. №4. С. 172 – 179.
27. Булыгин и др. Атлас диаграмм растяжения при высоких температурах, кривые ползучести и длительной прочности сталей и сплавов для двигателей. М.: Оборонгиз, 1953. 173 с.
28. Карташов Ю.М., Матвеев Б.В., Михеев Г.В., Фадеев А.Б. Прочность и деформируемость горных пород. М.: Недра, 1979. 269 с.
29. Волков С.Д. Функция сопротивления материалов и постановка краевых задач механики разрушения // УНЦ АН СССР. Ин – т металлургии. Препринт. Свердловск, 1986. 65с.
30. Ибрагимов В.А., Ключников В.Д. Некоторые задачи для сред с падающей диаграммой // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. №4. С.116 – 121.