Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Т. Каракеев, Численное решение линейных интегральных уравнений Вольterra третьего рода, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 30, 73–76

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu310>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 12:54:05

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА

На основе регуляризованного уравнения обоснован метод численного решения интегральных уравнений Вольтерра третьего рода. Установлена связь малого параметра и шага дискретизации, необходимая для достижения сходимости приближенного решения к точному. Проведен численный эксперимент.

В работе [1] показано, что интегральное уравнение Вольтерра третьего рода, содержащее известную невозрастающую функцию и имеющее решение в пространстве непрерывных функций, регуляризуемо и его решение единственно в этом пространстве. Основываясь на этом, изучим способы приближенного решения интегрального уравнения Вольтерра третьего рода

$$p(x)v(x) + \int_0^x K(x,t)v(t)dt = f(x). \quad (1)$$

Предполагается, что $v(x) \in C^l[0, b]$, известные функции $p(x), f(x), K(x, t)$ подчиняются условиям:

a) $f(x) \in C^l[0, b]$, $K(x, t) \in C^l(D)$, $K(x, x) \geq 0$, $(x, t) \in D = \{0 \leq t \leq x \leq b\}$, $p(x) \in C^2[0, b]$, $p(b) = 0$, $p(x)$ - невозрастающая функция.

Уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$(Av)(x) + (Gv)(x) = (Lv)(x) + g(x), \quad (2)$$

где $(Lv)(x) = \int_0^x L(x, t)v(t)dt$, $(Gv)(x) = \int_0^x G(t)v(t)dt$, $g(x) = f(x) + C_0 \int_0^x f(t)dt$, $(Av)(x) = p(x)v(x)$,

$$G(x) = C_0 p(x) + K(x, x), \quad L(\tau, t) = K(t, t) - K(x, t) - C_0 \int_t^x K(v, t)dv, \quad 0 < C_0 = \text{const}.$$

В пространстве $C^l[0, b]$ для решения уравнения (2) регуляризирующим является семейство уравнений [1]

$$(\varepsilon I + A)v_\varepsilon(x) + (Gv_\varepsilon)(x) = (Lv_\varepsilon)(x) + \varepsilon v(0) + g(x) \quad (3)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, где I – тождественный оператор, если найдутся такие положительные числа θ_1 , θ_2 и C_0 , что для функции $G(x)$ выполняются условия:

$$0 < d_1 \leq G(x), \quad \theta_1 G(x) + p'(\tau) \geq 0, \quad \theta_1 + \theta_2 = 1. \quad (4)$$

Частично обратим уравнение (3), используя резольвенту ядра $-G(t)/(\varepsilon + p(x))$:

$$v_\varepsilon(x) = (H_\varepsilon [Lv_\varepsilon])(x) + \varepsilon (H_\varepsilon v_0)(x) + (H_\varepsilon g)(x). \quad (5)$$

Здесь оператор H_ε имеет вид

$$(H_\varepsilon g)(x) = -\frac{1}{\varepsilon + p(x)} \int_0^x \exp\left(-\int_t^x \frac{G(v)}{\varepsilon + p(v)} dv\right) G(t) \frac{g(t) - g(x)}{\varepsilon + p(t)} dt + \frac{1}{\varepsilon + p(x)} \exp\left(-\int_0^x \frac{G(v)}{\varepsilon + p(v)} dv\right) g(x), \quad (6)$$

$$\varepsilon (H_\varepsilon v_0)(x) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + p(x)} v_0 \exp\left(-\int_0^x \frac{G(t)}{\varepsilon + p(t)} dt\right).$$

Введем на $[0, b]$ равномерную сетку $\omega_h = \{x_i = ih, i = 0..n, b = hn\}$ и обозначим через C_h пространство сеточных функций $v_i = v(x_i)$ с нормой

$$\|v_i\|_{C_h} = \max_{0 \leq i \leq n} |v_i|. \quad (7)$$

Аппроксимируем интегралы в (5) по квадратурной формуле правых прямоугольников. Тогда получим треугольную систему линейных алгебраических уравнений

$$v_{\varepsilon, i} = -\frac{1}{\varepsilon + p_i} h \sum_{j=1}^i W_{i,j}^{\varepsilon, h} G_j [h \sum_{k=1}^j L_{j,k} v_{\varepsilon, k} - h \sum_{k=1}^i L_{i,k} v_{\varepsilon, k} + g_j - g_i] + \tilde{W}_{i,1}^{\varepsilon, h} [h \sum_{j=1}^i L_{i,j} v_{\varepsilon, j} + g_i + \varepsilon v_0], \quad i = 1..n, \quad (8)$$

где $L_{j,k} = L(x_j, x_k)$, $v_{\varepsilon, j} = v_\varepsilon(x_j)$, $g_i = g(x_i)$, $p_i = p(x_i)$, $x_j = jh$, $j = 1..i$,

$$L(x_i, x_k) = -K(x_i, x_k) + K(x_k, x_k) - C_0 h \sum_{m=k+l}^i K(x_m, x_k), \quad i=l..n, \quad v_0 = v(0),$$

$$W_{i,j}^{\varepsilon,h} = \frac{1}{\varepsilon + p_j} \exp\left(-h \sum_{m=j}^i \frac{G_m}{\varepsilon + p_m}\right), \quad \tilde{W}_{i,l}^{\varepsilon,h} = \frac{1}{\varepsilon + p_0} \exp\left(-h \sum_{m=l}^i \frac{G_m + p'_m}{\varepsilon + p_m}\right), \quad i=l..n.$$

Так как

$$\left(\sum_{m=k+l}^i K_{m,k}\right)\big|_{k=i} = \left(\sum_{m=l}^i K_{m,k} - \sum_{m=l}^k K_{m,k}\right)\big|_{k=i} = 0,$$

то

$$\sum_{k=l}^i L_{i,k} v_k = -\sum_{k=l}^i (K_{i,k} - K_{k,k}) v_k - C_0 \sum_{k=l}^i \left(\sum_{m=k+l}^i K_{m,k}\right) v_k = \sum_{k=l}^{i-l} L_{i,k} v_k.$$

Поэтому (8) примет вид

$$v_{\varepsilon,i} = -\frac{1}{\varepsilon + p_i} h \sum_{j=l}^i W_{i,j}^{\varepsilon,h} G_j \left[h \sum_{k=l}^{j-l} L_{j,k} v_{\varepsilon,k} - h \sum_{k=l}^{i-l} L_{i,k} v_{\varepsilon,k} + g_j - g_i \right] + \tilde{W}_{i,l}^{\varepsilon,h} \left[h \sum_{j=l}^{i-l} L_{i,j} v_{\varepsilon,j} + g_i + \varepsilon v_0 \right], \quad i=l..n. \quad (9)$$

Лемма 1. При выполнении условий *a)* и (4) для решения системы (9) имеет место оценка

$$\|v_{\varepsilon,i}\|_{C_h} \leq (v_0 + N_0 + N_l) M_l, \quad (10)$$

где $N_0 = \max_{[0,b]} |f(x)|$, $N_l = \max_{[0,b]} |f'(x)|$, M_l – постоянная, не зависящая от h и ε .

Доказательство. Используя условие *a)*, получим

$$|L_{i,k} - L_{j,k}| \leq (T_l + C_0 T_0)(hi - hj), \quad |L_{i,k}| \leq (T_l + C_0 T_0)(hi - hk), \quad (11)$$

$T_0 = \max_D |K(x, t)|$, $T_l = \max_D |K'_x(x, t)|$. Тогда

$$\begin{aligned} & \left| h \sum_{k=l}^{j-l} L_{j,k} v_{\varepsilon,k} - h \sum_{k=l}^{i-l} L_{i,k} v_{\varepsilon,k} \right| \leq h \sum_{k=l}^{j-l} |L_{j,k} - L_{i,k}| |v_{\varepsilon,k}| + h \sum_{k=j}^{i-l} |L_{i,k}| |v_{\varepsilon,k}| \leq (T_l + C_0 T_0) \times \\ & \times (hi - hj) h \sum_{k=l}^{j-l} |v_{\varepsilon,k}| + (T_l + C_0 T_0) \sum_{k=j}^{i-l} (hi - kh) |v_{\varepsilon,k}| \leq 2(T_l + C_0 T_0)(hi - jh) \sum_{k=l}^{i-l} |v_{\varepsilon,k}|. \end{aligned}$$

Поскольку $p(x_k) \leq p(x_j)$ при всех $j \leq k$, то учитывая условие (4), имеем

$$\frac{1}{\varepsilon + p_j} (hi - jh) \leq h \sum_{k=j}^i \frac{1}{\varepsilon + p_k} \leq d_l^{-l} h \sum_{k=j}^i \frac{G_k}{\varepsilon + p_k}.$$

На основе приведенных оценок получим

$$\left| -\frac{1}{\varepsilon + p_i} h \sum_{j=l}^i W_{i,j}^{\varepsilon,h} G_j \left[h \sum_{k=l}^{j-l} L_{j,k} v_{\varepsilon,k} - h \sum_{k=l}^{i-l} L_{i,k} v_{\varepsilon,k} + g_j - g_i \right] \right| \leq [2T_2 h \sum_{k=l}^{i-l} |v_{\varepsilon,k}| + N_l + C_0 N_0] T_3 d_l^{-l} \sum_{v=0}^{\mu} e^{-v} v^2,$$

где $v = h \sum_{m=j}^i \frac{G_m}{\varepsilon + p_m}$, $\mu = h \sum_{m=l}^i \frac{G_m}{\varepsilon + p_m}$, $T_2 = T_l + C_0 T_0$, $T_3 = \max_{[0,b]} |G(x)|$.

Выражение $S_\mu = \sum_{v=0}^{\mu} e^{-v} v^2$ мажорируется рядом $\sum_{v=0}^{\infty} e^{-v} v^2$, сходимость которого следует из признака Маклорена-Коши [2]. Таким образом, $S_\mu < +\infty$.

Аналогично, используя условия *a)* и (4), для второго выражения в (9) имеем

$$\left| \tilde{W}_{i,l}^{\varepsilon,h} \left[h \sum_{j=l}^{i-l} L_{i,j} v_{\varepsilon,j} + g_i + \varepsilon v_0 \right] \right| \leq \frac{1}{\varepsilon + p_0} [T_2 h \sum_{k=l}^{i-l} |v_{\varepsilon,k}| + (I + bC_0) N_0 + \varepsilon v_0].$$

Тогда из системы уравнений (9), введя обозначения $T_4 = T_2(2d_l^{-l} S_0 T_3 + p_0^{-l})$, $d_2 = \max\{d_l^{-l} S_0 T_3, p_0^{-l}(I + bC_0) + d_l^{-l} S_0 C_0 T_3\}$, $S_0 = \sup |S_\mu|$ получим

$$|v_{\varepsilon,i}| \leq T_4 h \sum_{k=l}^{i-l} |v_{\varepsilon,k}| + (N_l + N_0) d_2 + \varepsilon v_0.$$

Откуда непосредственно следует оценка [2]

$$\|v_{\varepsilon,i}\|_{C_h} \leq [v_0 + (N_l + N_0) d_2] \exp(bT_4).$$

Лемма 2. Если выполняются условия $a)$, (4) и $v(x) \in C^l[0, b]$, то справедлива оценка

$$\|H_\varepsilon^h[v_i - v_0]_{C_h}\| \leq N_4, \quad (12)$$

$$H_\varepsilon^h[v_i - v_0] = -\frac{I}{\varepsilon + p_i} h \sum_{j=l}^i W_{i,j}^{\varepsilon,h} G_j[v_j - v_i] + \tilde{W}_{i,l}^{\varepsilon,h}[v_i - v_0], \quad N_4 = T_3 S_0 r_l / d_l + 2r_0 / p_0, \quad |v(x)| \leq r_0,$$

$$|v'(x)| \leq r_l, \quad r_0, r_l = \text{const}.$$

Лемма 3. Если выполняются условия $a)$ и (4), то при соблюдении связи $\varepsilon = O(h^\alpha)$, $\alpha > 0$ справедливо неравенство

$$\left| \int_0^x \frac{G(s) + p'(s)}{\varepsilon + p(s)} ds - h \sum_{m=l}^i \frac{G_m + p'_m}{\varepsilon + p_m} \right| \leq O(h^\beta), \quad \beta = l - 2\alpha. \quad (13)$$

Теорема 1. Пусть имеют место условия $a)$, (4) и $\varepsilon = O(h^\alpha)$. Тогда для всех $0 < \alpha \leq l/2$ решение системы (9) при $h \rightarrow 0$ равномерно сходится к v_i - точному решению уравнения (2), причем справедлива оценка

$$\|v_{\varepsilon,i} - v_i\|_{C_h} \leq O(h^\alpha).$$

Доказательство. Преобразуем уравнение (2) к следующему эквивалентному виду

$$v(x) = (H_\varepsilon[Lv])(x) + \varepsilon(H_\varepsilon v)(x) + (H_\varepsilon g)(x), \quad (14)$$

где H_ε определяется по формуле (6). Полагая $x = x_i$ в (14), применим формулу правых прямоугольников для интегралов. Тогда получим систему уравнений

$$v_i = -\frac{I}{\varepsilon + p_i} h \sum_{j=l}^i W_{i,j}^{\varepsilon,h} G_j \left[h \sum_{k=l}^{j-1} L_{j,k} v_k - h \sum_{k=l}^{i-1} L_{i,k} v_k + \varepsilon(v_j - v_i) + g_j - g_i \right] + \tilde{W}_{i,l}^{\varepsilon,h} \left[h \sum_{j=l}^{i-1} L_{i,j} v_j + g_i + \varepsilon v_i \right] + R_i, \quad i = l..n, \quad (15)$$

где R_i - сумма всех остаточных членов интегралов, входящих в (14). Введем вектор погрешности $\eta_{\varepsilon,i}^h = v_\varepsilon(x_i) - v(x_i) = v_{\varepsilon,i} - v_i$, $i = l..n$. Тогда из (9) и (15) получим

$$\eta_{\varepsilon,i}^h = -\frac{I}{\varepsilon + p_i} h \sum_{j=l}^i W_{i,j}^{\varepsilon,h} G_j \left[h \sum_{k=l}^{j-1} L_{j,k} \eta_{\varepsilon,k}^h - h \sum_{k=l}^{i-1} L_{i,k} \eta_{\varepsilon,k}^h - \varepsilon(v_j - v_i) \right] + \tilde{W}_{i,l}^{\varepsilon,h} \left[h \sum_{j=l}^{i-1} L_{i,j} \eta_{\varepsilon,j}^h - \varepsilon(v_i - v_0) \right] - R_i, \quad i = l..n. \quad (16)$$

Повторяя выкладки доказательства леммы 1, из (16) приходим к неравенству

$$|\eta_{\varepsilon,i}^h| \leq T_4 h \sum_{k=l}^{i-1} |\eta_{\varepsilon,k}^h| + \varepsilon |H_\varepsilon^h(v_i - v_0)| + |R_i|, \quad i = l..n.$$

Тогда применяя разностный аналог леммы Гронуолла-Беллмана [4], имеем

$$|\eta_{\varepsilon,i}^h| \leq (\varepsilon |H_\varepsilon^h(v_i - v_0)| + |R_i|) \exp(bT_4).$$

Следовательно, учитывая (12) по сеточной норме, получим

$$\|\eta_{\varepsilon,i}^h\|_{C_h} \leq (N_4 \varepsilon + \|R_i\|_{C_h}) \exp(bT_4). \quad (17)$$

Поскольку остаточный член $\|R_i\|_{C_h} \leq N_5 h + N_6 h / \varepsilon$, $N_5, N_6 = \text{const}$, то из (17) следует

$$\|\eta_{\varepsilon,i}^h\|_{C_h} \leq (N_4 \varepsilon + N_5 h + N_6 h / \varepsilon) \exp(bT_4). \quad (18)$$

Таким образом получили оценку, которая является типичной в теории регуляризации [5] и требует согласованности малого параметра с шагом дискретизации. Для сходимости метода (9) достаточно брать $\varepsilon = O(h^\alpha)$, $0 < \alpha \leq l/2$. Причем, так же как в [4], можно установить явную форму связи ε и h , при которых (18) дает наименьшую погрешность приближенного решения. Определим ε из минимума правой части (18). Тогда

$$\varepsilon = (d_6 h / N_4)^{\frac{1}{2}}, \quad d_6 = N_6 \exp(bT_4).$$

Замечание. Погрешность, допускаемую в процессе вычисления $v_{\varepsilon,i}$ по правилу (9), обозначим через δ_i . Тогда $v_{\varepsilon,i}$ будет удовлетворять системе уравнений:

$$v_{\varepsilon,i} = -\frac{1}{\varepsilon + p_i} h \sum_{j=1}^i W_{i,j}^{\varepsilon,h} G_j [h \sum_{k=1}^{j-1} L_{j,k} v_{\varepsilon,k} - h \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k} v_{\varepsilon,k} + g_j - g_i] + \tilde{W}_{i,l}^{\varepsilon,h} [h \sum_{j=1}^{i-1} L_{i,j} v_{\varepsilon,j} + g_i + \varepsilon v_0] + \delta_i, i=1..n..$$

Если δ_i - погрешность вычислительного правила, стремится к нулю равномерно относительно i при $h \rightarrow 0$ и выполняются условия $a)$, (4), то при $\varepsilon = O(h^\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1/2$ и $h \rightarrow 0$ имеет место оценка

$$\|v_{\varepsilon,i} - v_i\|_{C_h} \leq O(h^\alpha) + \delta_i d_g, \quad 0 < d_g = const.$$

Численный анализ показал, что решение регуляризованной системы (3) зависит от свойств функции $p(x)$. Обращение в нуль этой функции в некоторой точке приводит к относительному замедлению сходимости приближенного решения в окрестности данной точки. Длина этой окрестности зависит от величины шага дискретизации и от задания самой функции $p(x)$. Поскольку функция $p(x)$ обращается в нуль только в одной точке $x=b$, то из множества узловых точек $\omega_h = \{x_i = ih, i = 0..n\}$ можно выделить подмножество, где отклонение приближенного решения от точного окажется наибольшим. Оно запишется следующим образом : $\omega_h^I = \{x_i = ih / p(x_i) \leq \varepsilon, i = k..n\}$. Это следует из анализа оценки

$$|v_{\varepsilon,i} - v_i| \leq \left(\frac{d_7 h}{\varepsilon + p_i} + N_4 \varepsilon + d_6 h \right) \exp(bT_4), \quad \text{при } \varepsilon = O(h^\alpha), \quad 0 < \alpha \leq 1/2$$

и подтверждается результатами численного эксперимента. Для реализации вычислений по схеме (9) составлена программа на языке Delphi 6. Проведен численный эксперимент с данными, когда $x \in [0,1]$, $p(x) = (1-x)^2/2$, $K(x,t) = 4x-t$, $f(x) = 4x^2 - x + 1/2$. При этом, если $C_0 = 2$, $\theta_1 = \theta_2 = 1/2$, то выполняются условия $a)$ и (4). Результаты программы подтверждают теоретические выводы. Наибольшее отклонение δ от точного решения при различных значениях шага дискретизации достигается в точке $x=1$. Если $h=0.1$, то $\delta < 0.1786$. При $h=0.01$ ошибка $\delta < 0.04$, а при $h=0.001$ величина $\delta < 0.0101$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Каракеев Т.Т. Регуляризация нелокальной граничной задачи для псевдопараболических уравнений //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек : Илим, 2003. Вып. 32. С. 179-183.
2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. М.: Высш. школа, 1988. Т. 2. 576 с.
3. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. М.: Наука, 1977. Т. II. 400 с.
4. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука, Сибирская издат. фирма РАН. 1999. 193 с.
5. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 232 с.

Поступила 26.05.2004 г.