Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Э. Сеницкий, А. Ю. Сеницкий, К проблеме разложения по собственным вектор-функциям в нестационарных начально-краевых задачах динамики оболочек вращения, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 30, 83–91

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu312>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 16:36:21

Приложения дифференциальных уравнений

УДК 539.3: 517.956

Ю.Э. Сеницкий, А.Ю. Сеницкий

К ПРОБЛЕМЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ВЕКТОР-ФУНКЦИЯМ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Показана принципиальная возможность применения метода разложения по собственным вектор-функциям (в форме конечных интегральных преобразований) в нестационарных осесимметричных задачах динамики оболочек вращения с произвольным меридианом при наиболее общих условиях нагружения и закрепления на контуре. Исследование основано на гиперболических системах дифференциальных уравнений уточненной теории, учитывающей деформации сдвига и инерцию поворота поперечных сечений. Получающаяся при этом начально-краевая задача является несамосопряженной, что не дает возможности воспользоваться обычной процедурой разложения по собственным функциям, основанной на известных соотношениях ортогональности.

Рассматриваемая в настоящей работе начально – краевая задача является несамосопряженной, что не дает возможности воспользоваться обычной процедурой разложения по собственным функциям, основанной на известных соотношениях ортогональности [1-4]. Поэтому для достижения поставленной цели применяется специально построенное одним из авторов биортогональное конечное векторное интегральное преобразование (КИП), а также структурный алгоритм [5], в процедуре которого формируются две однородных сопряженных системы линейных дифференциальных уравнений для ядровых функций, определяющих искомые спектральные разложения. В качестве примера приводится замкнутое решение осесимметричной динамической задачи для упругозащемленной непологой сферической оболочки с конечной сдвиговой жесткостью.

1. Поскольку формальная процедура предлагаемого метода является новой [5], то сначала сформулируем в общем виде матричный структурный алгоритм биортогональных КИП применительно к линейной начально-краевой задаче, описывающей, в частности, нестационарное осесимметричное напряженно-деформированное состояние (НДС) оболочек вращения. Для этой цели в классе вектор-функций с интегрируемым квадратом в метрике сепарабельного вещественного пространства $L_p^2(I)$ на сегменте $I = [0, \theta_1]$ области $\Omega: \{I, x, t > 0\}$ построено следующее биортогональное КИП [5]:

$$\varphi(\lambda_i, t) = (u, G)_p = \int_0^{\theta_1} p(\theta) u^T(\theta, t) G(\lambda_i, \theta) d\theta, \quad (1)$$

$$u(\theta, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\lambda_i, t) K(\mu_i, \theta) (K_i, G_i)_p^{-1}. \quad (2)$$

Здесь u – искомая вектор-функция (матрица-столбец порядка $m \times 1$); K, G – две ядровые вектор-функции того же порядка, являющиеся ненулевыми решениями инвариантной и сопряженной однородных краевых задач, а λ_i, μ_i – соответствующие им собственные значения; $p(\theta) > 0$ – диагональная матрица ($m \times m$) весовых функций; T – знак транспонирования. $\varphi(\lambda_i, t)$ представляет трансформанту, а разложение (2) – формулу обращения биортогонального КИП. Компоненты $\{u_k(\theta, t), K_k(\mu_i, \theta), G_k(\lambda_i, \theta)\} \in L_p^2$ при этом являются элементами пространства $L_p^2(I)$ ($k = 1, 2, \dots, m$).

Для упрощения дальнейшего рассмотрения включим $p(\theta)$ в ядровые вектор-функции, т.е.

$K_1 = [p(\theta)]^{1/2} K(\mu_i, \theta)$, $G_1 = [p(\theta)]^{1/2} G(\lambda_i, \theta)$, $u_1 = [p(\theta)]^{1/2} u(\theta_i, t)$,
и сохраним для K_1 , G_1 , u_1 прежние обозначения. Таким образом, имеем

$$\varphi(\lambda_i, t) = (u, G) = \int_0^{\theta_1} u^T(\theta, t) G(\lambda_i, \theta) d\theta, \quad (1)$$

а в (2) вместо скалярного произведения $(K_i, G_i)_p$ следует считать (K_i, G_i) .

Формула обращения (2) основана на таком соотношении биортогональности:

$$(K, G)_p = \delta_i^j (K_i, G_j)_p \text{ или } (K, G) = \delta_i^j (K_i, G_j), \quad (3)$$

где δ_i^j - символ Кронекера.

Было показано [5], [6], что при условии ограниченности трансформант (1) обеспечивается единственность представлений и сходимость в метрике пространства L_p^2 разложений, определяемых формулой обращения (2).

Рассмотрим начально-краевую задачу, описываемую системой дифференциальных уравнений гиперболического типа:

$$A[u] - E \ddot{u} = f(\theta, t); \quad (4)$$

$$u(\theta, 0) = u_0(\theta), \quad \dot{u} \Big|_{t=0} = \dot{u}_0(\theta), \quad t=0; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} d_1 u' + e_1 u &= 0, \quad \theta = 0; \\ d_2 u' + e_2 u &= 0, \quad \theta = \theta_1, \end{aligned} \quad (6)$$

где $A[u]$ - дифференциальный оператор вида

$$A[u] = au'' + bu' + cu, \quad (7)$$

a , b , c , $d_{1,2}$, $e_{1,2}$ - квадратные матрицы, причем первые три из них функциональные, a - диагональная, E - единичная и a , $d_{1,2}$ - невырожденные матрицы. Все они имеют порядок $(m \times m)$.

f , u_0 , $\dot{u}_0$ - известные вектор-функции $(m \times 1)$. Штрих и точка обозначают дифференцирование по пространственной переменной θ и времени t . Соотношения (5), (6) представляют начальные и граничные условия.

К (4) приводится исходная система дифференциальных уравнений движения после деления на диагональную неособенную матрицу коэффициентов при инерционных членах. В случае, когда оператор A сингулярный на одном из концов интервала, например $\theta = 0$, то соответствующее равенство (6) заменяется на условие ограниченности (регулярности решения).

Если теперь подействовать интегральным оператором (1) на уравнения (4) и начальные условия (5), то в результате получаем

$$(A[u], G) - \frac{d^2}{dt^2} (u, G) = (f, G); \quad (8)$$

$$(u, G) \Big|_{t=0} = (u_0, G), \quad \frac{d}{dt} (u, G) \Big|_{t=0} = (\dot{u}_0, G), \quad t=0. \quad (9)$$

После выполнения интегрирования по частям первого слагаемого (8) с учетом (7), удовлетворяем обычным двум условиям структурного алгоритма метода КИП [2], т.е.

$$\Phi^* [u^T, G]_0^{\theta_1} = \left[(u')^T a^T G - u^T (a^T G)' + u^T (b^T G) \right]_0^{\theta_1} = 0; \quad (10)$$

$$(u, A^*[G]) = -\lambda_t^2 (u, G). \quad (11)$$

Здесь A^* сопряженное A дифференциальное выражение

$$A^*[G] = (a^T G)'' - (b^T G)' + c^T G. \quad (12)$$

Равенство (10) представляет обращение в нуль билинейной формы на концах интервала, а (11) - операционное свойство.

Имея в виду обозначение трансформанты (1_1) и соотношения (10), (11), равенства (8), (9) образуют счетное множество задач Коши относительно $\varphi(\lambda_i, t)$:

$$\ddot{\varphi}(\lambda_i, t) + \lambda_i^2 \varphi(\lambda_i, t) = -F(\lambda_i, t), \quad i = \overline{1, \infty},$$

$$\varphi(\lambda_i, 0) = \varphi_0(\lambda_i), \quad \dot{\varphi}(\lambda_i, t) \Big|_{t=0} = \dot{\varphi}_0(\lambda_i), \quad t=0.$$

Ее решение записывается в виде

$$\varphi(\lambda_i, t) = \varphi_0(\lambda_i) \cos \lambda_i t + \dot{\varphi}_0(\lambda_i) \lambda_i^{-1} \sin \lambda_i t - \lambda_i^{-1} \int_0^t F(\lambda_i, \tau) \sin \lambda_i(t - \tau) d\tau, \quad (13)$$

где $F, \varphi_0, \dot{\varphi}_0$ - соответствующие трансформанты (11), т.е.

$$\left\{ F(\lambda_i, t), \varphi_0(\lambda_i), \dot{\varphi}_0(\lambda_i) \right\} = \int_0^{\theta_1} \left\{ f^T(\theta, t), u_0^T(\theta), \dot{u}_0^T(\theta) \right\} G(\lambda_i, \theta) d\theta. \quad (14)$$

Из операторного равенства (11) следует такая система дифференциальных уравнений для компонентов вектор-функций G ядра КИП:

$$A^*[G] = -\lambda_i^2 G. \quad (15)$$

Выражая из (6) производные u' и подставляя их значения в (10), получаем следующие граничные условия для G :

$$1) a^T G' + g_1 G = 0, \quad \theta = 0; \quad 2) a^T G' + g_2 G = 0, \quad \theta = \theta_1. \quad (16)$$

Здесь

$$g_{1,2} = (a')^T + (d_{1,2}^{-1} e_{1,2})^T a^T - b^T. \quad (17)$$

Соотношения (15), (16) представляют сопряженную краевую задачу для определения компонентов G_k вектор-функции ядра G КИП. В случае, когда

$$a^T \Big|_{\theta=0, \theta_1} = d_{1,2}, \quad \left[(a')^T - b^T \right] \Big|_{\theta=0, \theta_1} = e_{1,2} - e_{1,2}^T, \quad (18)$$

причем матрицы $d_{1,2}$ - симметричные, граничные условия (16) являются самосопряженными, т.е.

$$1) d_1 G' + e_1 G = 0, \quad \theta = 0; \quad 2) d_2 G' + e_2 G = 0; \quad \theta = \theta_1. \quad (16_1)$$

Составляем теперь скалярное произведение для членов равенства (15) с ядровой вектор-функцией K . Имеем

$$(A^*[G], K) = -\lambda_i^2 (G, K). \quad (19)$$

Выполняя интегрирование по частям и используя аналогичные (10), (11) два условия

$$\Phi^{**}[G^T, K] \Big|_0^{\theta_1} = \left[(a^T G)^T K - (b^T G)^T K - (a^T G)^T K' \right] \Big|_0^{\theta_1} = 0, \quad (20)$$

$$(G, A^{**}[K]) = -\mu_j^2 (G, K), \quad (21)$$

из (19), (21) получаем соотношение биортогональности (3):

$$(\lambda_i^2 - \mu_j^2)(G, K) = 0, \quad i \neq j.$$

В операторном уравнении (21) A^{**} представляет сопряженное к A^* дифференциальное выражение [7], т.е.

$$A^{**}[K] = A[K] = aK'' + bK' + cK. \quad (22)$$

Если теперь воспользоваться операционным свойством (21), а затем равенством (20) с учетом граничных условий (16), то получаем инвариантную исходной однородную краевую задачу для компонентов K_k второй ядровой вектор-функции КИП K . Имеем:

$$A[K] = -\mu_i^2 K, \quad (23)$$

$$1) d_1 K' + e_1 K = 0, \quad \theta = 0; \quad 2) d_2 K' + e_2 K = 0, \quad \theta = \theta_1. \quad (24)$$

После вычисления собственных вектор-функций G и K и соответствующих им собственных значений λ_i, μ_j из однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (15), (16) и (23), (24), общее решение u рассматриваемой начально-краевой задачи (4)-(6) находится по формуле обращения (2) с учетом (13), (14). Таким образом, возможность построения замкнутого решения задачи (4)-(6) определяется интегрируемостью систем обыкновенных уравнений (15) и (23).

Замечание. Если $K = G$, то биортогональное КИП (1), (2) становится обычным КИП [2], причем трансформантой по-прежнему является скалярное произведение (1), а формула обращения принимает такой вид:

$$u(\theta, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\lambda_i, t) G(\lambda_i, \theta) \|G_i\|^{-2}, \quad (25)$$

где $\|G\|^2 = (G_i, G_i)_p$ - квадрат нормы в метрике L_p^2 .

Соотношение биортогональности (3) при этом превращается в известное условие ортогональности

$$(G_i, G_j)_p = \delta_i^j \|G_i\|^2. \quad (26)$$

КИП (1), (25) предназначены для исследования самосопряженных начально-краевых задач (4)-(6), когда

$$A^*[G] = A[G],$$

и справедливо тождество Лагранжа [7]

$$(A[u], G) = (u, A[G]). \quad (27)$$

2. Будем рассматривать в сферических координатах (θ, φ) упругую оболочку вращения, имеющую толщину h и главные радиусы кривизны срединной поверхности $R_1(\theta)$, $R_2(\theta)$. Известно [8], что для поверхности вращения с произвольным меридианом коэффициенты ее первой квадратичной формы и соотношение Кодацци-Гаусса вычисляются по формулам

$$A_1 = R_1, \quad B_1 = R_2 \sin \theta, \quad (R_2 \sin \theta)' = R_1 \cos \theta. \quad (28)$$

При учете поперечных сдвигов по Р. Миндлину [9], а также выражений (28), геометрические и физические уравнения для случая осесимметричной деформации определяются следующими равенствами [10]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \varepsilon_\theta^0 + z \chi_\theta^0, \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\varphi^0 + z \chi_\varphi^0, \quad \gamma_{\theta\varphi}^0 = \psi + R_1^{-1} W_*', \\ \varepsilon_\theta^0 &= R_1^{-1} (u_*' + W_*), \quad \varepsilon_\varphi^0 = R_2^{-1} (u_* \operatorname{ctg} \theta + W_*), \quad \chi_\theta^0 = R_1^{-1} \psi', \quad \chi_\varphi^0 = R_2^{-1} \psi \operatorname{ctg} \theta, \\ N_\theta^* &= C [R_1^{-1} (u_*' + W_*) + \nu R_2^{-1} (u_* \operatorname{ctg} \theta + W_*)], \quad M_\theta^* = D (R_1^{-1} \psi' + \nu R_2^{-1} \psi \operatorname{ctg} \theta), \\ N_\varphi^* &= C [R_2^{-1} (u_* \operatorname{ctg} \theta + W_*) + \nu R_1^{-1} (u_*' + W_*)], \quad M_\varphi^* = D (R_2^{-1} \psi \operatorname{ctg} \theta + \nu R_1^{-1} \psi'), \\ Q_\theta^* &= 0.5 k_1 c (1 - \nu) [\psi + R_1^{-1} (W_*' - u_*)]. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь u_* , W_* - тангенциальная и нормальная компоненты вектора перемещений; ψ - угол поворота в меридиальной плоскости; $\varepsilon_\theta, \varepsilon_\varphi, \gamma_{\theta\varphi}$ - относительные линейные деформации и угол сдвига, а $\chi_\theta, \chi_\varphi$ - соответствующие изменения кривизны, причем индекс «0» относится к срединной поверхности оболочки; z - координата в направлении толщины; k_1 - коэффициент поперечного сдвига; $N_\theta^*, N_\varphi^*, Q_\theta^*$ - нормальные и поперечное усилия; M_θ^*, M_φ^* - меридиальный и кольцевой изгибающие моменты;

$$C = \frac{Eh}{(1 - \nu^2)}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)},$$

E, ν - модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Для оболочки вращения загруженной произвольной осесимметричной динамической нагрузкой $X^*(\theta, t)$, $Z^*(\theta, t)$, $M^*(\theta, t)$ дифференциальные уравнения движения с учетом инерции поворота поперечных сечений записывается в виде [10]:

$$\begin{aligned} (N_\theta^* R_2 \sin \theta)' - N_\varphi^* (R_2 \sin \theta)' + Q_\theta^* R_2 \sin \theta - \rho h \left(1 + \frac{h^2}{12 R_1 R_2} \right) R_1 R_2 \ddot{u}_* \sin \theta + X^* R_1 R_2 \sin \theta &= 0; \\ (Q_\theta^* R_2 \sin \theta)' - N_\varphi^* R_1 \sin \theta - N_\theta^* R_2 \sin \theta - \rho h \left(1 + \frac{h^2}{12 R_1 R_2} \right) R_1 R_2 \ddot{W}_* \sin \theta + Z^* R_1 R_2 \sin \theta &= 0; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\left(M_\theta^* R_2 \sin \theta\right)' - M_\varphi^* (R_2 \sin \theta)' - Q_\theta^* R_2 \sin \theta - \frac{\rho h^3}{12 \left(1 + \frac{(3/20)h^2}{R_1 R_2}\right)} R_1 R_2 \ddot{\psi} \sin \theta + M^* R_1 R_2 \sin \theta = 0,$$

где ρ – плотность материала оболочки.

Вводим безразмерные величины по формулам

$$\begin{aligned} u &= u_* R_{1\max}^{-1}, \quad W = W_* R_{1\max}^{-1}, \quad t = t_* R_{1\max}^{-1} \left[\frac{E}{\rho(1-\nu^2)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \rho_1 = R_1 R_{1\max}^{-1}, \\ \rho_2 &= R_2 R_{1\max}^{-1}, \quad X = X^* R_1^2 (R_{1\max} C)^{-1}, \quad Z = Z^* R_1^2 (R_{1\max} C)^{-1}, \\ M &= M^* R_1^2 \alpha^2 D^{-1}, \quad \alpha^2 = h^2 (12 R_{1\max})^{-2}, \quad k = 0.5 k_1 (1-\nu), \\ N_\theta &= N_\theta^* C^{-1} = \rho_1^{-1} (u' + W) + \nu \rho_2^{-1} (u \operatorname{ctg} \theta + W), \\ N_\varphi &= N_\varphi^* C^{-1} = \rho_2^{-1} (u \operatorname{ctg} \theta + W) + \nu \rho_1^{-1} (u' + W), \\ M_\theta &= M_\theta^* R_{1\max} D^{-1} = \rho_1^{-1} \psi' + \nu \rho_2^{-1} \operatorname{ctg} \theta, \quad M_\varphi = M_\varphi^* R_{1\max} D^{-1} = \rho_2^{-1} \psi \operatorname{ctg} \theta + \nu \rho_1^{-1} \psi', \\ Q_\theta &= Q_\theta^* C^{-1} = k [\psi + \rho_1^{-1} (W' - u)], \end{aligned} \quad (31)$$

причем $R_{1\max} = \max R_1(\theta)$

Пусть замкнутая в вершине оболочка вращения опирается на упругий относительно углов поворота и линейных смещений контур, коэффициенты жесткости которого μ^*, β^*, γ^* . Соответствующие этому случаю закрепления граничные условия формулируются следующим образом:

$$\begin{aligned} W_* &< \infty, \quad u_* < \infty, \quad \psi < \infty, \quad \theta = 0, \\ N_\theta^* &= \beta^* u_*, \quad Q_\theta^* = \gamma^* W_*, \quad M_\theta^* = \mu^* \psi, \quad \theta = \theta_1. \end{aligned} \quad (32)$$

Первые три неравенства являются условиями ограниченности в полюсе оболочки $\theta = 0$.

После подстановки выражений (29) в уравнения (30) и условия (32) с учетом (31) и последнего равенства (28) приходим к начально-краевой задаче (4)-(6). Получающиеся при этом матрицы $u, f, u_0, \dot{u}_0, d_2, e_2$, $a = \|a_{sk}\|$, $b = \|b_{sk}\|$, $c = \|c_{sk}\|$ имеют следующий вид:

$$u(\theta, t) = \|u(\theta, t) W(\theta, t) \psi(\theta, t)\|^T, \quad f(\theta, t) = \|X(\theta, t) Z(\theta, t) M(\theta, t)\|^T, \quad (33)$$

$$u_0(\theta) = \|u_0(\theta) W_0(\theta) \psi_0(\theta)\|^T, \quad \dot{u}_0(\theta) = \|\dot{u}_0(\theta) \dot{W}_0(\theta) \dot{\psi}_0(\theta)\|^T,$$

$$d_2 = \begin{bmatrix} \rho_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & k \rho_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1^{-1} \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} (\nu \rho_2^{-1} \operatorname{ctg} \theta_1 - \beta) & (\rho_1^{-1} + \nu \rho_2^{-1}) & 0 \\ -k \rho_1^{-1} & -\gamma & k \\ 0 & 0 & (\nu \rho_2^{-1} \operatorname{ctg} \theta_1 - \mu) \end{bmatrix}, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{33} = k^{-1} a_{22} = \rho_1^{-2}, \quad a_{sk} = 0, (s \neq k), \quad b_{11} = b_{33} = k^{-1} b_{22} = \rho_1^{-2} (\operatorname{ctg} \theta + \rho_2^1 \rho_2^{-1} - \rho_1^1 \rho_1^{-1}), \\ b_{12} &= b_{21} = \rho_1^{-2} (1 + k + \nu \rho_1 \rho_2^{-1}), \quad b_{13} = b_{31} = 0, \quad b_{23} = -\alpha^2 b_{32} = k \rho_1^{-1}, \\ c_{11} &+ k \rho_1^{-2} = c_{33} + k \alpha^{-2} = -(\rho_1 \rho_2)^{-1} (\nu + \operatorname{ctg}^2 \theta + \rho_2^1 \rho_2^{-1} \operatorname{ctg} \theta), \\ c_{12} &= \rho_1^{-2} [(1 + \nu)(1 - \rho_1 \rho_2^{-1}) \operatorname{ctg} \theta + \rho_2^1 \rho_2^{-1} (1 - \nu - \rho_1 \rho_2^{-1}) - \rho_1^1 \rho_2^{-1}], \\ c_{21} &= -\rho_1^{-2} [k(\rho_1^1 \rho_2^{-1} + \rho_2^1 \rho_1^{-1} + \operatorname{ctg} \theta) + \rho_1 \rho_2^{-1} (\nu + \rho_1 \rho_2^{-1}) \operatorname{ctg} \theta], \quad c_{13} = \alpha^2 c_{31} = k \rho_1^{-1}, \\ c_{23} &= k \rho_1^{-1} (\rho_2^1 \rho_1^{-1} + \operatorname{ctg} \theta), \quad c_{32} = 0, \quad c_{22} = -(\rho_1 \rho_2)^{-1} (\rho_2 \rho_1^{-1} + \rho_1 \rho_2^{-1} + 2\nu). \end{aligned} \quad (35)$$

Элементы матриц (34) постоянные величины, т.к. $\rho_1 = \rho_1(\theta_1)$, $\rho_2 = \rho_2(\theta_1)$.

В соответствии с (32) вместо первого равенства (6) следует иметь в виду условия регулярности решения, т.е.

$$u(0, t) < \infty \text{ или } u < \infty, \quad W < \infty, \quad \psi < \infty, \quad \theta = 0. \quad (36)$$

Соотношения (4)-(6), (36) при наличии (33)-(35) и известных матрицах $f, u_0, \dot{u}_0$ представляют математическую формулировку рассматриваемой начально-краевой задачи в безразмерной форме. β, γ, μ - безразмерные коэффициенты жесткости опорного контура относительно линейных смещений и углов поворота

$$\beta = \beta^* R_{l_{\max}} C^{-1}, \quad \gamma = \gamma^* R_{l_{\max}} C^{-1}, \quad \mu = \mu^* R_{l_{\max}} C^{-1}.$$

3. Воспользуемся биортогональным КИП (1), (2), в котором весовая функция $f(\theta)$, зависящая от коэффициентов системы уравнений (4), (34), (35), определяется с точностью до постоянной такой квадратурой [2], [11]:

$$f(\theta) = \exp\left(a_{kk}^{-1} \int b_{kk} d\theta\right) = \exp\left[\rho_1^2(\theta) \int \rho_1^{-2}(\theta) (\text{ctg} \rho + \rho_2^1(\theta) \rho_2^{-1}(\theta) - \rho_1^1(\theta) \rho_1^{-1}(\theta)) d\theta\right] = \rho_1(\theta) \rho_2(\theta) \sin \theta,$$

а ее матрица $p(\theta)$ соответственно

$$p(\theta) = \begin{pmatrix} f(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & f(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 f(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \rho_2 \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 \rho_2 \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \rho_1 \rho_2 \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Если теперь подействовать интегральным оператором (1), (37) на уравнения (4), (34), (35) и начальные условия (5) в соответствии с алгоритмической процедурой пункта 1, получаем счетное множество задач Коши, разрешаемое относительно трансформанты $\varphi(\lambda_i, t)$ в виде (13), а также сопряженную краевую задачу (15) для вектор-функции ядра КИП $G(\lambda_i, \theta)$ и граничные условия (16), т.е. имеем:

$$\begin{aligned} a_{11}(\theta) G_1'' + b_{11}(\theta) G_1' + c_{11}(\theta) G_1 + b_{12}(\theta) G_2' + c_{12}^*(\theta) G_2 + c_{13}(\theta) G_3 &= -\lambda_i^2 G_1, \\ a_{22}(\theta) G_2'' + b_{22}(\theta) G_2' + c_{22}(\theta) G_2 + b_{21}(\theta) G_1' + c_{21}^*(\theta) G_1 + b_{23}(\theta) G_3' + c_{23}(\theta) G_3 &= -\lambda_i^2 G_2, \\ a_{33}(\theta) G_1'' + b_{33}(\theta) G_1' + c_{33}(\theta) G_1 + c_{31}(\theta) G_1 + b_{32}(\theta) G_2' &= -\lambda_i^2 G_3, \end{aligned} \quad (38)$$

$$G_1(0) < \infty, \quad G_2(0) < \infty, \quad G_3(0) < \infty, \quad \theta = 0,$$

$$G_1' + \rho_1 (\nu \rho_2^{-1} \text{ctg} \theta_1 - \beta) G_1 + (1 + \nu \rho_1 \rho_2^{-1}) G_2 = 0, \quad \theta = \theta_1,$$

$$G_2' - G_1 - \gamma k^{-1} \rho_1 G_2 + \rho_1 G_3 = 0, \quad (39)$$

$$G_3' + \rho_1 (\nu \rho_2^{-1} \text{ctg} \theta_1 - \mu) G_3 = 0,$$

где

$$G(\lambda_i, \theta) = \|G_1(\lambda_i, \theta) G_2(\lambda_i, \theta) G_3(\lambda_i, \theta)\|^T$$

$$c_{12}^* = \rho_1^{-2} [(1 - \rho_1^2 \rho_2^{-2}) \text{ctg} \theta - \rho_2^1 \rho_1^{-1} + (1 + k) \rho_2^1 \rho_2^{-1} + (1 + 2k) \rho_1^1 \rho_1^{-1}], \quad (40)$$

$$c_{21}^* = -\rho_1^{-2} \{ [k - \nu + (2\nu + 1) \rho_1 \rho_2^{-1}] \text{ctg} \theta + (k + \nu) \rho_2^1 \rho_2^{-1} + k \rho_1^1 \rho_1^{-1} + \rho_1 \rho_2^1 \rho_2^{-2} \}, \quad (41)$$

а в выражении (13) для $\varphi(\lambda_i, t)$ соответственно имеем:

$$F(\lambda_i, t) = \int_0^{\theta_1} [X(\theta, t) G_1(\lambda_i, \theta) + kZ(\theta, t) G_2(\lambda_i, \theta) + M(\theta, t) G_3(\lambda_i, \theta)] \rho_1^{-1} \rho_2 \sin \theta d\theta,$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(\lambda_i) \\ \dot{\varphi}_0(\lambda_i) \end{pmatrix} = \int_0^{\theta_1} \begin{pmatrix} u_0(\theta) \\ \dot{u}_0(\theta) \end{pmatrix} G_1(\lambda_i, \theta) + \begin{pmatrix} W_0(\theta) \\ \dot{W}_0(\theta) \end{pmatrix} G_2(\lambda_i, \theta) + \begin{pmatrix} \psi_0(\theta) \\ \dot{\psi}_0(\theta) \end{pmatrix} G_3(\lambda_i, \theta) \rho_1 \rho_2 \sin \theta d\theta.$$

Хотя при соответствиях $u \sim G_1$, $W \sim G_2$, $\psi \sim G_3$ краевые условия (39) совпадают с (6), (34), (36), однако из равенств (35), (40), (41) следует, что

$$c_{12} \neq c_{12}^*, \quad c_{21} \neq c_{21}^*.$$

Следовательно дифференциальный оператор $A[u]$ для оболочек вращения с произвольным меридианом несамосопряженный, причем левая часть уравнений (38) совместно с (39) представляет $A^*[G]$.

Применяя к дифференциальным уравнениям (38) аналогичное (1) КИП с весом (37) и ядровой вектор-функцией

$$K(\mu_i, \theta) = \|K_1(\mu_i, \theta) K_2(\mu_i, \theta) K_3(\mu_i, \theta)\|^T,$$

в соответствии с процедурой (19), (21) и учитывая (39), находим

$$\left. \begin{aligned} a_{11}(\theta)K_1'' + b_{11}(\theta)K_1' + c_{11}(\theta)K_1 + b_{12}(\theta)K_2' + c_{12}(\theta)K_2 + c_{13}(\theta)K_3 &= -\mu_i^2 K_1, \\ a_{22}(\theta)K_2'' + b_{22}(\theta)K_2' + c_{22}(\theta)K_2 + b_{12}(\theta)K_1' + c_{21}(\theta)K_1 + b_{23}(\theta)K_3' + c_{23}(\theta)K_3 &= -\mu_i^2 K_2, \\ a_{33}(\theta)K_3'' + b_{33}(\theta)K_3' + c_{33}(\theta)K_3 + c_{31}(\theta)K_1 + b_{32}(\theta)K_2' &= -\mu_i^2 K_3. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Граничные условия для $K(\mu_i, \theta)$ при замене G_1, G_2, G_3 соответственно на K_1, K_2, K_3 тождественно совпадают с (39), и вместе с (42) образуют оператор $A^{**}[K] = A[K]$. В результате интегрирования однородных краевых задач (38), (39) и (42) с аналогичными граничными условиями получаем биортогональный базис G и K , а затем по формулам обращения (2) с учетом равенства (13) искомые функции перемещений $u(\theta, t)$, $W(\theta, t)$, $\psi(\theta, t)$. Таким образом, показана принципиальная возможность решения нестационарных задач динамики для оболочек вращения путем разложения в ряды по собственным вектор-функциям.

4. В качестве примера рассмотрим нагруженную произвольной осесимметричной динамической нагрузкой упруго-закрепленную относительно углов поворота непологую сферическую оболочку с конечной сдвиговой жесткостью. Для нее имеем

$$R_1(\theta) = R_2(\theta) = R = \text{const}, \quad \rho_1 = \rho_2 = 1, \quad \rho_1' = \rho_2' = 0. \quad (43)$$

С учетом (43) матрицы коэффициентов (34) системы уравнений (4) принимают такой вид:

$$\begin{aligned} a &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} \text{ctg}\theta & (1+\nu+k) & 0 \\ -(1+\nu+k) & k\text{ctg}\theta & k \\ 0 & -k\alpha^{-2} & \text{ctg}\alpha \end{vmatrix}, \\ c &= \begin{vmatrix} -(\nu+k+\text{ctg}^2\theta) & 0 & k \\ -(1+\nu+k)\text{ctg}\theta & -2(1+\nu) & k\text{ctg}\theta \\ k\alpha & 0 & -(\nu+k\alpha^{-2}+\text{ctg}^2\theta) \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (44)$$

Краевые условия (5), (33) сохраняются, а (6), (36), (32) для соответствующего закрепления на контуре формулируются следующим образом:

$$\{u, W, \psi\} < \infty, \quad \theta = 0, \quad u = W = 0, \quad \psi' + (\nu\text{ctg}\theta_1 - \mu)\psi = 0, \quad \theta = \theta_1. \quad (45)$$

Соотношения (45) получены из (6), (32) путем деления первых двух равенств на β , γ и предельных переходов $\beta \rightarrow \infty$, $\gamma \rightarrow \infty$.

Применяя к уравнениям (4), (44) и начальным условиям (5), (33) КИП (1) с весовой функцией $f(\theta) = \sin \theta$ по структурному алгоритму (8)-(24), находим $A^*[G] = A^{**}[K] = A[G]$.

Таким образом, начально-краевая задача (4), (5), (44), (45) является самосопряженной, т.е. $G=K$, и ядро преобразования есть нетривиальное решение следующей однородной краевой задачи (15):

$$\begin{aligned} L(G_1) - (\nu+k+\text{ctg}^2\theta)G_1 + (1+\nu+k)G_2' + kG_3 + \lambda_i^2 G_1 &= 0, \\ L(G_2) - (2+\nu)G_2 - (1+\nu+k)(G_1' + G_1\text{ctg}\theta) + k(G_3' + G_3\text{ctg}\theta) + \lambda_i^2 G_2 &= 0, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} L(G_3) - (\nu+k\alpha^{-2}+\text{ctg}^2\theta)G_3 + k\alpha^{-2}(G_1 - G_2') + \lambda_i^2 G_3 &= 0, \\ \{G_1, G_2, G_3\} < \infty, \quad \theta = 0, \quad G_1 = G_2, \quad G_3' + (\nu\text{ctg}\theta_1 - \mu)G_3 &= 0, \quad \theta = \theta_1. \end{aligned} \quad (47)$$

Здесь $L(\dots) = \frac{d^2(\dots)}{d\theta^2} + \text{ctg}\theta \frac{d(\dots)}{d\theta}$. Трансформанта $\varphi(\lambda_i, t)$, как и прежде, определяется равенствами (13) и (14), (33) с весом $\sin\theta$.

Проинтегрируем систему дифференциальных уравнений (46). Для этой цели вводим потенциалы смещений U и усилий V по формулам

$$G_1 = U', \quad G_3 = k^{-1}V' + U' - G_2', \quad (48)$$

а также замечаем, что

$$\frac{d}{d\theta} L(\dots) = L\left[\frac{d(\dots)}{d\theta}\right] - \sin^{-2}\theta \frac{d(\dots)}{d\theta}. \quad (49)$$

После подстановки соотношений (48) в (46) с учетом (49), выражаем из второго равенства G_2 , т.е.

$$G_2 = -k_{5i}L(U + k_{4i}V). \quad (50)$$

В результате приходим к такой системе уравнений:

$$\begin{aligned} L(U) + k_{10i}U + k_{11i}L(V) + k_{12i}V &= 0, \\ L^2(U) + k_{13i}L(U) + k_{14i}U + k_{4i}L^2(V) + k_{15i}L(V) + k_{16i}V &= 0, \end{aligned} \quad (51)$$

исключая из которой U , получаем разрешающее дифференциальное уравнение для V . Имеем

$$L^3(V) + k_{24i}L^2(V) + k_{25i}L(V) + k_{26i}V = 0. \quad (52)$$

В процессе приведения (51) к (52) установлена связь U с V , т.е.

$$U = -k_{21i}L^2(V) - k_{22i}L(V) - k_{23i}V. \quad (53)$$

В соотношениях (50)-(53) приняты такие обозначения:

$$\begin{aligned} k_{1i} &= 1 - \nu + \lambda_i, \quad k_{2i} = 1 + \nu, \quad k_{3i} = 1, \quad k_{4i} = -(1 + \nu)^{-1}, \quad k_{5i} = (1 + \nu)^{-1} [2(1 + \nu) - \lambda_i^2], \quad k_{6i} = k^{-1}, \\ k_{7i} &= k^{-1} [(1 - \nu) - k\alpha^{-2} + \lambda_i^2], \quad k_{8i} = -k_{9i} = k_{1i}, \quad k_{10i} = k_{1i}k_{5i}(k_{5i} - k_{2i})^{-1}, \\ k_{11i} &= k_{2i}k_{4i}(k_{5i} - k_{2i})^{-1}, \quad k_{12i} = k_{3i}k_{5i}(k_{5i} - k_{2i})^{-1}, \quad k_{13i} = k_{5i} - k_{9i}, \quad k_{14i} = k_{5i}k_{8i}, \\ k_{15i} &= k_{5i}k_{6i} - k_{4i}k_{9i}, \quad k_{16i} = k_{5i}k_{7i}, \\ k_{17i} &= k_{14i}(k_{13i} - k_{10i})^{-1}, \quad k_{18i} = (k_{4i} - k_{11i})(k_{13i} - k_{10i})^{-1}, \quad k_{19i} = (k_{15i} - k_{12i})(k_{13i} - k_{10i})^{-1}, \\ k_{20i} &= k_{16i}(k_{13i} - k_{10i})^{-1}, \quad k_{21i} = k_{18i}(k_{10i} - k_{17i})^{-1}, \quad k_{22i} = (k_{11i} - k_{19i})(k_{10i} - k_{17i})^{-1}, \\ k_{23i} &= (k_{12i} - k_{20i})(k_{10i} - k_{17i})^{-1}, \quad k_{24i} = k_{21i}^{-1}(k_{22i} - k_{18i} + k_{17i}k_{21i}), \\ k_{25i} &= k_{21i}^{-1}(k_{23i} - k_{19i} + k_{17i}k_{22i}), \quad k_{26i} = k_{21i}^{-1}(k_{17i}k_{23i} - k_{20i}) \end{aligned} \quad (54)$$

Вводим порождающее дифференциальное уравнение

$$L(V) = -\xi_{in}^2 V, \quad \xi_{in}^2 = c_{in}(c_{in} + 1). \quad (55)$$

В результате подстановки (55) в (52) формируется бикубическое уравнение относительно ξ_{in} :

$$(\xi_{in}^2)^3 - k_{24i}(\xi_{in}^2)^2 + k_{25i}\xi_{in}^2 - k_{26i} = 0. \quad (56)$$

Если учесть, что при $x = \cos\theta$ (55) является уравнением Лежандра, и из (56) определить корни ξ_{i1} , ξ_{i2} , ξ_{i3} , а затем c_{i1} , c_{i2} , c_{i3} , то общее решение уравнения (52) можно представить в виде

$$V = \sum_{n=1}^3 [C_{in}P_{cin}(\cos\theta) + D_{in}Q_{cin}(\cos\theta)],$$

где $P_{cin}(\cos\theta)$, $Q_{cin}(\cos\theta)$ - функции Лежандра степени c_{in} первого и второго рода; C_{in} , D_{in} - произвольные постоянные.

Принимая во внимание условия регулярности (47), а также соотношения (53), (48), (50), (55), определяем компоненты вектор-функции ядра КИП:

$$\begin{aligned} G_1(\lambda_i, \theta) &= -\sum_{n=1}^3 E_{in}C_{in}P_{cin}^1(\cos\theta), \quad G_2(\lambda_i, \theta) = -\sum_{n=1}^3 F_{in}C_{in}P_{cin}^1(\cos\theta), \\ G_3(\lambda_i, \theta) &= -\sum_{n=1}^3 H_{in}C_{in}(c_{in} + 1)(\sin\theta)^{-1} [\cos\theta P_{cin}(\cos\theta) - P_{cin+1}(\cos\theta)], \end{aligned} \quad (57)$$

где P_{cin}^1 - присоединенная функция Лежандра первого порядка степени c_{in} :

$$\begin{aligned} E_{in} &= k_{21i}\xi_{in}^4 - k_{22i}\xi_{in}^2 + k_{23i}, \quad F_{in} = k_{5i}^{-1} [k_{21i}\xi_{in}^6 - k_{22i}\xi_{in}^4 + (k_{23i} - k_{4i})\xi_{in}^2], \\ H_{in} &= k^{-1} + k_{4i}k_{5i}^{-1}\xi_{in}^2 - (1 - k_{5i}^{-1}\xi_{in}^2)E_{in}. \end{aligned}$$

Дальнейшее решение очевидно, поскольку рассматривается задача на собственные значения. В результате подстановки равенств (57) в оставшиеся граничные условия (47) формируется однородная система алгебраических уравнений для C_{in} :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^3 C_{in}E_{in}P_{cin}^1(\cos\theta_1) &= 0; \quad \sum_{n=1}^3 C_{in}F_{in}P_{cin}^1(\cos\theta_1) = 0; \\ \sum_{n=1}^3 C_{in}H_{in} \left\{ \frac{c_{in}(c_{in} + 1)}{\sin\theta_1} P_{cin+1}^1(\cos\theta_1) + [(\nu - c_{in} - 1)\cot\theta_1 - \mu] P_{cin}^1(\cos\theta_1) \right\} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Из условия нетривиальности решения системы (58) составляется трансцендентное уравнение относительно λ_i :

$$\text{Det}(\lambda_i) = 0; \quad \lambda_i = \overline{1, \infty}$$

и находятся постоянные C_{in} . Имеем:

$$\begin{aligned} C_{i1} &= E_{i2} F_{i1} P_{ci2}^1(\cos \theta_1) P_{ci3}(\cos \theta_1) - E_{i3} F_{i2} P_{ci3}^1(\cos \theta_1) P_{ci2}(\cos \theta_1), \\ C_{i2} &= E_{i3} F_{i1} P_{ci3}^1(\cos \theta_1) P_{ci1}(\cos \theta_1) - E_{i1} F_{i3} P_{ci1}^1(\cos \theta_1) P_{ci3}(\cos \theta_1), \\ C_{i3} &= E_{i1} F_{i2} P_{ci1}^1(\cos \theta_1) P_{ci2}(\cos \theta_1) - E_{i2} F_{i1} P_{ci2}^1(\cos \theta_1) P_{ci1}(\cos \theta_1). \end{aligned}$$

Применяя теорему обращения к выражению (13) и учитывая равенства (57), определяются искомые компоненты вектора перемещений

$$\{u(\theta, t), W(\theta, t), \psi(\theta, t)\} = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\lambda_i, t) \{G_1(\lambda_i, \theta), G_2(\lambda_i, \theta), G_3(\lambda_i, \theta)\} \|G_i\|^{-2},$$

а затем по формулам (31) внутренние усилия в оболочке.

Полученные результаты справедливы и при исследовании неосесимметричных начально-краевых задач динамики оболочек вращения с конечной сдвиговой жесткостью.

Широкий класс несамосопряженных линейных краевых задач динамики образуют также математические модели неоднородных или многослойных тонкостенных конструкций [5], [12], для решения которых эффективным представляется рассмотренный здесь метод биортогональных КИП.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Улитко А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наукова думка, 1979. 264 с.
2. Сеницкий Ю.Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований. Саратов: Издательство СГУ, 1985. 176 с.
3. Мартыненко Н.А., Пустыльников Л.М. Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1986. 393 с.
4. Сеницкий Ю.Э. Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики // Известия высших учебных заведений. Математика. 1991, №4. С. 57-63.
5. Сеницкий Ю.Э. Обобщенные биортогональные конечные интегральные преобразования и их приложение к нестационарным задачам механики // Доклады РАН. 1995. Т. 341. №4. С. 474-477.
6. Сеницкий Ю.Э. Сходимость и единственность представлений, определяемых формулой обращения многокомпонентного обобщенного конечного интегрального преобразования // Известия высших учебных заведений. Математика. 1991 №9. С. 53-56.
7. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: ГИТТЛ, 1954. 352 с.
8. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
9. Сеницкий Ю.Э., Еленицкий Э.Я. О физически непротиворечивой модели уточненной теории пластин и оболочек. // Доклады РАН. 1993. Т. 331. №5. С. 580-582.
10. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней пластин и оболочек. // Механика деформируемых твердых тел. М.: ВИНТИ, 1973. Т. 5. 272 с.
11. Сеницкий Ю.Э. О некоторых тождествах, используемых при решении краевых задач методом конечных интегральных преобразований // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, №9, с. 1636-1638.
12. Колесников С.В. Уточненная теория колебаний многослойной ортотропной пластины // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 160-165.

Поступила 28.05.2004 г.