Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Юдашкин, Синтез самоорганизующихся динамических систем с памятью состояний в гильбертовом пространстве на основе интегродифференциальных операторов, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 30, 92–98

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu313>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 17:03:55

СИНТЕЗ САМООРГАНИЗУЮЩИХСЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПАМЯТЬЮ СОСТОЯНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассматривается новая методика синтеза самоорганизующихся систем, непрерывных по своей структуре. Показывается, что с помощью подхода, основанного на интегродифференциальных уравнениях в частных производных, возможно направленное создание динамических систем в гильбертовом пространстве, способных запоминать и воспроизводить любое счетное число своих форм из произвольного начального состояния. Приводятся результаты численных экспериментов с системами, форма которых задается с помощью однозначных функций одного переменного.

1. Введение. В современной науке достаточно успешно развивается парадигма использования свойств самоорганизации различных естественных или искусственных систем для достижения некоторой требуемой цели. Под самоорганизацией в основном принято понимать способность динамической системы к самостоятельному изменению каких-либо своих свойств при выходе из состояния равновесия. Одним из наиболее интересных свойств самоорганизации является изменение формы или структуры. Это хорошо наблюдаемый эффект в биологических системах, где можно выделить известную способность к почти мгновенной адаптации окраски кожных покровов к окружающей среде, встречающуюся у хамелеонов, изменение структуры стаи птиц при различных видах перелетов или возникновении опасности, а также явления, связанные с социальной самоорганизацией колоний муравьев и пчел. Другие примеры связаны с изменениями формы силуэта птиц во время полета, производимыми самостоятельно на основании изменения окружающей обстановки и цели полета. Эффекты самоорганизации, связанные с изменениями формы, также существуют в физических (типичный пример – ячейки Бенара [1]) и химических (реакция Белоусова-Жаботинского [2]) системах. Подобные свойства являются достаточно важными с точки зрения построения интеллектуальных систем и синтеза новых материалов, поэтому в ряде работ произведены попытки синтезировать, например, полимерные гели, меняющие свою конфигурацию [3], или среду, состоящую из отдельных электрически заряженных объектов, которые способны собираться в несколько устойчивых структур [4]. Безусловно важным является синтез технических устройств и систем, которые могли бы изменять свою конфигурацию самостоятельно на основе неких принципов искусственного интеллекта, заложенных в их физическую структуру. Эта задача рассматривается, в частности, в рамках проекта интеллектуального боевого самолета MAS (morphing aircraft structures), проводимого исследовательскими институтами DARPA (Агентство перспективных исследовательских оборонных проектов, США) [5]. Основной задачей проекта является создание трансформирующегося самолета, способного в зависимости от боевых условий менять свою конфигурацию и аэродинамические свойства с целью повышения эффективности полета и ведения боевых действий.

Однако следует отметить, что все прикладные работы в данном направлении чрезвычайно разрознены. Практически полностью отсутствует единый математический подход к синтезу самоорганизующихся систем, способных воспроизводить несколько своих форм или конструкций, который, по-видимому, возможен на основе ряда методологических положений синергетики [6]. При этом в ряде работ [7,8] предложен базовый принцип синтеза моделей подобных систем на основе обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с нелинейностью полиномиального типа. Построенные модели способны запоминать и воспроизводить из произвольного начального состояния ряд требуемых конфигураций, характеризующихся некоторым взаимным расположением подсистем, из которых состоит вся система. Таким образом, происходит воспроизведение структур в конечномерном пространстве.

В данной статье синтезируется новая модель, способная запоминать и воспроизводить счетное неограниченное число своих форм в гильбертовом пространстве. Форма системы задается функцией пространственных координат, и исходное состояние с течением времени трансформируется в некоторое стационарное в соответствии с нелинейными интегродифференциальными уравнениями динамики. Подобная распределенная система открывает принципиально новые возможности в области синтеза «умных» материалов и поверхностей.

2. Математическая модель. Рассмотрим систему Ω , которая представлена непрерывной функцией, для чего используем определение вида:

$$\Omega = \Theta(t, a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (1)$$

где t – время, a_i – пространственный параметр. Пусть требуется, чтобы система могла изменяться во времени и стремиться к ограниченному числу конечных стационарных состояний $v_j(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Введем дополнительное условие, состоящее в том, что функция $\Theta(t, a_1, a_2, \dots, a_n)$ задана в конечных или бесконечных непрерывных областях. Тогда данное определение задает систему в гильбертовом пространстве, в отличие от рассмотренной в [7,8], заданной в евклидовом векторном пространстве. В силу того, что гильбертовы пространства сохраняют многие свойства евклидовых векторных и, в частности, каждому вектору из бесконечномерного гильбертова пространства можно поставить в соответствие счетное множество координат, то можно ожидать, что принципы синтеза непрерывных самоорганизующихся систем с памятью будут схожими с теми, что изложены в работе [7].

Действительно, построим функционал, задающий форму системы в пространстве, в виде:

$$W_{0h}(p(t, \mathbf{X})) = -\frac{1}{2} \iint_A J(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) p(t, \mathbf{X}_1) p(t, \mathbf{X}_2) d\mathbf{X}_1 d\mathbf{X}_2 + \frac{1}{4} \left(\int_A p^2(t, \mathbf{X}_1) d\mathbf{X}_1 \right)^2, \quad (2)$$

где $p(t, \mathbf{X})$ – изменяющаяся во времени пространственная форма системы; $J(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ – ядро преобразования; A – подобласть области определения $p(t, \mathbf{X})$, на которой рассматривается система и по которой производится интегрирование; $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – набор пространственных координат. В дальнейшем исследуются свойства систем, заданных функциями одной пространственной переменной, т.е. $n=1$. В функционале (2) первое подынтегральное слагаемое представляет собой квадратичную форму, а второе слагаемое – алгебраическую форму степени 4. При этом ядро $J(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ играет роль матрицы весов, как в [7]. Соответственно, зададим ядро $J(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ так, чтобы обеспечить минимум функционала на желаемой функции $v(\mathbf{X})$ и выполнить условие:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t, \mathbf{X}) = v(\mathbf{X}) \Rightarrow W_h^* = \min_{p(t, \mathbf{X})} W_h.$$

Очевидно, что для этого ядро достаточно задать в виде

$$J(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = v(\mathbf{X}_1)v(\mathbf{X}_2), \quad (3)$$

что дает симметричное вырожденное ядро с единственным собственным значением кратности 1.

Для доказательства факта, что (2) достигает минимума при $p(t, \mathbf{X}) = v(\mathbf{X})$, построим динамическую систему, описывающую пространственную деформацию системы в поле потенциала (2), меняющуюся со временем и задаваемую уравнением динамики $\frac{\partial p(t, \mathbf{X})}{\partial t} = -\frac{\partial W_{0h}}{\partial p}$ в явном виде:

$$\frac{\partial p(t, \mathbf{X})}{\partial t} = \int_A J(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1) p(t, \mathbf{X}_1) d\mathbf{X}_1 - p(t, \mathbf{X}) \int_A p^2(t, \mathbf{X}_1) d\mathbf{X}_1. \quad (4)$$

Нелинейное по p интегродифференциальное уравнение (4) получено на основе уравнения Эйлера с учетом первой вариации функционала (2) по p . Динамика этого уравнения при начальном условии вида $p(0, \mathbf{X}) = f(\mathbf{X})$ должна в пределе приводить к устойчивому пространственному решению $v(\mathbf{X})$ при условии, что все функции являются интегрируемыми и интегралы конечны.

Найдем и исследуем стационарные решения уравнения (4) из интегрального уравнения

$$\int_A J(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1) p^*(\mathbf{X}_1) d\mathbf{X}_1 - p^*(\mathbf{X}) \int_A p^{*2}(\mathbf{X}_1) d\mathbf{X}_1 = 0,$$

которое можно представить и в ином виде:

$$\int_A J(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1) p^*(\mathbf{X}_1) d\mathbf{X}_1 - p^*(\mathbf{X}) S(p^*) = 0, \quad (5)$$

где $S(p^*) = \int_A p^{*2}(\mathbf{X}_1) d\mathbf{X}_1$. При равенстве $S(p^*) = \mu$ уравнение (5) становится однородным уравнением Фредгольма 2-го рода с симметричным вырожденным ядром. Нетривиальное решение такого уравнения существует только при равенстве μ одному из собственных чисел

такого уравнения существует только при равенстве μ одному из собственных чисел ядра и в данном случае в силу некратности единственного собственного числа μ_1 имеет вид:

$$p^*(X) = C_1 \varphi(X),$$

где C_1 – некоторая константа, $\varphi(X)$ – собственная функция ядра $J(X_1, X_2)$. Как нетрудно увидеть, ненормированной собственной функцией ядра является $v(X)$, а соответствующим ему собственным значением – $\mu_1 = \int_A v^2(X_1) dX_1$. Тогда константа C_1 должна быть равна 1 для

обеспечения нулевого тождества в (5) при $p^*(X) = v(X)$. Таким образом, показано, что интегро-дифференциальное уравнение (4) имеет два стационарных решения (с точностью до знака): тривиальное $p_1^*(X) \equiv 0$ и совпадающее с собственной функцией ядра $p_2^*(X) = v(X)$.

Лемма 1. Тривиальное стационарное решение уравнения (4) в $p_1^*(X) \equiv 0$ неустойчиво, а решение $p_2^*(X) = v(X)$ устойчиво асимптотически.

Доказательство. Для исследования устойчивости стационарных решений в линейном приближении рассмотрим линеаризованное уравнение, соответствующее (4), которое можно получить на основе производной Фреше, представляющей собой функциональную производную от правой части (4) вида $L = \frac{\delta F}{\delta p}$, в которой через F обозначена правая часть (4). После

этого необходимо решить проблему собственных чисел оператора L для каждого стационарного решения. В общем случае характеристическое уравнение для оператора L имеет форму:

$$\int_A J(X, X_1) w(X_1) dX_1 - w(X) \int_A p^{*2}(X_1) dX_1 - 2p^*(X) \int_A p^*(X_1) w(X_1) dX_1 = \lambda w(X). \quad (6)$$

Здесь $w(X)$ – собственная функция оператора L , а λ – соответствующее собственное значение.

Рассмотрим стационарное решение $p_1^*(X) \equiv 0$. Уравнение (6) принимает вид

$$\int_A J(X, X_1) w(X_1) dX_1 = \lambda w(X),$$

откуда с учетом свойств ядра $J(X_1, X_2)$ следует, что $w(X)$ – обязательно собственная функция ядра, а λ – соответствующее ему собственное число, которое, как уже известно, положительно в том случае, если $v(X) \neq 0$. Таким образом, тривиальное стационарное решение неустойчиво в линейном приближении.

Для $p_2^*(X) = v(X)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_A J(X, X_1) w(X_1) dX_1 - w(X) \int_A v^2(X_1) dX_1 - 2v(X) \int_A v(X_1) w(X_1) dX_1 = \\ = - \int_A J(X, X_1) w(X_1) dX_1 - w(X) \int_A v^2(X_1) dX_1 = \lambda w(X), \end{aligned}$$

откуда очевидно, что λ – отрицательное число, поскольку ядро симметричное и вырожденное, а интеграл от квадрата стационарного решения – положительное число. Таким образом, решение $p_2^*(X) = v(X)$ асимптотически устойчиво.

На основании леммы 1 можно сделать вывод, что непрерывная система, динамика которой описывается уравнением (4), из любого начального состояния будет стремиться принять единственную стационарную форму, хранящуюся в ядре интегродифференциального уравнения.

Данные результаты позволяют предположить возможность синтеза системы, непрерывной по пространственным координатам и способной запоминать и воспроизводить произвольное число своих форм. Аналогично подходу, изложенному в [7], для подобной системы введем расширенный функционал следующего вида:

$$\begin{aligned} W_h(p(t, X)) = W_{0h}(p(t, X)) + \\ + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^M \sum_{l=1, k \neq l}^M \left[\left(\iint_A J_k(X_1, X_2) p(t, X_1) p(t, X_2) dX_1 dX_2 \right) \left(\iint_A J_l(X_1, X_2) p(t, X_1) p(t, X_2) dX_1 dX_2 \right) \right], \quad (7) \end{aligned}$$

где $W_{oh}(p(t, \mathbf{X}))$ - функционал в форме (2) с ядром $J(X_1, X_2)$, которое назовем глобальным; M – число запоминаемых форм; $J_k(X_1, X_2)$ - ядра интегральных операторов, которые назовем локальными. В (7) ядра построены согласно подходу:

$$J(X_1, X_2) = \sum_{k=1}^M J_k(X_1, X_2), \quad J_k(X_1, X_2) = v_k(X_1)u_k(X_2), \quad (8)$$

где $v_k(X)$ - линейно независимые функции, описывающие запоминаемые формы (желаемые конечные состояния), $u_k(X)$ - функции из набора, ортогонального по отношению к набору функций $v_k(X)$. Для функций $u_k(X)$ введены следующие условия:

$$\int_A v_k(\mathbf{X})u_l(\mathbf{X})d\mathbf{X} = \delta_{kl}, \quad (9)$$

где δ_{kl} - символ Кронекера, и

$$v_k(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^M g_{kj}u_j(X). \quad (10)$$

Умножив обе части (10) на $v_l(X)$ и проинтегрировав полученное выражение, получим значения элементов матрицы $\mathbf{G}=\{g_{kj}\}$ с учетом (9):

$$g_{kl} = \int_A v_k(X)v_l(X)dX. \quad (11)$$

В дальнейшем для определенности будем считать, что все $v_k(X)$ ортонормированны в области A , т. е. справедливо

$$\int_A v_k(X)v_k(X)dX = 1.$$

Тогда набор функций $u_k(X)$ вычисляется согласно выражению

$$\{u_1, u_2, \dots, u_M\} = \{v_1, v_2, \dots, v_M\} \mathbf{G}^{-1}. \quad (12)$$

Уравнение динамики, минимизирующее функционал (7) по $p(t, \mathbf{X})$, имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(t, \mathbf{X})}{\partial t} = & \int_A J(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1)p(t, \mathbf{X}_1)d\mathbf{X}_1 - p(t, \mathbf{X}) \int_A p^2(t, \mathbf{X}_1)dX_1 - \\ & - \sum_{k=1}^M \sum_{l=1, k \neq l}^M \left[\left(\int_A J_k(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1)p(t, \mathbf{X}_1)d\mathbf{X}_1 \right) \times \left(\int_A \int_A J_l(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)p(t, \mathbf{X}_1)p(t, \mathbf{X}_2)d\mathbf{X}_1 d\mathbf{X}_2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда динамика (13) должна приводить к восстановлению формы, задаваемой одной из функций $v_k(X)$, из любого первоначального состояния, отличного от стационарного решения (13) и заданного начальным условием вида $p(0, \mathbf{X}) = f(\mathbf{X})$.

Лемма 2. Уравнение динамики (13) имеет неустойчивое тривиальное стационарное решение $p_0^*(\mathbf{X}) \equiv 0$.

Доказательство. Доказательство очевидно и проводится аналогично лемме 1.

Лемма 3. Уравнение динамики (13) имеет M независимых устойчивых стационарных решений $p_k^*(\mathbf{X}) = v_k(X), k = 1, 2, \dots, M$.

Доказательство. Тот факт, что $p_k^*(\mathbf{X}) = v_k(X), k = 1, 2, \dots, M$ являются стационарными решениями, доказывается путем прямой подстановки в (13), что дает нулевое тождество. Для доказательства их устойчивости рассмотрим линеаризованное уравнение, полученное с помощью производной Фреше, как в лемме 1, для уравнения динамики (13). Проблема анализа устойчивости разрешается исходя из знаков действительных частей собственных чисел характеристического уравнения для оператора на основе производной Фреше, если производная рассчитана для стационарного решения $p_l^*(\mathbf{X}) = v_l(X)$:

$$\int_A \left[J(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1) - 2v_l(\mathbf{X})v_l(\mathbf{X}_1) - \sum_{k \neq l} J_k(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1) \right] w(\mathbf{X}_1)d\mathbf{X}_1 - w(\mathbf{X}) = \lambda w(\mathbf{X}). \quad (14)$$

Очевидно, что собственной функцией (14) является $w(\mathbf{X}) = v_l(\mathbf{X})$ с соответствующим собственным числом $\lambda = -2$. Таким образом, все стационарные решения $p_k^*(\mathbf{X}) = v_k(X), k = 1, 2, \dots, M$ устойчивы асимптотически.

Теорема. Система, заданная функционалом (7) и динамическим уравнением (13), глобально устойчива и имеет M асимптотически устойчивых стационарных решений $p_k^*(\mathbf{X}) = v_k(X), k = 1, 2, \dots, M$.

Доказательство. Глобальная устойчивость следует из вида функционала (7), заданного в форме потенциала Ф4 [6], гарантирующего, что с течением времени система из первоначально неустойчивого состояния релаксирует к устойчивому стационарному решению. Существование и устойчивость указанных решений доказана в лемме 3.

Таким образом, приведенный метод синтеза самоорганизующейся системы в гильбертовом пространстве позволяет обеспечить воспроизведение M различных форм в силу приведенной теоремы и леммы 2, которая обеспечивает уход траекторий в фазовом пространстве от начала координат и их стремление к одному из устойчивых стационарных решений, задающих требуемые формы.

3. Численные эксперименты. Подробно рассмотрим численный эксперимент, демонстрирующий основные свойства построенной модели. Пусть на одномерном отрезке $A = [-1; 1]$ задана система из $M=3$ функций $v_{0k}(x) = \{x^2, \exp(-4x^2), \sin(2\pi x)\}$, определяющих требуемые конфигурации системы в исходной форме. Очевидно, что функции являются линейно независимыми.

Подвергнем каждую функцию нормировке по правилу

$$v_k(x) = \frac{v_{0k}(x)}{\sqrt{\int_{-1}^1 v_{0k}^2(x) dx}}$$

и получим набор стандартных запоминаемых форм (округление коэффициентов произведено до 4-го знака после запятой):

$$v_k(x) = \left\{ \sqrt{\frac{5}{2}} x^2, \frac{1}{0.7915} \exp(-4x^2), \sin 2\pi x \right\}.$$

Произведем синтез глобального ядра J по формуле (8). В данном случае явный вид ядра будет следующим:

$$J(x_1, x_2) = 1.581x_1^2(1.655x_2^2 - 0.2791 \exp(-4x_2^2)) + 1.263 \exp(-4x_1^2)(-0.3494x_2^2 + 1.322 \exp(-4x_2^2)) + \sin 2\pi x_1 \sin 2\pi x_2. \quad (15)$$

Синтезируемая система должна восстанавливать свою форму, принимая вид одной из запомненных функций $v_k(x)$ в зависимости от близости к ней начального условия $p(0, x)$. Динамика системы определяется уравнением (13) с глобальным ядром, показанным в (15), и тремя локальными ядрами, построенными по правилу (8). Численное решение (13) производилось в среде пакета Matlab и Mathcad 2001 с помощью простого сеточного метода. Обыкновенные дифференциальные уравнения, которые получались в результате разбиения пространственного интервала интегрирования на узлы, решались с помощью встроенной функции `rkadapt`, реализующей метод Рунге-Кутты с адаптивным шагом. В качестве начального условия выбирались различные аналитические заданные формы, представлявшие собой определенным образом искаженные исходные конструкции. Примеры успешного восстановления конфигураций приведены на рисунке. Соответствие между некоторыми конкретными начальными условиями и соответствующими установившимися решениями в экспериментах показано в таблице.

Начальное условие	Установившееся решение
$x + x^2$	$\sqrt{\frac{5}{2}} x^2$
$\exp(-x^4)$	$\frac{1}{0.7915} \exp(-4x^2)$
x	$\sin 2\pi x$

Следует отметить, что в отличие от конечномерных систем, рассмотренных в работах [7,8], память непрерывных систем теоретически неограниченна. Это означает, что при задании формы системы в гильбертовом пространстве независимо от пределов определения возможно

запоминание и воспроизведение неограниченного счетного числа независимых форм. При этом каждая форма должна определяться некоторой функцией пространственных координат.

а

б

в

Численная демонстрация воспроизведения запомненных форм из произвольных начальных состояний:

$$\text{установившиеся решения: а - } v_1(x) = \sqrt{5/2}x^2; \text{ б - } v_2(x) = \frac{1}{0.7915} \exp(-4x^2); \text{ в - } v_3(x) = \sin 2\pi x$$

4. Заключение. В статье рассмотрен метод синтеза непрерывных динамических систем нового класса, способных запоминать и самостоятельно воспроизводить счетное число своих форм. При этом форма задается при помощи однозначной функции пространственных координат, а динамика системы определяется нелинейным интегродифференциальным уравнением в частных производных первого порядка. При задании исходной конфигурации системы в качестве начального условия данного уравнения переходный процесс приводит к изменению пространственной формы так, что с течением времени она стремится принять одно из запомненных состояний. Все желаемые формы запоминаются в ядрах интегральных операторов системы. Численные эксперименты показывают эффективность воспроизведения одной из 3 запомненных форм из некоторого первоначально искаженного состояния, задаваемого функцией одной переменной на конечном отрезке. Условием корректного воспроизведения каждой из запомненных форм является их линейная независимость друг от друга. Синтезированная система является глобально устойчивой, и в любом случае будет воспроизводиться одно из запомненных состояний. Подобная модель может быть основой для синтеза материалов нового типа, способных самостоятельно изменять свои свойства в зависимости от внешних условий и других обстоятельств. Приведенный метод также может быть достаточно важен при построении интеллектуальных распределенных систем управления с переменной структурой и распознавании образов, полученных с помощью цифровых устройств, обладающих различным разрешением.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Берже П. Конвекция Рэлея-Бенара в жидкостях с высоким числом Прандтля // В сб. Синергетика / Под ред. Б.Б.Кадомцева. М.:Мир, 1984.
2. Смоэс М. Химические волны в колебательной системе Жаботинского // В сб. Синергетика / Под ред. Б.Б.Кадомцева. М.:Мир, 1984. 384 с.

3. *Hu Zh., Chen Y., Wang C., Zheng Y., Li Y.* Polymer gels with engineered environmentally responsive surface patterns// *Nature*. V. 393. 1998. P.149-152.
4. *Mao C., Thalladi V.R., Wolfe D.B., Whitesides S., Whitesides G. M.* Dissections: Self-Assembled Aggregates That Spontaneously Reconfigure Their Structures When Their Environment Changes// *J. Am. Chem. Soc.* 9. V. 124. No. 49. 2002. P. 14508-14509.
5. *Sanders B.; Crowe R.; Garcia E.* Defense Advanced Research Projects Agency – Smart Materials and Structures Demonstration Program Overview// *J. of Intelligent Materials Systems and Structures*. V. 15. №. 4. 2004. P. 227-233.
6. *Хакен Г.* Синергетика: Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.:Мир, 1985. 412 с.
7. *Yudashkin A.A.* A Synthesis of Invariant Structures With Memory in Two-Dimensional Space// *Int. J. Modern Physics C*. V.11. No.5. 2000. P.853-864.
8. *Юдашкин А.А.* О подходе к построению трансформирующихся систем с несколькими устойчивыми состояниями// *Дифференциальные уравнения и их приложения. Межвуз. сб. науч. тр. Вып.1.* 2002. С.64-68.

Поступила 11.10.2004 г.