Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. П. Усольцев, О больших отклонениях для классических распределений, порождаемых дробными долями показательной функции с целым основанием, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 30, 99–107

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu314>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 12:55:21

Теория вероятностей

УДК 511.2+519.2

Л.П. Усольцев

О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ, ПОРОЖДАЕМЫХ ДРОБНЫМИ ДОЛЯМИ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ С ЦЕЛЫМ ОСНОВАНИЕМ

Исследуется асимптотика больших уклонений для распределений соответственно нормированных нарастающих сумм значений некоторых функций, задаваемых на последовательностях, порождаемых дробными долями показательной функции с фиксированным целым основанием.

Пусть $q \geq 2$ – фиксированное целое число, а $f(t)$ – вещественная, суммируемая с квадратом на отрезке $[0,1]$ периодическая функция с периодом 1 и коэффициентами Фурье

$$c_m = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i m t} dt \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

удовлетворяющими условию

$$|c_m| \leq \frac{A}{m^\alpha} \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (1)$$

где $A > 0$ и $\alpha \geq 1$ – некоторые постоянные. Для натуральных N положим

$$S_N(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} (f(q^n t) - c_0) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

и

$$F_N(x) = \text{mes} \{ t \in [0,1] : S_N(t) < x \} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Обозначим через σ неотрицательное число, определяемое соотношением

$$\sigma^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 S_N^2(t) dt$$

(известно (см., например [1], § 15), что этот предел существует), а через $\Phi(x)$ – нормальную функцию распределения с параметрами $(0,1)$.

Будем изучать асимптотику больших уклонений для распределения сумм $S_N(t)$ с $\sigma \neq 0$ в промежутке $[0,1]$ при $N \rightarrow \infty$.

Случай $\alpha > 1$ рассмотрен в работе [2], в которой доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Если $\alpha > 1$ и $\sigma \neq 0$, то существует положительная постоянная δ , зависящая от A, α и σ , такая, что при $N \rightarrow \infty$ в области $1 \leq x \leq \delta N^{1/6}$ выполняются соотношения:

$$1 - F_N(\sigma x) = [1 - \Phi(x)] \cdot \left[1 + O\left(\frac{x^3}{\sqrt{N}}\right) \right]$$

и

$$F_N(-\sigma x) = \Phi(-x) \cdot \left[1 + O\left(\frac{x^3}{\sqrt{N}}\right) \right]$$

с постоянной в символе “O”, зависящей от A, α и σ .

Целью настоящей заметки является доказательство следующего утверждения, анонсированного в [3].

Теорема 2. Если $\alpha = 1$ и $\sigma \neq 0$, то существует положительная постоянная δ , зависящая от A и σ , такая, что при $N \rightarrow \infty$ в области $2 \leq x \leq \delta N^{1/10}$ выполняются соотношения:

$$1 - F_N(\sigma x) = [1 - \Phi(x)] \cdot \left[1 + O\left(\frac{x^3(x^2 + \ln N)}{\sqrt{N}}\right) \right] \quad (2)$$

и

$$F_N(-\sigma x) = \Phi(-x) \cdot \left[1 + O\left(\frac{x^3(x^2 + \ln N)}{\sqrt{N}}\right) \right] \quad (3)$$

с постоянной в символе “О”, зависящей от A и σ .

Важнейшим здесь является случай, когда

$$f(t) \equiv x_\Delta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{t\} \in \Delta, \\ 0, & \text{если } \{t\} \notin \Delta, \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

с $\Delta = [a, b) \subset [0, 1)$ и $b - a < 1$. В этом случае $\sigma \neq 0$ (см. [4]), а сумма $\sum_{n=0}^{N-1} f(q^n t)$ при любом вещественном t дает количество попаданий дробных долей $\{q^n t\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N-1$) в промежутки Δ .

При доказательстве теорем 1 и 2 реализуется новый подход, суть которого заключается в том, что близость характеристических функций распределений F_N и Φ оценивается не по моментам распределения $F_{N, M}$, в которое переходит F_N в результате замены функции $f(t)$ M -ой частичной суммой ее ряда Фурье с достаточно большим M (так в сходных вопросах поступал А.Г. Постников [1]), а по семиинвариантам γ_k распределения $F_{N, M}$. Это оказалось возможным после того, как в работе [5] (лемма 1 на с. 49) было получено представление семиинвариантов γ_k через коэффициенты Фурье c_m :

$$\gamma_k = \frac{1}{N^{k/2}} \sum_{n_1=0}^{N-1} \dots \sum_{n_k=0}^{N-1} \sum_{m_1, \dots, m_k}^* c_{m_1} \dots c_{m_k} \quad (k = 2, 3, \dots), \quad (4)$$

где символом $\sum_{m_1, \dots, m_k}^*$ обозначено суммирование по всем таким упорядоченным наборам

$(m_1, \dots, m_k)$ целых чисел с условием $1 \leq |m_i| \leq M$ ($i = 1, 2, \dots, k$), что

$$m_1 q^{n_1} + \dots + m_k q^{n_k} = 0, \quad (5)$$

но при каждом $r = 1, 2, \dots, k-1$ для любых r попарно различных чисел $j_1, \dots, j_r$ множества $\{1, 2, \dots, k\}$ справедливо неравенство

$$m_{j_1} q^{n_{j_1}} + \dots + m_{j_r} q^{n_{j_r}} \neq 0. \quad (6)$$

Представление семиинвариантов γ_k в виде (4) позволяет оценивать их, не решая диофантовых уравнений вида (5) в целых числах $n_1, \dots, n_k \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ при фиксированных целых $m_1, \dots, m_k$. Именно это обстоятельство и является причиной большей эффективности нашего подхода по сравнению с теми, при которых функция распределения $F_N(x)$ строится по моментам распределения $F_{N, M}$, оценить которые, не решая уравнений вида (5), не удастся.

Оценив семиинварианты γ_k распределения $F_{N, M}$, мы находим асимптотику больших уклонений для этого распределения (а в конечном счете, и для распределения F_N), используя замечательную теорему В.А. Статулявичуса ([6]; см. также [7], с. 307, § 8.4.10) о восстановлении асимптотики больших уклонений по семиинвариантам распределения.

Доказательство теоремы 2. Очевидно, теорему достаточно доказать для случая $c_0 = \int_0^1 f(t) dt = 0$, так как к нему сводится и случай $c_0 \neq 0$: надо только вместо функции $f(t)$ рассматривать функцию $f(t) - c_0$. Будем поэтому считать, что

$$c_0 = \int_0^1 f(t) dt = 0, \quad f(t) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} ' c_m e^{2\pi i m t},$$

где штрих у знака суммы указывает на отсутствие слагаемого, отвечающего значению $m = 0$. В этом случае выражение для суммы $S_N(t)$ принимает вид

$$S_N(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f(q^n t) \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (7)$$

Заметим еще, что, вследствие вещественнозначности функции $f(t)$, при всех целых m справедливо равенство

$$c_{-m} = \bar{c}_m. \quad (8)$$

Для любого натурального числа M мы полагаем

$$f_M(t) = \sum_{|m| \leq M} ' c_m e^{2\pi i m t} \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (9)$$

и (см. (6))

$$\tilde{f}_M(t) = f(t) - f_M(t) \sim \sum_{|m| > M} c_m e^{2\pi i m t} \quad (-\infty < t < +\infty). \quad (10)$$

Лемма 1. Каковы бы ни были натуральные числа N и M , справедливо неравенство

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}_M(q^n t) \right)^2 dt \leq \frac{8A^2}{M}. \quad (11)$$

Доказательство леммы. Если n_1 и n_2 — целые числа и $n_2 \geq n_1 \geq 0$, то, вследствие (10),

$$\tilde{f}_M(q^{n_2-n_1} t) \sim \sum_{|m| > M} c_m e^{2\pi i m q^{n_2-n_1} t}.$$

Но тогда, в силу равенства Персеваля,

$$\int_0^1 \tilde{f}_M(q^{n_1} t) \tilde{f}_M(q^{n_2} t) dt = \int_0^1 \tilde{f}_M(t) \tilde{f}_M(q^{n_2-n_1} t) dt = \sum_{|m| > M} c_{q^{n_2-n_1} m} \bar{c}_m,$$

а отсюда, вследствие соотношений (8) и (1) с $\alpha = 1$, получаем:

$$\left| \int_0^1 \tilde{f}_M(q^{n_1} t) \tilde{f}_M(q^{n_2} t) dt \right| \leq 2 \sum_{m > M} \frac{A^2}{m^2 q^{n_2-n_1}} = \frac{2A^2}{q^{n_2-n_1}} \sum_{m > M} \frac{1}{m^2} \leq \frac{2A^2}{2^{n_2-n_1} M}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}_M(q^n t) \right)^2 dt &= \frac{1}{N} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} \int_0^1 \tilde{f}_M(q^{n_1} t) \tilde{f}_M(q^{n_2} t) dt \leq \frac{2}{N} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} \int_0^1 \tilde{f}_M(q^{n_1} t) \tilde{f}_M(q^{n_2} t) dt \leq \\ &\leq \frac{2}{N} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=n_1}^{N-1} \frac{2A^2}{2^{n_2-n_1} M} \leq \frac{4A^2}{M} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{8A^2}{M}. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Продолжаем доказательство теоремы. Взяв произвольные целые числа $N \geq 2$ и $M \geq q$, положим

$$S_{N,M}(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f_M(q^n t), \quad \tilde{S}_{N,M}(t) = S_N(t) - S_{N,M}(t) \quad (0 \leq t \leq 1), \quad (12)$$

$$F_{N,M}(x) = \text{mes} \{ t \in [0, 1] : S_{N,M}(t) < x \} \quad (-\infty < x < +\infty), \quad (13)$$

$$\varphi_{N,M}(u) = \int_0^1 \exp \{ i u S_{N,M}(t) \} dt \quad (-\infty < u < +\infty) \quad (14)$$

и

$$\sigma_{N,M}^2 = \int_0^1 S_{N,M}^2(t) dt \quad (\sigma_{N,M} \geq 0). \quad (15)$$

В силу соответствий (12), (7) и (10),

$$S_{N,M}(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}_M(q^n t) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Поэтому неравенство (11) можно переписать в виде

$$\int_0^1 \tilde{S}_{N,M}^2(t) dt \leq \frac{8A^2}{M}. \quad (16)$$

Лемма 2. Каковы бы ни были вещественные числа x и $c > 0$, справедливы неравенства

$$F_{N,M}(x-c) \leq F_N(x) \leq F_{N,M}(x+c) + \frac{8A^2}{c^2 M}. \quad (17)$$

Доказательство леммы. В силу равенств (12) и (13), при всех вещественных x и $c > 0$ мы имеем:

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \text{mes} \{t \in [0,1] : S_N(t) < x\} = \\ &= \text{mes} \{t \in [0,1] : S_N(t) < x, |S_N(t) - S_{N,M}(t)| \leq c\} + \\ &+ \text{mes} \{t \in [0,1] : S_N(t) < x, |S_N(t) - S_{N,M}(t)| > c\} \geq \\ &\geq \text{mes} \{t \in [0,1] : S_N(t) < x, |S_N(t) - S_{N,M}(t)| \leq c\} \geq \\ &\geq \text{mes} \{t \in [0,1] : S_{N,M}(t) < x-c\} = F_{N,M}(x-c) \end{aligned} \quad (18)$$

и

$$\begin{aligned} F_N(x) &\leq \text{mes} \{t \in [0,1] : S_{N,M}(t) < x+c\} + \text{mes} \{t \in [0,1] : |S_N(t) - S_{N,M}(t)| > c\} = \\ &= F_{N,M}(x+c) + \text{mes} \{t \in [0,1] : |\tilde{S}_{N,M}(t)| > c\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Но, в силу неравенства П.Л. Чебышева и оценки (16),

$$\text{mes} \{t \in [0,1] : |\tilde{S}_{N,M}(t)| > c\} \leq \frac{1}{c^2} \int_0^1 S_{N,M}^2(t) dt \leq \frac{8A^2}{c^2 M}.$$

Отсюда и из неравенств (18) и (19) вытекает справедливость неравенств (17). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Справедливо неравенство

$$|\sigma^2 - \sigma_{N,M}^2| \leq 50A^2 \left(\frac{\ln M}{M} + \frac{1}{N} \right). \quad (20)$$

Доказательство леммы. Известно (см., например, [1], с. 85), что

$$\sigma^2 = \int_0^1 f^2(t) dt + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f(t) f(q^n t) dt \quad (21)$$

и

$$\int_0^1 S_N^2(t) dt = \int_0^1 f^2(t) dt + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \int_0^1 f(t) f(q^n t) dt - \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{N-1} n \int_0^1 f(t) f(q^n t) dt, \quad (22)$$

а переписав равенство (22) для функции $f_M(t)$ (с учетом (12) и (15)), получим :

$$\sigma_{N,M}^2 = \int_0^1 f_M^2(t) dt + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \int_0^1 f_M(t) f_M(q^n t) dt - \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{N-1} n \int_0^1 f_M(t) f_M(q^n t) dt. \quad (23)$$

Из равенств (21) и (23) следует, что

$$\begin{aligned} |\sigma^2 - \sigma_{N,M}^2| &\leq 2 \sum_{n=0}^{N-1} \left| \int_0^1 f(t) f(q^n t) dt - \int_0^1 f_M(t) f_M(q^n t) dt \right| + \\ &+ 2 \sum_{n=N}^{\infty} \left| \int_0^1 f(t) f(q^n t) dt \right| + \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{N-1} n \left| \int_0^1 f_M(t) f_M(q^n t) dt \right|. \end{aligned} \quad (24)$$

Далее, вследствие соотношений (6) и (9), при всех целых $n \geq 0$

$$f(q^n t) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{2\pi i m q^n t} \quad \text{и} \quad f_M(q^n t) = \sum_{|m| \leq M} c_m e^{2\pi i m q^n t},$$

и, значит, в силу равенства Парсеваля, при $n \geq 0$ будет

$$\int_0^1 f(t)f(q^n t) dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{q^n m} \bar{c}_m ;$$

при $0 \leq n \leq [\ln M / \ln q]$ будет:

$$\int_0^1 f_M(t)f_M(q^n t) dt = \sum_{|m| \leq [M/q^n]} c_{q^n m} \bar{c}_m ,$$

а при $n > [\ln M / \ln q]$:

$$\int_0^1 f_M(t)f_M(q^n t) dt = 0.$$

Поэтому из неравенства (24) вытекает, что

$$\left| \sigma^2 - \sigma_{N,M}^2 \right| \leq 2 \sum_{n=0}^{[\ln M / \ln q]} \sum_{|m| > [M/q^n]} \left| c_{q^n m} \bar{c}_m \right| + 2 \sum_{n > [\ln M / \ln q]} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| c_{q^n m} \bar{c}_m \right| + \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{[\ln M / \ln q]} n \sum_{|m| \leq [M/q^n]} \left| c_{q^n m} \bar{c}_m \right| ,$$

а отсюда, вследствие соотношений (8) и (1) с $\alpha = 1$, получаем

$$\begin{aligned} \left| \sigma^2 - \sigma_{N,M}^2 \right| &\leq 4A^2 \sum_{n=0}^{[\ln M / \ln q]} \frac{1}{q^n} \sum_{m > [M/q^n]} \frac{1}{m^2} + 4A^2 \sum_{n > [\ln M / \ln q]} \frac{1}{q^n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} + \frac{4A^2}{N} \sum_{n=1}^{[\ln M / \ln q]} n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \leq \\ &\leq 4A^2 \left(\frac{6 \ln M}{M} + \frac{4}{M} + \frac{6}{N} \right) \leq 50A^2 \left(\frac{\ln M}{M} + \frac{1}{N} \right). \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Положим $C = 100A^2/\sigma$ и всюду в дальнейшем будем считать числа $N \geq 2$ и $M \geq q$ выбранными так, что

$$\frac{M}{\ln M} \geq N \geq \frac{2C}{\sigma}. \quad (25)$$

В этом случае, в силу неравенства (20), будет

$$\left| \sigma_{N,M} - \sigma \right| = \frac{\left| \sigma^2 - \sigma_{N,M}^2 \right|}{\sigma + \sigma_{N,M}} \leq \frac{50A^2}{\sigma} \left(\frac{\ln M}{M} + \frac{1}{N} \right) \leq \frac{100A^2}{\sigma N} = \frac{C}{N} \quad (26)$$

и

$$0 < \frac{\sigma}{2} \leq \sigma_{N,M} \leq \frac{3\sigma}{2}. \quad (27)$$

Для $k = 2, 3, \dots$ положим

$$\gamma_k(N, M) = \frac{1}{N^{k/2}} \sum_{n_1=0}^{N-1} \dots \sum_{n_k=0}^{N-1} \sum_{m_1, \dots, m_k}^* c_{m_1} \dots c_{m_k},$$

где символом $\sum_{m_1, \dots, m_k}^*$ обозначено суммирование по всем таким упорядоченным наборам

$(m_1, \dots, m_k)$ целых чисел с условием $1 \leq |m_i| \leq M$ ($i = 1, 2, \dots, k$), что $m_1 q^{n_1} + \dots + m_k q^{n_k} = 0$, но при каждом $r = 1, 2, \dots, k-1$ для любых r попарно различных чисел $j_1, \dots, j_r$ множества $\{1, 2, \dots, k\}$ справедливо неравенство

$$m_{j_1} q^{n_{j_1}} + \dots + m_{j_r} q^{n_{j_r}} \neq 0.$$

В работе [5] (лемма 1 на с. 49) доказано следующее утверждение.

Лемма 4. При всех вещественных u справедливо разложение

$$\log \varphi_{N,M}(u) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(iu)^k \gamma_k(N, M)}{k!},$$

где $\varphi_{N,M}(u)$ - функция, определяемая равенством (14), а символом $\log$ обозначено главное значение логарифма.

Так как $\varphi_{N,M}(u)$ - характеристическая функция распределения $F_{N,M}$, то утверждение леммы 4 означает, что величины $\gamma_k(N, M)$ ($k = 2, 3, \dots$) являются семиинвариантами этого распределения.

Как уже отмечалось, в основе доказательства теоремы 2 лежит оценка величин $\gamma_k = \gamma_k(N, M)$.

Лемма 5. При всех целых $k \geq 3$ справедлива оценка

$$|\gamma_k(N, M)| \leq \left(\frac{D \ln M}{\sqrt{N}} \right)^{k-2} \cdot k! \quad (28)$$

с $D = 384A^2(A^2 + 1)$.

Доказательство леммы. Будем, ради краткости, вместо $\gamma_k(N, M)$ писать просто γ_k . В квадратных скобках под выражением вида $\sum_{m_1} \dots \sum_{m_k}$ будем записывать условия, которым подчинены величины $m_1, \dots, m_k$. Очевидно при всех целых $k \geq 3$

$$\gamma_k = \frac{1}{N^{k/2}} \sum_{n_1=0}^{N-1} \dots \sum_{n_k=0}^{N-1} \sum'_{|m_1| \leq M} \dots \sum'_{|m_k| \leq M} c_{m_1} \dots c_{m_k},$$

$$[m_1 q^{n_1} + \dots + m_k q^{n_k} = 0, U_k]$$

где символом U_k закодировано условие: «при каждом $r = 1, 2, \dots, k-1$ для любых r попарно различных чисел $j_1, \dots, j_r$ множества $\{1, 2, \dots, k\}$ справедливо неравенство $m_{j_1} q^{n_{j_1}} + \dots + m_{j_r} q^{n_{j_r}} \neq 0$ ». Поэтому, учитывая соотношения (8) и (1) с $\alpha = 1$, мы получаем:

$$|\gamma_k| \leq \frac{k!}{N^{k/2}} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{n_1} \dots \sum_{n_k=0}^{n_{k-1}} \sum'_{|m_1| \leq M} \dots \sum'_{|m_k| \leq M} |c_{m_1} \dots c_{m_k}| \leq$$

$$[m_1 q^{n_1} + \dots + m_k q^{n_k} = 0, U_k]$$

$$\leq \frac{A^k k!}{N^{k/2}} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{n_1} \dots \sum_{n_k=0}^{n_{k-1}} \sum'_{|m_1| \leq M} \dots \sum'_{|m_k| \leq M} \frac{1}{|m_1 \dots m_k|} =$$

$$[m_1 q^{n_1} + \dots + m_k q^{n_k} = 0, U_k]$$

$$= \frac{A^k k!}{N^{k/2}} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{n_1} \dots \sum_{n_k=0}^{n_{k-1}} \sum'_{|m_1| \leq M} \dots \sum'_{|m_k| \leq M} \frac{1}{|m_1 \dots m_{k-1}|} \cdot \frac{1}{|m_1 q^{n_1-n_k} + \dots + m_{k-1} q^{n_{k-1}-n_k}|}.$$

$$[U_k] \quad (29)$$

А так как

$$\sum_{n_k=0}^{n_{k-1}} \frac{1}{q^{n_{k-1}-n_k}} = \sum_{s=0}^{n_{k-1}} \frac{1}{q^s} < \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^s} = 2,$$

то из соотношения (29) следует, что

$$|\gamma_k| \leq \frac{A^k k!}{N^{k/2}} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{n_1} \dots \sum_{n_k=0}^{n_{k-1}} \frac{1}{q^{n_{k-1}-n_k}} \sum'_{|m_1| \leq M} \dots \sum'_{|m_{k-1}| \leq M} \frac{1}{|m_1 \dots m_{k-1}|} \cdot \frac{1}{|m_1 q^{n_1-n_{k-1}} + \dots + m_{k-2} q^{n_{k-2}-n_{k-1}} + m_{k-1}|}$$

$$[U_{k-1}]$$

$$\leq \frac{2A^k k!}{N^{k/2}} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{n_1} \dots \sum_{n_{k-1}=0}^{n_{k-2}} \sum'_{|m_1| \leq M} \dots \sum'_{|m_{k-1}| \leq M} \frac{1}{|m_1 \dots m_{k-2}|} \cdot \frac{1}{|m_{k-1} (m_1 q^{n_1-n_{k-1}} + \dots + m_{k-2} q^{n_{k-2}-n_{k-1}} + m_{k-1})|}$$

$$[U_{k-1}] \quad (30)$$

Рассмотрим величину $T(b) = \sum_{m=1}^M \frac{1}{|m| |m+b|}$ ($b \neq 0$ – целое число).

$$[m+b \neq 0]$$

Заметим, что при всех целых $b \neq 0$ справедлива оценка

$$T(b) \leq \frac{12 \ln M}{|b|}. \quad (31)$$

Из соотношений (30) и (31) следует, что

$$|\gamma_k| \leq \frac{2A^k k! \cdot 24 \ln M}{N^{k/2}} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{n_1} \cdots \sum_{n_{k-1}=0}^{n_{k-2}} \sum'_{|m_1| \leq M} \cdots \sum'_{|m_{k-2}| \leq M} \frac{1}{|m_1 \cdots m_{k-2}|} \cdot \frac{1}{|m_1 q^{n_1 - n_{k-1}} + \cdots + m_{k-2} q^{n_{k-2} - n_{k-1}}|} \cdot [U_{k-2}]$$

Сравнивая эту оценку величины γ_k с оценкой (29), мы видим, что, продолжая наш процесс, мы через некоторое число шагов придем к оценке

$$|\gamma_k| \leq \frac{2A^k k! \cdot (24 \ln M)^{k-2}}{N^{k/2}} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{n_1} \sum'_{|m_1| \leq M} \frac{1}{|m_1 \cdot m_1 q^{n_1 - n_2}|}.$$

Но тогда

$$|\gamma_k| \leq \frac{4A^k k! \cdot (24 \ln M)^{k-2}}{N^{k/2}} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{n_1} \frac{1}{q^{n_1 - n_2}} \sum_{m=1}^M \frac{1}{m^2} \leq \frac{16A^k k! (24 \ln M)^{k-2}}{N^{k/2-1}} \leq \left(\frac{384A(A^2 + 1) \ln M}{\sqrt{N}} \right)^{k-2} \cdot k!$$

Лемма 5 доказана.

Положим

$$\Delta_{N,M} = \sigma_{N,M} \cdot \inf_{k \geq 3} \left(\frac{4k! \sigma_{N,M}^2}{|\gamma_k(N, M)| \sigma^2} \right)^{1/(k-2)}.$$

Вследствие (27) и (28), справедливо неравенство

$$\Delta_{N,M} \geq \frac{\sigma \sqrt{N}}{2D \ln M}, \quad (32)$$

а в силу теоремы В.А. Статулявичуса о восстановлении асимптотики больших уклонений по семиинвариантам распределения ([6]; см. также [7], с. 307, § 8.4.10), существует постоянная $\delta_1 > 0$, зависящая от σ , такая, что в области $1 \leq x \leq \delta_1 \Delta_{N,M}$ выполняются соотношения

$$\frac{1 - F_{N,M}(\sigma_{N,M} x)}{1 - \mathcal{U}(x)} = \exp \left\{ \frac{x^3}{\Delta_{N,M}} \lambda \left(\frac{x}{\Delta_{N,M}} \right) \right\} \cdot \left[1 + O \left(\frac{x}{\Delta_{N,M}} \right) \right]$$

и

$$\frac{F_{N,M}(-\sigma_{N,M} x)}{\mathcal{U}(-x)} = \exp \left\{ -\frac{x^3}{\Delta_{N,M}} \lambda \left(-\frac{x}{\Delta_{N,M}} \right) \right\} \cdot \left[1 + O \left(\frac{x}{\Delta_{N,M}} \right) \right],$$

где $\lambda(\tau)$ - степенной ряд Крамера (строющийся по семиинвариантам распределения $F_{N,M}$), сходящийся при $|\tau| \leq \delta_1$ (здесь и всюду далее постоянные в символах “O” зависят от A и σ).

Но тогда, в силу неравенства (32), в области $1 \leq x \leq \delta_1 \sqrt{N} / (D \ln M)$ справедливы соотношения

$$1 - F_{N,M}(\sigma_{N,M} x) = [1 - \mathcal{U}(x)] \cdot \exp \left\{ O \left(\frac{x^3 \ln M}{\sqrt{N}} \right) \right\} \cdot \left[1 + O \left(\frac{x \ln M}{\sqrt{N}} \right) \right]$$

и

$$F_{N,M}(-\sigma_{N,M} x) = \mathcal{U}(-x) \cdot \exp \left\{ O \left(\frac{x^3 \ln M}{\sqrt{N}} \right) \right\} \cdot \left[1 + O \left(\frac{x \ln M}{\sqrt{N}} \right) \right].$$

А отсюда вытекает уже, что существует постоянная $\delta_2 > 0$, зависящая от A и σ , такая, что в области

$$1 \leq x \leq \delta_2 \frac{N^{1/6}}{\ln^{1/3} M} \quad (33)$$

выполняются соотношения

$$1 - F_{N,M}(\sigma_{N,M} x) = [1 - \mathcal{U}(x)] \cdot \left[1 + O \left(\frac{x^3 \ln M}{\sqrt{N}} \right) \right] \quad (34)$$

и

$$F_{N,M}(-\sigma_{N,M} x) = \mathcal{U}(-x) \cdot \left[1 + O \left(\frac{x^3 \ln M}{\sqrt{N}} \right) \right]. \quad (35)$$

Положим $c = 1/(N^{5/6} \ln^{1/3} M)$ и $\delta = \min(1, \delta_2/3)$. Вследствие неравенств (26) и (27), в области

$$2 \leq x \leq \frac{\delta N^{1/6}}{\ln^{1/3} M} \quad (36)$$

справедливы соотношения

$$\left| \mathcal{U}\left(\frac{\sigma x \pm c}{\sigma_{N,M}}\right) - \mathcal{U}(x) \right| = O\left(\frac{e^{-x^2/2}}{N^{5/6} \ln^{1/3} M}\right), \quad \left| \mathcal{U}\left(-\frac{\sigma x \pm c}{\sigma_{N,M}}\right) - \mathcal{U}(-x) \right| = O\left(\frac{e^{-x^2/2}}{N^{5/6} \ln^{1/3} M}\right).$$

Поэтому, заменив в соотношениях (33) – (35) x на $\frac{\sigma x \pm c}{\sigma_{N,M}}$, мы, в силу неравенства (17), сможем утверждать, что в области (36) выполняются соотношения

$$1 - F_N(\sigma x) = \left[1 - \mathcal{U}(x) + O\left(\frac{e^{-x^2/2}}{N^{5/6} \ln^{1/3} M}\right) \right] \cdot \left[1 + O\left(\frac{x^3 \ln M}{\sqrt{N}}\right) \right] + O\left(\frac{N^{5/3} \ln^{2/3} M}{M}\right) \quad (37)$$

и

$$F_N(-\sigma x) = \left[\mathcal{U}(-x) + O\left(\frac{e^{-x^2/2}}{N^{5/6} \ln^{1/3} M}\right) \right] \cdot \left[1 + O\left(\frac{x^3 \ln M}{\sqrt{N}}\right) \right] + O\left(\frac{N^{5/3} \ln^{2/3} M}{M}\right). \quad (38)$$

Учитывая теперь, что при $x \geq 1$ справедливы неравенства

$$1 - \mathcal{U}(x) \geq \frac{1}{2x} e^{-x^2/2} \quad \text{и} \quad \mathcal{U}(-x) \geq \frac{1}{2x} e^{-x^2/2},$$

нетрудно привести соотношения (37) и (38) к следующему виду:

$$1 - F_N(\sigma x) = \left[1 - \mathcal{U}(x) \right] \cdot \left[1 + O\left(\frac{x^3 \ln M}{\sqrt{N}}\right) + O\left(\frac{x e^{x^2/2} N^{5/3} \ln^{2/3} M}{M}\right) \right] \quad (39)$$

и

$$F_N(-\sigma x) = \mathcal{U}(-x) \cdot \left[1 + O\left(\frac{x^3 \ln M}{\sqrt{N}}\right) + O\left(\frac{x e^{x^2/2} N^{5/3} \ln^{2/3} M}{M}\right) \right]. \quad (40)$$

Взяв произвольно число x_0 в области

$$2 \leq x \leq \delta N^{1/10}, \quad (41)$$

положим $M = [N^3 e^{x_0^2/2}]$, что не противоречит неравенствам (25). При таком выборе числа M область (41) будет содержаться в области (36) и, следовательно, будут выполняться соотношения (39) и (40) с $x = x_0$ и $M = [N^3 e^{x_0^2/2}]$:

$$1 - F_N(\sigma x_0) = \left[1 - \mathcal{U}(x_0) \right] \cdot \left[1 + O\left(\frac{x_0^3 (x_0^2 + \ln N)}{\sqrt{N}}\right) \right]$$

и

$$F_N(-\sigma x_0) = \mathcal{U}(-x_0) \cdot \left[1 + O\left(\frac{x_0^3 (x_0^2 + \ln N)}{\sqrt{N}}\right) \right]$$

с постоянной в символе “ O ”, не зависящей от x_0 . Мы доказали справедливость соотношений (2) и (3) в произвольной точке x_0 области (41), а значит, и во всей этой области.

Теорема 2 доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Постников А.Г. Эргодические вопросы теории сравнений и теории диофантовых приближений // Труды Матем. ин-та им. В.А.Стеклова. М: Наука. Т.82. 1966. 112 с.
2. Усольцев Л.П. Центральная предельная теорема и большие отклонения для одной суммы с показательной функцией // Марковские случайные процессы и их применение. Межвуз. научн. сб. Саратов: СГУ, 1980. С. 105-114.
3. Усольцев Л.П. О больших отклонениях для распределения дробных долей показательной функции // Обозрение прикл. и промышл. матем. Сер. Вероятн. и статист. М.: ТВП, 1999. Т.6. Вып. №1. С. 209-210.
4. Усольцев Л.П. К закону повторного логарифма в задаче о распределении дробных долей показательной функции // Труды Куйбыш. авиац. ин-та. Математика. 1975. Вып. №1 С. 24-28

5. *Усольцев Л.П.* Неулучшаемая оценка скорости сходимости к нормальному закону и асимптотика больших отклонений в одном частном случае теоремы Форте-Каца // Исследования по аддитивной теории чисел . Научн. труды Куйбыш. пед. ин-та. 1978. Т. 215. С. 45-76.
6. *Statulevičius V.A.* On large deviations // Z. Wahr. 1966. V.6, №2. S. 133-144.
7. *Петров В.В.* Суммы независимых случайных величин. М.:Наука, 1972. 416 с.

Поступила 2.06.2004 г.