Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Гольдштейн, Н. В. Сайдова, А. К. Танаев, Математическое моделирование продольных токов смещения и поверхностного эффекта в многослойной земле и проводах линий электропередачи, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 30, 170–177

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu319>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 13:06:42

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ТОКОВ СМЕЩЕНИЯ И ПОВЕРХНОСТНОГО ЭФФЕКТА В МНОГОСЛОЙНОЙ ЗЕМЛЕ И ПРОВОДАХ ЛИНИЙ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ

Рассматриваются основные положения математического моделирования анализа электромагнитных квазистационарных процессов в многокомпонентных системах и устройствах на примере исследования поверхностного эффекта в проводах многопроводной воздушной линии электропередачи и проводящей земле, имеющей неоднородную горизонтальную многослойную структуру при пренебрежении составляющими векторов напряженностей: продольной для магнитного и поперечной для электрического полей.

Математическое описание распространения электромагнитных волн в многокомпонентных системах и устройствах, таких, как многопроводные воздушные и кабельные линии, заземляющие устройства, линии и кабели связи и др., основано на анализе систем уравнений Максвелла, построенных для соответствующих электромагнитных полей [1]. При этом должны быть удовлетворены граничные условия на поверхностях раздела сред с различными характеристиками (воздух, земля с неоднородной структурой, провода, грозозащитные тросы, металлические конструкции и т.д.).

Решение названных задач в подавляющем большинстве случаев производится с помощью классического перехода от дифференциального описания в рамках теории электромагнитных полей к интегральным представлениям с помощью схем замещения в виде цепей с сосредоточенными и распределенными параметрами. Эти параметры и позволяют интегрально учесть, с одной стороны, физические условия, разнообразные технические условия, среды и границы между ними. С другой стороны, они позволяют определить в названных технических системах соответствующие реакции в виде токов, напряжений, мощностей и других параметров стационарных и переходных режимов, что необходимо для принятия технических решений [2].

Обобщенное представление квазистационарных и импульсных процессов в названных выше многокомпонентных системах производится с помощью телеграфных уравнений, решение которых необходимо производить в очень широком диапазоне частот. Одним из наиболее значимых физических процессов при этом является поверхностный эффект в проводах и земле [3], имеющей неоднородную, чаще всего, слоистую структуру.

Рассмотрим учёт этого эффекта для многокомпонентных систем, не умаляя общности рассуждений, на примере многопроводной воздушной линии электропередачи. Отметим, что способы и методика решений с необходимыми изменениями могут быть использованы для других многокомпонентных систем и устройств, в частности, заземляющих конструкций и др.

Для многопроводной линии [4] названное влияние поверхностного эффекта в однородной земле и проводах учитывается в матрице продольных сопротивлений добавкой сопротивлениям идеальной линии без потерь $\Delta Z = \frac{1}{2} p \mu F / \pi$ в первом приближении (с допущениями о пренебрежении составляющими векторов напряженностей: продольной для магнитного и поперечной для электрического полей) с помощью интегралов Карсона [3]. В этом случае матрица F имеет вид

$$F = F_z + F_n, \quad (1)$$

где F_z - квадратная матрица интегралов Карсона, в которой элементы fz_{km} (k и m - номера проводов многопроводной линии) определяются с помощью интегральных выражений

$$fz_{km}(r, \theta) = \int_0^\infty \frac{2e^{-\lambda(h_k+h_m)} \cos \lambda a_{km}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + p\mu_0\gamma_z}} d\lambda; \quad (2)$$

F_n - диагональная матрица, собственные элементы которой определяются в виде [4]

$$fn_{kk} = \frac{\mu_k k_{ck} I_0(\psi_k)}{\mu_0 \psi_k I(\psi_k)}. \quad (3)$$

В выражении (2) $r = \sqrt{[(h_k + h_m)^2 + a^2]p\mu_0\gamma_z}$ и $\theta = \arctg |a_{km}/(h_k + h_m)|$ - параметры интегралов Карсона, зависящие от геометрических и электромагнитных характеристик линии, таких, как h_k , h_m , a_{km} - соответственно, высоты над горизонтальной землей k -го и m -го проводов и расстояние между ними по горизонтали, μ_0 - магнитная проницаемость, $\rho_z = 1/\gamma_z$ - удельные сопротивление и проводимость земли, p - оператор интегрального преобразования Лапласа.

Выражение (3) учитывает поверхностный эффект [4] в k -ом проводе. В нём $\psi_k = r_k \sqrt{p\mu_k\gamma_k}$ - аргумент модифицированных функций Бесселя $I_0(\psi_k)$, $I_1(\psi_k)$, $\rho_k = 1/\gamma_k$ - удельное сопротивление и проводимость, μ_k - магнитная проницаемость (при пренебрежении намагничиванием стальной части провода), κ_{ck} - коэффициент, приближенно отражающий многожильность, скрутку повивов провода, окисление поверхности и т.д., r_k - радиус одиночного провода (для расщепленных проводов эквивалентный радиус рассчитывается по формуле $r_{кэ} = \sqrt{r_k a_p^{s-1}}$, где r_k - радиус одной из s составляющих провода, расщепленного с шагом a_p [2]).

Вычисление элементов матрицы F_n по формуле (3) упрощается тем, что при значениях аргумента $|\psi| > 20$ с погрешностью не более 10^{-4} можно принять $I_0(\psi)/I_1(\psi) \approx 1$ [5].

Выражение (2) справедливо при пренебрежении токами смещения для однородной земли. Однако исследования показывают, что массивы земли часто неоднородны, причем самой распространенной является горизонтально-слоистая структура. В частности, для северных районов страны характерны малое удельное сопротивление верхнего слоя грунта и очень большое (до 10000 Ом·м и более) - для нижнего слоя вечной мерзлоты.

Для учета этого фактора при расчете продольных сопротивлений (матрицы F) необходимо иметь интегральные выражения вида (2), аналогичные решению Карсона [3]. Получим эти выражения при допущениях Карсона для наиболее распространенного случая, когда земля состоит из двух слоев (диэлектрические, магнитные проницаемости и удельные сопротивления и проводимости соответственно ε_I , ε_{II} , μ_I , μ_{II} , $\rho_I = 1/\gamma_I$, $\rho_{II} = 1/\gamma_{II}$), граница между которыми лежит на глубине d .

Будем характеризовать волны, распространяющиеся по линии (её для упрощения изложения будем считать пока однопроводной) вдоль оси X , токи, заряды и поле общим динамическим гармоническим (при $p = j\omega$) коэффициентом $e^{-\Gamma x + j\omega t}$ (Γ - постоянная распространения), который для удобства может быть опущен в формулах. Это предположение соответствует допущению о наличии синусоидальных волн, распространяющихся только в сторону положительной оси X , и отсутствии встречных волн. При этом общее решение волнового уравнения, вытекающего из системы уравнений Максвелла, составленной для данных условий, может быть записано, например, для продольной электрической напряженности в земле в следующем виде:

$$\begin{cases} E_x^I = -\int_0^\infty M_I'(\lambda) e^{\eta_I z} \cos \lambda y d\lambda - \int_0^\infty M_I''(\lambda) e^{-\eta_I z} \cos \lambda y d\lambda & \text{для } 0 \geq Z \geq -d; \\ E_x^{II} = -\int_0^\infty M_{II}'(\lambda) e^{\eta_{II} z} \cos \lambda y d\lambda & \text{для } -d \geq Z \geq -\infty, \end{cases} \quad (4)$$

где $\eta_I = \sqrt{\lambda^2 + j\omega\mu_I\gamma_I} + \omega(\mu_0\varepsilon_0 - \mu_I\varepsilon_I) = \sqrt{\lambda^2 - m_I^2}$;

$\eta_{II} = \sqrt{\lambda^2 + j\omega\mu_{II}\gamma_{II}} + \omega(\mu_0\varepsilon_0 - \mu_{II}\varepsilon_{II}) = \sqrt{\lambda^2 - m_{II}^2}$; $M_I'(\lambda)$, $M_I''(\lambda)$, $M_{II}(\lambda)$ - произвольные функции λ , определяемые из граничных условий.

Конструкция выражений (4) обуславливается симметрией поля относительно оси Z , необходимостью обращения в нуль E_x^I при $Z = -\infty$ и ограниченностью первого слоя земли (две составляющих в E_x^I). Кроме того, построение выражений для η_I , η_{II} позволяет учесть продольные токи смещения в земле.

Полагая по Карсону [3], что в земле поперечные составляющие E_z и E_y незначительны по сравнению с E_x , можно получить из уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}$ с учетом (4) следующие соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_y^I = \frac{1}{j\omega\mu_I} \left[\int_0^\infty \eta_I M_I'(\lambda) e^{\eta_I z} \cos \lambda y d\lambda - \int_0^\infty \eta_I M_I''(\lambda) e^{-\eta_I z} \cos \lambda y d\lambda \right], \\ H_z^I = \frac{1}{j\omega\mu_I} \left[\int_0^\infty \lambda M_I'(\lambda) e^{\eta_I z} \cos \lambda y d\lambda - \int_0^\infty \lambda M_I''(\lambda) e^{-\eta_I z} \cos \lambda y d\lambda \right], \\ H_y^{II} = \frac{1}{j\omega\mu_{II}} \int_0^\infty \eta_{II} M_{II}(\lambda) e^{\eta_{II} z} \cos \lambda y d\lambda, \\ H_z^{II} = \frac{1}{j\omega\mu_{II}} \int_0^\infty \lambda M_{II}(\lambda) e^{\eta_{II} z} \cos \lambda y d\lambda. \end{array} \right. \quad (5)$$

Представим поле в воздухе состоящим из двух составляющих, например

$$H_y = H_y^0 + H_y^I, \quad H_z = H_z^0 + H_z^I, \quad (6)$$

где H_y^0, H_z^0 определяют поле от тока I в проводе, а H_y^I, H_z^I - поле от тока в земле.

Теперь, считая распределение тока по сечению провода симметричным, можно записать на основании закона полного тока для любой точки в воздухе с координатами y, z :

$$H_y^0 = \frac{\cos \theta}{d} \frac{I}{2\pi}, \quad H_z^0 = \frac{\sin \theta}{d} \frac{I}{2\pi}, \quad (7)$$

где $d = \sqrt{y^2 + (h-z)^2}$, $\cos \theta = \frac{h-z}{d}$, $\sin \theta = \frac{y}{d}$.

В частности, на границе раздела $Z = 0$, H_y^0 и H_z^0 могут быть выражены с помощью интегралов Фурье

$$H_{y|z=0}^0 = \frac{I}{2\pi} \int_0^\infty \cos \lambda y e^{-\lambda h} d\lambda, \quad H_{z|z=0}^0 = \frac{I}{2\pi} \int_0^\infty \sin \lambda y e^{-\lambda h} d\lambda. \quad (8)$$

Вторичное магнитное поле в воздухе, так же как и в [3], может быть принято в виде

$$H_y^I = \int_0^\infty \Phi(\lambda) \cos \lambda y e^{-\lambda z} d\lambda, \quad H_z^I = \int_0^\infty \Phi(\lambda) \sin \lambda y e^{-\lambda z} d\lambda. \quad (9)$$

На поверхностях раздела сред с различными характеристиками нормальные и тангенциальные составляющие H_y и H_z должны удовлетворять следующим условиям:

$$H_{y_b} = H_y^I, \quad \mu_0 H_{z_b} = \mu_I H_z \quad \text{для } z = 0; \quad (10)$$

$$H_y^I = H_y^{II}, \quad \mu_I H_z = \mu_{II} H_z \quad \text{для } z = -d.$$

Это позволяет составить систему для определения неизвестных функций $M_I'(\lambda), M_I''(\lambda), M_{II}(\lambda), \Phi(\lambda)$ на основании выражений (5-9):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{j\omega\mu_I} \eta_I M_I'(\lambda) - \frac{1}{j\omega\mu_I} \eta_I M_I''(\lambda) = \frac{I}{2\pi} e^{-\lambda h} + \Phi(\lambda); \\ \mu_0 \left[\frac{1}{j\omega\mu_I} \lambda M_I'(\lambda) + \frac{1}{j\omega\mu_I} \lambda M_I''(\lambda) \right] = \mu_I \left[\frac{I}{2\pi} e^{-\lambda h} - \Phi(\lambda) \right]; \\ \eta_I M_I'(\lambda) e^{-\eta_I d} - \eta_I M_I''(\lambda) e^{\eta_I d} = \eta_{II} M_{II}(\lambda) e^{-\eta_{II} d}; \\ \mu_I [M_I'(\lambda) e^{-\eta_I d} + M_I''(\lambda) e^{\eta_I d}] = \mu_{II} M_{II}(\lambda) e^{-\eta_{II} d}. \end{array} \right. \quad (11)$$

Решая систему (11) для часто встречающегося случая $\mu_I = \mu_{II} = \mu_0$, получим выражения для функций $M_I'(\lambda), M_I''(\lambda), M_{II}(\lambda), \Phi(\lambda)$ в виде

$$M_I'(\lambda) = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi\chi_1} Ie^{\eta_I d - \lambda h} (\eta_I + \eta_{II}), \quad M_I''(\lambda) = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi\chi_1} Ie^{-\eta_I d - \lambda h} (\eta_I - \eta_{II}), \quad (12)$$

$$M_{II}(\lambda) = \frac{j\omega\mu_0}{\pi\chi_1} I\eta_{II} e^{\eta_{II} d - \lambda h}, \quad \Phi(\lambda) = \frac{\chi_z}{2\pi\chi_1} Ie^{-\lambda h},$$

где $\chi_1 = (\eta_I^2 + \eta_{II}\lambda)\text{sh}\eta_I d + (\eta_I\eta_{II} + \eta_I\lambda)\text{ch}\eta_I d$, $\chi_2 = (\eta_I^2 - \eta_{II}\lambda)\text{sh}\eta_I d + (\eta_I\eta_{II} - \eta_I\lambda)\text{ch}\eta_I d$. С помощью этих выражений могут быть записаны все интересующие нас составляющие поля в каждом слое земли.

Для дальнейшего анализа нам понадобятся продольная составляющая E_x^I вектора электрической напряженности и тангенциальная составляющая $H_{y\phi}$ вектора магнитной напряженности:

$$E_x^I = -\frac{j\omega\mu}{\pi} I \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda h} \cos \lambda y}{x_1} [\eta_I \text{ch} \eta_I (z+d) + \eta_{II} \text{sh} \eta_I (z+d)] d\lambda, \quad (13)$$

$$H_{y\phi} = H_y^0 + H_y' = \frac{\cos \theta}{d} \frac{I}{2\pi} \int_0^\infty \frac{x_2}{x_1} e^{-(h+z)} \cos \lambda y d\lambda. \quad (14)$$

Для определения продольной составляющей $E_{x\phi}$ электрической напряженности в воздухе используем известное выражение

$$E_{x\phi} = -j\omega A_{x\phi} - \frac{\partial}{\partial x} V, \quad (15)$$

где $A_{x\phi}$ - продольная составляющая векторного потенциала, V - скалярный потенциал.

Составляя теперь разность величин, входящих в (15), для точек (y, z) и $(y, 0)$ на поверхности раздела $Z = 0$, а также учитывая, что

$$A_{x\phi}(y, z) - A_{x\phi}(y, 0) = \mu_0 \int_0^z H_{y\phi}(y, z) dz, \quad (16)$$

можем записать

$$E_{x\phi} = E_{x\phi}(y, 0) - \mu_0 \int_0^z H_{y\phi}(y, z) dz - \frac{\partial}{\partial z} U, \quad (17)$$

где U - разность потенциалов $V(y, z)$ и $V(y, 0)$.

Интеграл (17), вычисленный с учетом (14), состоит из двух слагаемых:

$$\mu_0 \int_0^z H_{y\phi}(y, z) dz = \frac{\mu_0}{2\pi} I \ln \frac{\sqrt{y^2 + h^2}}{\sqrt{y^2 + (h-z)^2}} + \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda h} \cos \lambda y \chi_2}{\chi_1 \lambda} (1 - e^{-\lambda z}). \quad (18)$$

Подставляя теперь (13) и (18) в (17), получим

$$E_{x\phi} = -\frac{j\omega\mu_0}{2\pi} I \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda h} - e^{-\lambda(h+z)}}{\lambda} \cos \lambda y d\lambda - \frac{j\omega\mu_0}{\pi} I \int_0^\infty \frac{\eta_{II} \text{sh} \eta_I d + \eta_I \text{ch} \eta_I d}{\chi_1} e^{-(h+z)} \cos \lambda y d\lambda - \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} I \ln \frac{\sqrt{y^2 + h^2}}{\sqrt{y^2 + (h-z)^2}} - \frac{\partial}{\partial z} U. \quad (19)$$

Здесь первый интеграл в правой части представляет собой разновидность интеграла Фруллани [5] $\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda h} - e^{-\lambda(h+z)}}{\lambda} \cos \lambda y dy = \ln \sqrt{\frac{y^2 + (h+z)^2}{y^2 + h^2}}$. Окончательно, после упрощений, (19)

можно записать в виде

$$E_{x\phi} = -\frac{j\omega\mu}{\pi} I \left[\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(h+z)} \cos \lambda y}{\lambda + A(\lambda)} d\lambda + \ln \frac{D}{d} \right] - \frac{\partial}{\partial z} V, \quad (20)$$

где $A(\lambda) = \frac{\eta_I(\eta_{II} + \text{cth}\eta_I d)}{1 + \eta_{II} \text{cth}\eta_I d}$, $\eta_{II} = \frac{\eta_I}{\eta_{II}}$, $D = \sqrt{y^2 + (h+z)^2}$, $d = \sqrt{y^2 + h^2}$.

Откуда, приравнявая продольную напряженность на поверхности провода найденному выражению (20), получим аналогично (2) выражение для учета влияния двухслойной земли и продольных токов смещения в матрице сопротивлений линии, выведенное с допущениями Карсона:

$$f_{z_{km}} = \int_0^\infty \frac{2e^{-\lambda(h_k+h_m)} \cos \lambda a_{km}}{\lambda + A(\lambda)} d\lambda. \quad (21)$$

Более точное решение этой задачи можно построить при использовании методики Гринберга и Бонштедта [6].

Рассмотренный метод учета влияния двухслойной земли в матрице продольных сопротивлений обладает большой наглядностью. Однако для многослойной земли выкладки становятся весьма сложными. Поэтому целесообразно рассмотреть метод, позволяющий решать такую задачу. В этом случае выражения, аналогичные E_x^I (4), должны быть записаны для $n-1$ верхних слоев и аналогичные E_x^{II} для последнего. Это позволит так же, как и в (5), определить общий вид H_x и H_y для всех слоев, и построить систему граничных условий типа (10) для всех границ раздела $Z_i=0, 1, 2, \dots, n-1 = -d_i$ ($Z_0=0$). Если, как и ранее, положить $\mu_i = \mu_0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то система уравнений для определения функций $M_i^I(\lambda), M_i^{II}(\lambda), \Phi(\lambda)$ примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\eta_I}{j\omega\mu_0} M_1^I(\lambda) - \frac{\eta_I}{j\omega\mu_0} M_1^{II}(\lambda) = \frac{I}{2\pi} e^{-\lambda h} + \Phi(\lambda); \\ \frac{\lambda}{j\omega\mu_0} M_1^I(\lambda) + \frac{\lambda}{j\omega\mu_0} M_1^{II}(\lambda) = \frac{I}{2\pi} e^{-\lambda h} - \Phi(\lambda); \\ \eta_I M_1^I(\lambda) e^{-\eta_I d_1} - \eta_I M_1^{II}(\lambda) e^{\eta_I d_1} = \eta_{II} M_2^I(\lambda) e^{-\eta_{II} d_1} - \eta_{II} M_2^{II}(\lambda) e^{\eta_{II} d_1}; \\ M_1^I(\lambda) e^{-\eta_I d_1} + M_1^{II}(\lambda) e^{\eta_I d_1} = M_2^I(\lambda) e^{-\eta_{II} d_1} + M_2^{II}(\lambda) e^{\eta_{II} d_1}; \\ \dots; \\ \eta_i M_i^I(\lambda) e^{-\eta_i d_i} - \eta_i M_i^{II}(\lambda) e^{\eta_i d_i} = \eta_{i+1} M_{i+1}^I(\lambda) e^{-\eta_{i+1} d_i} - \eta_{i+1} M_{i+1}^{II}(\lambda) e^{\eta_{i+1} d_i}; \\ M_i^I(\lambda) e^{-\eta_i d_i} + M_i^{II}(\lambda) e^{\eta_i d_i} = M_{i+1}^I(\lambda) e^{-\eta_{i+1} d_i} + M_{i+1}^{II}(\lambda) e^{\eta_{i+1} d_i}; \\ \eta_{n-1} M_{n-1}^I(\lambda) e^{-\eta_{n-1} d_{n-1}} - \eta_{n-1} M_{n-1}^{II}(\lambda) e^{\eta_{n-1} d_{n-1}} = \eta_n M_n^I(\lambda) e^{-\eta_n d_{n-1}}; \\ M_{n-1}^I(\lambda) e^{-\eta_{n-1} d_{n-1}} + M_{n-1}^{II}(\lambda) e^{\eta_{n-1} d_{n-1}} = M_n^I(\lambda) e^{-\eta_n d_{n-1}}. \end{array} \right. \quad (22)$$

Для каждой границы раздела составлено по два уравнения. Меняя знаки в каждом первом из двух (кроме уравнения границы $Z = 0$) и деля на его левую и правую части соответствующие части второго уравнения, получим после преобразований:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{M_1 + 1}{M_1 - 1} = \frac{\eta_I}{\lambda} \frac{\frac{I}{2\pi} e^{-\lambda h} - \Phi(\lambda)}{\frac{I}{2\pi} e^{-\lambda h} + \Phi(\lambda)}; \\ \frac{e^{\eta_I d_1} + M_1 e^{-\eta_I d_1}}{e^{\eta_I d_1} - M_1 e^{-\eta_I d_1}} = \frac{\eta_I}{\eta_{II}} \frac{e^{\eta_{II} d_1} + M_2 e^{-\eta_{II} d_1}}{e^{\eta_{II} d_1} - M_2 e^{-\eta_{II} d_1}}; \\ \dots; \\ \frac{e^{\eta_i d_i} + M_i e^{-\eta_i d_i}}{e^{\eta_i d_i} - M_i e^{-\eta_i d_i}} = \frac{\eta_i}{\eta_{i+1}} \frac{e^{\eta_{i+1} d_i} + M_{i+1} e^{-\eta_{i+1} d_i}}{e^{\eta_{i+1} d_i} - M_{i+1} e^{-\eta_{i+1} d_i}}; \\ \dots; \\ \frac{e^{\eta_{n-1} d_{n-1}} + M_{n-1} e^{-\eta_{n-1} d_{n-1}}}{e^{\eta_{n-1} d_{n-1}} - M_{n-1} e^{-\eta_{n-1} d_{n-1}}} = -\frac{\eta_{n-1}}{\eta_n}, \end{array} \right. \quad (23)$$

где $M_i = \frac{M_i^I(\lambda)}{M_i^{II}(\lambda)}$.

Система (23) (за исключением первого уравнения) может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} \text{cth}(\eta_i d_i - \frac{1}{2} \ln M_i) = \frac{\eta_i}{\eta_{i+1}} \text{cth}(\eta_{i+1} d_i - \frac{1}{2} \ln M_{i+1}), i = 1, 2, \dots, n-2; \\ \text{cth}(\eta_{n-1} d_{n-1} - \frac{1}{2} \ln M_{n-1}) = -\frac{\eta_{n-1}}{\eta_n}, \end{cases} \quad (24)$$

откуда можно выразить

$$\frac{1}{2} \ln M_{n-1} = \eta_{n-1} d_{n-1} + \text{arcth} \frac{\eta_{n-1}}{\eta_n} \quad (25)$$

и подставить полученное выражение в предыдущие уравнения. Прделав эти операции для всех M_i , получим окончательно из первого уравнения (24) соотношение

$$\frac{1}{2} \ln M_1 = \eta_I \Delta d_I + \text{arcth} \left\{ \frac{\eta_I}{\eta_{II}} \text{cth} \left\{ \eta_{II} \Delta d_{II} + \dots + \text{arcth} \frac{\eta_{n-1}}{\eta_n} \right\} \dots \right\} = \chi, \quad (26)$$

где $\Delta d_i = d_i - d_{i-1}$, что позволяет определить

$$M_1 = \frac{M_1'(\lambda)}{M_1''(\lambda)} = e^{2\chi}, \quad (27)$$

Используя теперь (27) в первом уравнении системы (23), получим

$$\text{cth} \chi = \frac{\frac{I}{2\pi} e^{-\lambda h} - \Phi(\lambda)}{\frac{I}{2\pi} e^{-\lambda h} + \Phi(\lambda)} \frac{\eta_I}{\lambda}, \quad (28)$$

откуда

$$\Phi(\lambda) = \frac{I}{2\pi} e^{-\lambda h} \frac{\eta_I - \lambda \text{cth} \chi}{\eta_I + \lambda \text{cth} \chi}. \quad (29)$$

Подставляя $\Phi(\lambda)$ в два первых уравнения (22), определим $M_1'(\lambda)$ и $M_1''(\lambda)$:

$$M_1'(\lambda) = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} e^{-\lambda h} \frac{\text{cth} \chi + 1}{\lambda \text{cth} \chi + \eta_I}, \quad M_1''(\lambda) = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} e^{-\lambda h} \frac{\text{cth} \chi + 1}{\lambda \text{cth} \chi + \eta_I}. \quad (30)$$

Теперь можно последовательно найти все остальные неизвестные в системе (22), записать выражения для E_x^I и $H_{yв}$ с помощью выражений, аналогичных (16-19), и определить $E_{xв}$ в виде

$$E_{xв} = -\frac{j\omega\mu_0}{\pi} I \int_0^\infty \frac{\text{cth} \chi}{\eta_I + \lambda \text{cth} \chi} e^{-\lambda(h+z)} \cos \lambda y d\lambda - \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} I \ln \frac{D}{d} - \frac{\delta}{\delta z} V. \quad (31)$$

Это позволяет записать выражение, учитывающее в матрице продольных сопротивлений влияние многослойной земли, вид которого совпадает с (21) при $A(\lambda) = \eta_I \text{th} \chi$, где χ определяется из (26):

$$f_{z_{км}} = \int_0^\infty \frac{2e^{-\lambda(h_k+h_m)} \cos \lambda a_{км}}{\lambda + \eta_I \text{th} \chi} d\lambda \quad (32)$$

В частности, для случая, когда земля может быть представлена двумя слоями и в диапазоне частот 10^5-10^7 Гц проникновением волны в глубокие слои можно пренебречь (первый слой с конечной толщиной, а второй – не ограничен) можно после преобразований записать для $A(\lambda)$ выражение:

$$A(\lambda) = \eta_I \text{cth}(\lambda_I \Delta d_I + \text{arcth} \frac{\eta_I}{\eta_{II}}) = \frac{\eta_I(\eta_{II} + \text{cth} \eta_I d_I)}{1 + \eta_{II} \text{cth} \eta_I d_I}. \quad (33)$$

Соотношение (33) тождественно тому, что получили для $A(\lambda)$ Ведепол и Весли [7], но более удобно для численных расчетов.

Р и с. 1. Зависимости:

$a - \operatorname{Re} f_{z_{кст}} = f(r)$; $б - I_m f_{z_{кст}} = f(r)$; 1 – с учетом токов смещения; 2 – без учета токов смещения;
 $\eta_I / \eta_{II} = 10$; $\theta = 0^\circ$; $d_I = 15 \text{ м}$

Р и с. 2. Зависимости:

$a - \operatorname{Re} f_{z_{кст}} = f(r)$; $б - I_m f_{z_{кст}} = f(r)$; 1 – при $\eta_I / \eta_{II} = 0,1$; 2 – при $\eta_I / \eta_{II} = 1$;
 3 – при $\eta_I / \eta_{II} = 10$; $\theta = 0^\circ$; $d_I = 15 \text{ м}$. Токи смещения в расчете не учитывались

Р и с. 3. Зависимости:

$a - \operatorname{Re} f_{z_{кст}} = f(r)$; $б - I_m f_{z_{кст}} = f(r)$; 1 – при $\rho_I / \rho_{II} = 0,1$; 2 – при $\rho_I / \rho_{II} = 1$;
 3 – при $\rho_I / \rho_{II} = 10$; $\theta = 60^\circ$; $d_I = 15 \text{ м}$. Токи смещения в расчете не учитывались

Р и с. 4. Зависимости:

$a - \operatorname{Re} f_{z_{кст}} = f(r)$; $б - I_m f_{z_{кст}} = f(r)$; 1 – с учетом токов смещения; 2 – без учета токов смещения;
 при $\rho_I / \rho_{II} = 0,1$; $\theta = 60^\circ$; $d_I = 15 \text{ м}$

Нетрудно установить его связь с выражениями, полученными Карсоном. В самом деле, для однородной земли $A(\lambda) = \eta_I = \sqrt{\lambda^2 + p\mu_I\gamma_I - p^2(\mu_0\varepsilon_0 - \mu_I\varepsilon_I)}$, что эквивалентно результатам Уайза [8], уточняющим интеграл Карсона при $\mu_I\varepsilon_I \neq \mu_0\varepsilon_0$ (учет продольных токов смещения), а при $\mu_I\varepsilon_I = \mu_0\varepsilon_0$ получаем совпадение с выражением (2).

На рис. 1-4 представлены результаты расчетов интегралов (33) с учётом (34) при некоторых конкретных соотношениях электрических и магнитных характеристик слоев двухслойной земли. Анализ численных результатов расчетов показывает, что влияние двухслойности земли в основном сказывается при малых частотах (им соответствуют малые значения параметра r). Отметим, что для двухслойной земли параметры r и θ вычисляются аналогично случаю однородной земли с характеристиками первого слоя. Это не имеет принципиального значения, однако удобно для сравнения результатов расчётов.

Влияние токов смещения проявляется на более высоких частотах, где вследствие их ёмкостного характера появляется пик в действительной части интеграла (4) и резкий спад в мнимой части. Это наиболее четко выражено для случая, когда $\rho_I = 1/\gamma_I > \rho_{II} = 1/\gamma_{II}$. В противоположных случаях ($\rho_I < \rho_{II}$) этот эффект проявляется незначительно при $\theta = 0$ и становится существенным с ростом θ .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Л.Р.Нейман, К.С.Демирчян. Теоретические основы электротехники. М.: Энергоатомиздат, 2001. 320 с.
2. В.И.Идельчик. Электрические системы и сети. М.: Энергоатомиздат, 1989. 458 с.
3. J.R.Carson. Wave propagation in overhead wires with ground return// BSTJ. V. 5. №4. 1926. P. 31-37.
4. М.В.Костенко, Л.С.Перельман. К расчёту волновых процессов в многопроводных линиях//Известия АН СССР. Сер. Энергетика и транспорт. 1963. №6. С. 71-80.
5. И.С. Градштейн, И.М Рыжик. Таблицы сумм, интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1962. 388 с.
6. В.Г.Гольдштейн, Н.В.Сайдова, А.К.Танаев. Уточнённая математическая модель поверхностного эффекта в многослойной земле // Вестник СамГТУ. Серия: Физико-математические науки Вып. 19. 2003. С. 129-134.
7. L.M.Wedepohl, R.G.Wasley. Wave propagation in multiconductor lines. Calculation of series impedance for multilayer earth. Proc. IEE. V. 113. №4. 1966. P. 36-42.
8. W.H.Wise. Propagation of high frequency currents// Proc. IRE. V.22. 1934. P. 29-37.

Поступила 4.04.2003 г.