Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Романова, О единственности решения начально-краевой задачи для уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом в производной, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 30, 184–186

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu321>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 09:49:35

Краткие сообщения

Дифференциальные уравнения

УДК 517.9

Е.В. Романова

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ В ПРОИЗВОДНОЙ

Доказана единственность решения начально – краевой задачи для уравнения смешанного типа с запаздыванием аргументов в производной.

Уравнение

$$L(u) = u_{xx}(x, y) + \operatorname{sgn} u_{yy}(x, y) - H(x - \tau)u_x(x - \tau, y) = 0 \quad (1)$$

рассматривается в области $D = D^+ \cup D^- \cup J$, где $D^+ = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$,

$D^- = \bigcup_{k=0}^{\infty} (D_{k,k} \cup D_{k,k+1})$ - соответственно эллиптическая и гиперболическая части области D ;

$J = \{(x, y) : 0 \leq x < +\infty, y = 0\}$, причем $D_{k,k} = \left\{ (x, y) : k\tau - x \leq y \leq x - (b + k\tau), 0 \leq -y \leq \frac{b}{2} \right\}$,

$D_{k,k+1} = \left\{ (x, y) : (b + k\tau) - x \leq y \leq x - (k + 1)\tau, 0 \leq -y \leq \frac{\tau - b}{2} \right\}$, $0 < b < \tau$.

Задача Т. Найти в области D решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

1) $u(x, y) \in C(\bar{D})$;

2) $u_x(x, y), u_y(x, y) \in C(D)$, кроме, быть может, точек $(k\tau, 0)$, $(b + k\tau, 0)$, в которых производные могут иметь особенности порядка меньше единицы;

3) $u(x, y)|_{x=0} = f_1(y), y \geq 0, f_1(y) \in C[0, +\infty), f_1(+\infty) = 0$; (2)

4) $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} u(x, y) = 0, x \geq 0, y \geq 0$; (3)

5) $u(x, y)|_{y=k\tau-x} = \psi_{1k}(x), k\tau \leq x \leq \frac{b}{2} + k\tau, \psi_{10}(0) = f_1(0)$, (4)

$u(x, y)|_{y=b+k\tau-x} = \psi_{2k}(x), b + k\tau \leq x \leq \frac{b + (2k + 1)\tau}{2}$, (5)

причем $\psi_{1k}(x) \in C^1 \left[k\tau, \frac{b}{2} + k\tau \right] \cap C^{(2,\lambda)} \left(k\tau, \frac{b}{2} + k\tau \right)$,

$\psi_{2k}(x) \in C^1 \left[b + k\tau, \frac{b + (2k + 1)\tau}{2} \right] \cap C^{(2,\lambda)} \left(b + k\tau, \frac{b + (2k + 1)\tau}{2} \right)$, $0 < \lambda \leq 1$,

$\lim_{k \rightarrow +\infty} \max_{x \in \left[k\tau, \frac{b}{2} + k\tau \right]} |\psi_{1k}(x)| = 0, \lim_{k \rightarrow +\infty} \max_{x \in \left[b + k\tau, \frac{b + (2k + 1)\tau}{2} \right]} |\psi_{2k}(x)| = 0, u(x, 0) = \omega(x), u_y(x, 0) = v(x)$.

Пусть $D^+ = \bigcup_{k=0}^{\infty} D_k^+$, где $D_k^+ = \{(x, y) : k\tau \leq x \leq (k + 1)\tau, y = 0\}$.

Теорема 1. Если существует решение задачи Т для уравнения (1) в области D , то при $\tau \leq 1$ оно единственно.

Доказательство теоремы основано на леммах 1, 2_κ, сформулированных ниже

Лемма 1. Пусть $u(x, y)$ – решение уравнения (1) в области D^+ из класса $C(\overline{D^+}) \cap C^2(D^+)$, удовлетворяющее однородным условиям (2)-(3) и $\tau \leq 1$. Тогда

$$\beta = \int_0^{+\infty} \omega(x) \nu(x) dx \leq 0, \quad (6)$$

$$\beta + \frac{1}{2} \iint_{D^+} \left\{ (1-\tau^2) u_x^2(x, y) + u_y^2(x, y) + H(x-\tau) [u(x, y) - u(x-\tau, y) + u_x(x-\tau, y)]^2 \right\} dx dy \leq 0. \quad (7)$$

Доказательство леммы проведем следуя [1, с.130] (см. также [2]).

В области D^+ справедливо тождество

$$uL(u) \equiv (u(x, y) u_x(x, y))_x + (u(x, y) u_y(x, y))_y - \\ - u_x^2(x, y) - u_y^2(x, y) - H(x-\tau) u(x, y) u_x(x-\tau, y) = 0,$$

интегрируя которое по области $D_\delta^+ = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \delta, x > 0, y > 0 \text{ } (0 < \delta \equiv const)\}$, применяя формулу Грина и условия леммы, в пределе при $\delta \rightarrow +\infty$ найдем

$$\oint_{\partial D^+} u(x, y) u_x(x, y) dy - u(x, y) u_y(x, y) dx - \\ - \iint_{D^+} (u_x^2(x, y) + u_y^2(x, y) + H(x-\tau) u(x, y) u_x(x-\tau, y)) dx dy = 0.$$

С учетом граничных условий имеем

$$\int_0^{+\infty} \omega(x) \nu(x) dx + \iint_{D^+} (u_x^2(x, y) + u_y^2(x, y) + H(x-\tau) u(x, y) u_x(x-\tau, y)) dx dy = 0.$$

Используя равенство

$$\iint_{D^+} H(x-\tau) u(x-\tau, y) u_x(x-\tau, y) dx dy = \\ = \iint_{D^+} u(x, y) u_x(x, y) dx dy = \frac{1}{2} \iint_{D^+} (u^2(x, y))_x dx dy = \frac{1}{2} \oint_{\partial D^+} u^2(x, y) dy = 0,$$

будем иметь

$$\int_0^{+\infty} \omega(x) \nu(x) dx + \iint_{D^+} (u_x^2(x, y) + u_y^2(x, y) + H(x-\tau) (u(x, y) - u(x-\tau, y)) u_x(x-\tau, y)) dx dy = 0$$

или

$$\int_0^{+\infty} \omega(x) \nu(x) dx + \iint_{D^+} (u_x^2(x, y) + u_y^2(x, y) + \frac{1}{2} H(x-\tau) [(u(x, y) - u(x-\tau, y)) + u_x(x-\tau, y)]^2 - \\ - \frac{1}{2} H(x-\tau) [u(x, y) - u(x-\tau, y)]^2 - \frac{1}{2} H(x-\tau) u_x^2(x-\tau, y)) dx dy = 0,$$

откуда

$$\int_0^{+\infty} \omega(x) \nu(x) dx + \iint_{D^+} (u_x^2(x, y) + u_y^2(x, y) + \frac{1}{2} H(x-\tau) [(u(x, y) - u(x-\tau, y)) + u_x(x-\tau, y)]^2 - \\ - \frac{1}{2} H(x-\tau) u_x^2(x-\tau, y)) dx dy = \frac{1}{2} \iint_{D^+} H(x-\tau) [u(x, y) - u(x-\tau, y)]^2 dx dy.$$

С помощью неравенства Коши – Буняковского [3, с.352] и однородности условий для интеграла в правой части равенства (9) найдем оценку

$$\iint_{D^+} H(x-\tau) [u(x, y) - u(x-\tau, y)]^2 dx dy \leq \tau^2 \iint_{D^+} u_x^2(x, y) dx dy.$$

Таким образом, получим

$$\int_0^{+\infty} \omega(x) \nu(x) dx + \iint_{D^+} \left\{ \frac{1}{2} (1-\tau^2) u_x^2(x, y) + u_y^2(x, y) + \frac{1}{2} H(x-\tau) [u(x, y) - u(x-\tau, y) + u_x(x-\tau, y)]^2 \right\} dx dy \leq 0.$$

Если $\tau \leq 1$, то $\beta = \int_0^{+\infty} \omega(x)v(x)dx \leq 0$. Лемма доказана.

Лемма 2_к. Если $u(x, y) \in C(\bar{D}^-) \cap C(D^-)$ - решение уравнения (1) в области D^- , обращающееся в нуль на характеристиках $y = k\tau - x$ и $y = b + k\tau - x$, то

$$\beta_{k,k} = \int_{k\tau}^{b+k\tau} \omega(x)v(x)dx \geq 0, \quad \beta_{k,k+1} = \int_{b+k\tau}^{(k+1)\tau} \omega(x)v(x)dx \geq 0.$$

Доказательство леммы проводится аналогично [2, с. 14-15].

Придем к доказательству теоремы единственности. Предположим противное: задача Т имеет в области D два решения $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$. Тогда $u = u_1 - u_2$ также будет решением задачи для уравнения (1) с однородными условиями (2)-(5).

На основании лемм 1-2_к приходим к тому, что $\beta = 0$. В силу (7) $u(x, y) \equiv 0$ для $\forall (x, y) \in \bar{D}^+$, т.е. $u(x, 0) \equiv 0$, $\forall x \in [0, +\infty)$. С помощью решения задачи Коши в области D^- установим, что $u(x, y) \equiv 0$, $\forall (x, y) \in \bar{D}^-$. Значит $u(x, y) \equiv 0$, $\forall (x, y) \in \bar{D}$. Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зарубин А.Н. Решение задачи Трикоми для дифференциально-разностного уравнения Лаврентьева-Бицадзе в неограниченной области. // Дифференциальные уравнения и их приложения. Междунар. научн. конф. Сб. тр. Самара. 2002. С. 129-135.
2. Зарубин А.Н. Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом. Орел: Изд-во ОГУ, 1999, 225 с.
3. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч.1. М.: Наука, 1982. 616 с.
4. Зарубин А.Н. Интегральное представление решения задачи Коши для гиперболического уравнения с запаздывающим аргументом в производной // Матем. моделирование и краевые задачи. Труды двенадцатой межвуз. конф. Часть 3. Самара: СамГТУ, 2002. С. 44-47.

Поступила 19.03.2004 г.

УДК 517.95

С.А. Бейлин

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ КОРНЕЙ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ $J_\nu(x)$

При изучении одной нелокальной задачи для гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом возникла необходимость исследовать ряды, содержащие функции Бесселя и их корни. В настоящей заметке приведен один из полученных результатов.

Покажем, что если $\nu = \frac{p-1}{2}$, где $p > 0$, то справедливо равенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_k^2} = \frac{1}{p+1}, \quad (1)$$

где μ_k - положительные корни уравнения $J_{\frac{p-1}{2}}(x) = 0$.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим задачу об отыскании ограниченного решения уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{p}{x} u_x, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0, \quad (2)$$

удовлетворяющего условиям

$$u(x, 0) = u_0 \equiv \text{const}, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (3)$$

$$u(1, t) = 0. \quad (4)$$

Применяя метод разделения переменных и учитывая при этом, что решение уравнения

$$X'' + \frac{p}{x} X' + \lambda^2 X = 0$$