Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Бейлин, Об одном свойстве корней функции Бесселя $J_\nu(x)$, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 30, 186–187

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu322>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 05:15:07

Если $\tau \leq 1$, то $\beta = \int_0^{+\infty} \omega(x)v(x)dx \leq 0$. Лемма доказана.

Лемма 2_к. Если $u(x, y) \in C(\overline{D}^-) \cap C(D^-)$ - решение уравнения (1) в области D^- , обращающееся в нуль на характеристиках $y = k\tau - x$ и $y = b + k\tau - x$, то

$$\beta_{k,k} = \int_{k\tau}^{b+k\tau} \omega(x)v(x)dx \geq 0, \quad \beta_{k,k+1} = \int_{b+k\tau}^{(k+1)\tau} \omega(x)v(x)dx \geq 0.$$

Доказательство леммы проводится аналогично [2, с. 14-15].

Придем к доказательству теоремы единственности. Предположим противное: задача Т имеет в области D два решения $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$. Тогда $u = u_1 - u_2$ также будет решением задачи для уравнения (1) с однородными условиями (2)-(5).

На основании лемм 1-2_к приходим к тому, что $\beta = 0$. В силу (7) $u(x, y) \equiv 0$ для $\forall (x, y) \in \overline{D}^+$, т.е. $u(x, 0) \equiv 0$, $\forall x \in [0, +\infty)$. С помощью решения задачи Коши в области D^- установим, что $u(x, y) \equiv 0$, $\forall (x, y) \in \overline{D}^-$. Значит $u(x, y) \equiv 0$, $\forall (x, y) \in \overline{D}$. Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зарубин А.Н. Решение задачи Трикоми для дифференциально-разностного уравнения Лаврентьева-Бицадзе в неограниченной области. // Дифференциальные уравнения и их приложения. Междунар. научн. конф. Сб. тр. Самара. 2002. С. 129-135.
2. Зарубин А.Н. Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом. Орел: Изд-во ОГУ, 1999, 225 с.
3. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч.1. М.: Наука, 1982. 616 с.
4. Зарубин А.Н. Интегральное представление решения задачи Коши для гиперболического уравнения с запаздывающим аргументом в производной // Матем. моделирование и краевые задачи. Труды двенадцатой межвуз. конф. Часть 3. Самара: СамГТУ, 2002. С. 44-47.

Поступила 19.03.2004 г.

УДК 517.95

С.А. Бейлин

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ КОРНЕЙ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ $J_\nu(x)$

При изучении одной нелокальной задачи для гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом возникла необходимость исследовать ряды, содержащие функции Бесселя и их корни. В настоящей заметке приведен один из полученных результатов.

Покажем, что если $\nu = \frac{p-1}{2}$, где $p > 0$, то справедливо равенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_k^2} = \frac{1}{p+1}, \quad (1)$$

где μ_k - положительные корни уравнения $J_{\frac{p-1}{2}}(x) = 0$.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим задачу об отыскании ограниченного решения уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{p}{x} u_x, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0, \quad (2)$$

удовлетворяющего условиям

$$u(x, 0) = u_0 \equiv \text{const}, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (3)$$

$$u(1, t) = 0. \quad (4)$$

Применяя метод разделения переменных и учитывая при этом, что решение уравнения

$$X'' + \frac{p}{x} X' + \lambda^2 X = 0$$

имеет вид [1]

$$X(x) = x^{\frac{1-p}{2}} \left(C_1 J_{\frac{p-1}{2}}(\lambda x) + C_2 J_{\frac{1-p}{2}}(\lambda x) \right),$$

нетрудно найти решение задачи (2)–(4). Оно имеет вид:

$$u(x, t) = u_0 x^{\frac{1-p}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cos \mu_k t}{\mu_k J_{\frac{p+1}{2}}(\mu_k)} J_{\frac{p-1}{2}}(\mu_k x). \quad (5)$$

Проинтегрируем (5) по x от 0 до 1. В силу формулы 6.561.5 [2], получим:

$$\int_0^1 u(x, t) dx = u_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cos \mu_k t}{\mu_k^2}.$$

Положив в последнем равенстве $t = 0$, приходим к (1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ватсон Н. Теория Бесселевых функций. М., ИЛ, 1949.
2. Градштейн С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука. 1963.

Поступила 14.05.2004 г.

УДК 517.926.4:517.983

О.А. Мудракова

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ С ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

Установлен квазиканонический вид экспоненциальной характеристики интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода с ядром типа функции Коши в банаховом пространстве.

Как известно одна из основных задач теории устойчивости по Ляпунову состоит в выяснении условий, при которых системы дифференциальных уравнений (линейных или "близких" к линейным) с аргументом, изменяющимся на полуоси, имеют ограниченные решения при ограниченных правых частях.

Во многих задачах механики, теории автоматического регулирования, теории связи, изучаемые процессы, вообще говоря, не остаются ограниченными во времени. Отклонения от предвычисленных значений могут возрастать с течением времени, но скорость этого возрастания должна не превышать скорости самого процесса. Эти практические задачи приводят к исследованию экспоненциального роста решений эволюционных уравнений, моделирующих законы развития во времени изучаемых процессов.

М.А. Рутман [1] в 1956 году впервые ввел понятие, которое, следуя [2], позднее получило название экспоненциальной характеристики. В настоящей работе строится экспоненциальная характеристика интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода с ядром экспоненциального типа.

Пусть на линейное устройство подается входной сигнал $p(t)$, который разветвляется в точке входа:

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t),$$

при этом $p_1(t)$, поступая на линейный элемент (ЛЭ) с импульсной функцией $K(t, s)$, преобразуется в сигнал

$$(Kp_1)(t) = \int_0^t K(t, s) p_1(s) ds,$$

а $p_2(t)$ идет в обход ЛЭ и в точке выхода соединяется с сигналом $(Kp_1)(t)$, формируя сигнал $\Phi(t)$.