Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Мудракова, Устойчивость некоторых интегральных моделей с весовой функцией экспоненциального типа, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 30, 187–189

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu323>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 15:57:44

имеет вид [1]

$$X(x) = x^{\frac{1-p}{2}} \left(C_1 J_{\frac{p-1}{2}}(\lambda x) + C_2 J_{\frac{1-p}{2}}(\lambda x) \right),$$

нетрудно найти решение задачи (2)–(4). Оно имеет вид:

$$u(x, t) = u_0 x^{\frac{1-p}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cos \mu_k t}{\mu_k J_{\frac{p+1}{2}}(\mu_k)} J_{\frac{p-1}{2}}(\mu_k x). \quad (5)$$

Проинтегрируем (5) по x от 0 до 1. В силу формулы 6.561.5 [2], получим:

$$\int_0^1 u(x, t) dx = u_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cos \mu_k t}{\mu_k^2}.$$

Положив в последнем равенстве $t = 0$, приходим к (1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ватсон Н. Теория Бесселевых функций. М., ИЛ, 1949.
2. Градштейн С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука. 1963.

Поступила 14.05.2004 г.

УДК 517.926.4:517.983

О.А. Мудракова

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ С ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

Установлен квазиканонический вид экспоненциальной характеристики интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода с ядром типа функции Коши в банаховом пространстве.

Как известно одна из основных задач теории устойчивости по Ляпунову состоит в выяснении условий, при которых системы дифференциальных уравнений (линейных или "близких" к линейным) с аргументом, изменяющимся на полуоси, имеют ограниченные решения при ограниченных правых частях.

Во многих задачах механики, теории автоматического регулирования, теории связи, изучаемые процессы, вообще говоря, не остаются ограниченными во времени. Отклонения от предвычисленных значений могут возрастать с течением времени, но скорость этого возрастания должна не превышать скорости самого процесса. Эти практические задачи приводят к исследованию экспоненциального роста решений эволюционных уравнений, моделирующих законы развития во времени изучаемых процессов.

М.А. Рутман [1] в 1956 году впервые ввел понятие, которое, следуя [2], позднее получило название экспоненциальной характеристики. В настоящей работе строится экспоненциальная характеристика интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода с ядром экспоненциального типа.

Пусть на линейное устройство подается входной сигнал $p(t)$, который разветвляется в точке входа:

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t),$$

при этом $p_1(t)$, поступая на линейный элемент (ЛЭ) с импульсной функцией $K(t, s)$, преобразуется в сигнал

$$(Kp_1)(t) = \int_0^t K(t, s) p_1(s) ds,$$

а $p_2(t)$ идет в обход ЛЭ и в точке выхода соединяется с сигналом $(Kp_1)(t)$, формируя сигнал $\Phi(t)$.

Полагая, например, $p_1(t) = p_2(t) = \frac{1}{2}p(t)$, получим

$$p(t) + \int_0^t K(t,s)p(s)ds = 2\Phi(t) \equiv f(t). \quad (1)$$

Пусть требуется сформировать заранее заданный выходной сигнал $f(t)$. Искомый входной сигнал $p(t)$ является, таким образом, решением интегрального уравнения Вольтерра II рода.

Если $f(t)$ в (1) пробегает E_α , то соответствующая совокупность решений $p(t)$ покрывается пространством E_β при достаточно больших β . Нижнюю грань таких β обозначим через $\mathcal{J}(\alpha)$ и назовем экспоненциальной характеристикой уравнения (1).

Решение уравнения (1) представляется через резольвенту $\Gamma(t,s,1) = \Gamma(t,s)$ весовой функции $K(t,s)$ по формуле

$$p(t) = f(t) - \int_0^t \Gamma(t,s)f(s)ds. \quad (2)$$

Аналогично вводится понятие экспоненциальной характеристики интегрального оператора

$$(\Gamma f)(t) = \int_0^t \Gamma(t,s)f(s)ds, \quad (3)$$

а именно,

$$\Gamma : E_\alpha \rightarrow E_\beta, \quad \inf \beta = \mathcal{J}(\alpha).$$

Имеют место следующие две леммы:

Лемма 1. Экспоненциальные характеристики $\mathcal{J}(\alpha)$ и $\mathcal{J}^*(\alpha)$ соответственно операторов

$$(\Gamma f)(t) = \int_0^t \Gamma(t,s)f(s)ds \text{ и } (\Gamma|f)(t) = \int_0^t |\Gamma(t,s)|f(s)ds \text{ совпадают.}$$

Лемма 2. Линейный оператор

$$L = I + \Gamma; \quad (Lf)(t) = (If + \Gamma f)(t) = \varphi(t)$$

имеет такую же экспоненциальную характеристику $\mathcal{J}(\alpha)$, что и оператор Γ [3].

Теорема. Если ядро оператора (3) удовлетворяет условиям:

а) $0 < M_1 \leq \|\Gamma(t,t)\| \leq M_2$; б) $\left\| \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right\| \leq M\|\Gamma\|$; в) $\left\| \frac{\partial \Gamma}{\partial s} \right\| \leq M\|\Gamma\|$; г) существует s_0 такое, что $\Gamma(t, s_0)$ не является финитной функцией, то существуют $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 : (-\infty < \alpha_0 \leq \beta_0 \leq \gamma_0 < +\infty)$ такие, что $\mathcal{J}(\alpha) = \beta_0$ при $\alpha \leq \alpha_0$; $\mathcal{J}(\alpha) = \alpha$ при $\alpha \geq \gamma_0$. (В промежутке (α_0, γ_0) $\mathcal{J}(\alpha)$ – неубывающая функция). Здесь β_0 – показатель экспоненциального роста (ПЭР) по t весовой функции $\Gamma(t,s)$, γ_0 – ПЭР весовой функции по обоим переменным: t и s .

Доказательство теоремы опирается на исследование интегрального оператора (3). Рассматривается поведение этого оператора в линейном пространстве E_α и банаховом пространстве

$$B_\alpha = \left\{ f(t) : \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|f(t)\|_X \exp(-\alpha t) < \infty \right\} \text{ с нормой } \|f\|_{B_\alpha} = \sup_{0 \leq t < \infty} \|f(t)\|_X e^{-\alpha t}.$$

Используется классическая теорема Банаха о замкнутом операторе [4].

Периодичность весовой функции $K(t,s)$ интегрального уравнения (1) влечет периодичность резольвенты $\Gamma(t,s)$. В этом случае $\beta_0 = \gamma_0 = \alpha_0$ и экспоненциальная характеристика интегрального оператора Вольтерра и соответствующего интегрального уравнения принимает канонический вид: $\mathcal{J}(\alpha) = \max(\alpha, \alpha_0)$. Здесь характеристическая точка излома α_0 определяется предельным поведением весовой функции интегрального оператора, а для интегрального уравнения – поведением резольвенты, точнее предельными свойствами последовательности $\{a_n(\theta)\}$, где

$$a_n(\theta) = \int_0^1 \Gamma(n+\theta, s) ds \quad (0 \leq \theta < 1, n \in N), \quad \Gamma(t, s) = \Gamma(t, s, 1).$$

Р и с . 1 Квазиканонический вид экспоненциальной характеристики

Р и с . 2 Канонический вид экспоненциальной характеристики

Из этого следует, что при $\alpha > \alpha_0$ показатель экспоненциального роста $ж(\alpha)$ решений $p(t)$ зависит от показателя роста правых частей $f(t)$, а при $\alpha \leq \alpha_0$ показатель роста $ж(\alpha)$ решений $p(t)$ не зависит от показателя роста правых частей, т.е. в случае $\alpha_0 > \alpha$ при очень "быстро убывающих" правых частях $f(t)$, стремящихся к нулю, решения $p(t)$ растут "очень быстро". Этот случай можно назвать "сильной неустойчивостью". Изложенное выше проиллюстрировано на рис. 1 и 2.

Замечание. К интегральному уравнению (1) приводит, в частности, краевая задача

$$\begin{cases} y^{(n)} + P_1(t)y^{(n-1)} + P_2(t)y^{(n-2)} + \dots + P_n(t)y = f(t), \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0. \end{cases}$$

В нашем случае через $p(t)$ обозначена $y^{(n)}(t)$,

$$K(t, s) = P_1(t) + \frac{P_2(t)}{1!}(t-s) + \dots + \frac{P_n(t)}{(n-1)!}(t-s)^{n-1}.$$

Ядро $K(t, s)$ растет как многочлен по t при каждом фиксированном s . Значит имеет нулевой порядок экспоненциального роста.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Рутман М.А. Об устойчивости решений некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами // ДАН СССР, 1956. Т. 108. №5. С. 770.
2. Орлик Л.К. Об экспоненциальной характеристике линейного дифференциального уравнения 1-го порядка в банаховом пространстве // Украинский математический журнал, 1989. Т. 41. №9. С. 1288–1289.
3. Орлик Л.К. Об экспоненциальном росте решений линейного интегрального уравнения Вольтерра II рода с периодическим ядром. Одесса, 1985. Деп. в УкрНИИТИ. № 2767–Ук.85.
4. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М: Наука, 1970. 534 с.

Поступила 5.07.2004 г.