Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Зотеев, Повышение точности среднеквадратичных оценок коэффициентов линейно-параметрических дискретных моделей колебаний систем с турбулентным трением, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 30, 194–197

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu325>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 18:36:32

$$A_1 = \frac{U_3 - U_2 \left(1 + e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \right) + U_1 e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}}{\Delta t \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \right)}. \quad (17)$$

Подставляя (14) в выражение (17), после преобразований получим

$$A_1 = \frac{U_2 U_3 - U_3^2 - U_2^2 + U_2 U_4 + U_1 U_3 - U_1 U_4}{\Delta t (3U_2 - 3U_3 - U_1 + U_4)}. \quad (18)$$

Используя (14) и (18), из второго выражения (16) определим A_2 :

$$A_2 = \frac{(U_1 + U_3 - 2U_2)^3}{e^{-\frac{t_1}{\tau}} (3U_2 - 3U_3 + U_4 - U_1)^2}. \quad (19)$$

При этом $e^{-\frac{t_1}{\tau}}$ вычисляется по полученному из (15) значению τ и известному значению t_1 , что приводит к дополнительным вычислительным операциям.

Подставив (18) и (19) в первое соотношение (12), используя значения $e^{-\frac{t_1}{\tau}}$ и t_1 , определим постоянную составляющую A_0 .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. А.С. №1797079 СССР, (МКИ) G01R 27/26. Способ измерения электрических величин активного сопротивления, индуктивности и емкости / В.С. Мелентьев, В.С. Баскаков и др., опубл. в Б.И. 1993, №7.
2. Мелентьев В.С. Определение параметров электрических цепей по переходным характеристикам в измерительной цепи // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. Всерос. науч. конф. Ч.2. Самара: СамГТУ, 2004. С. 158-160.
3. Пат. №2187822 РФ, (МКИ) G01R 23/16. Способ определения параметров переходного процесса / М.Р. Сафаров, Л.В. Сарваров, опубл. в БИПМ. 2002, №23.

Поступила 8.09.2004 г.

УДК 519.246

В.Е. Зотеев

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫХ ОЦЕНОК КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ С ТУРБУЛЕНТНЫМ ТРЕНИЕМ

Рассматривается численный метод определения динамических характеристик систем с турбулентным трением, позволяющий существенно, в несколько десятков раз, уменьшить погрешность вычисления среднеквадратичных оценок коэффициентов линейно-параметрических дискретных моделей.

Свободные колебания систем с турбулентным трением описываются функцией вида $y(t) = \frac{a_0}{1 + \frac{\delta_0}{T} t} \cos(\omega t + \psi_0)$, где δ_0 и ω – декремент и частота колебаний ($T = \frac{2\pi}{\omega}$ – период колебаний), a_0 и ψ_0 – начальные амплитуда и фаза колебаний. Динамические характеристики (ДХ) δ_0 и ω являются информативными признаками технического состояния системы и определяются по результатам наблюдений y_k , $k = \overline{1, N}$, полученными в ходе научно-технического или промышленного эксперимента. Обычно при этом предполагается, что в результатах эксперимента содержится случайная аддитивная помеха ε_k , имеющая нормальное распределение, нулевое математическое ожидание $M[\varepsilon_k] = 0$, значения которой не коррелированы и имеют

одинаковые дисперсии σ_ε^2 , т.е. $\text{cov}[\varepsilon_k, \varepsilon_l] = 0$ при $k \neq l$; $k, l = \overline{1, N}$, $\text{cov}[\varepsilon_k, \varepsilon_k] = D[\varepsilon_k] = \sigma_\varepsilon^2$ при $k = \overline{1, N}$.

Известен метод определения динамических характеристик систем с турбулентным трением, в основе которого лежат линейно параметрические дискретные модели (ЛПДМ) [1]. Центральное место в алгоритме этого метода занимает процедура вычисления коэффициентов ЛПДМ. В первом приближении эта задача может быть решена методом наименьших квадратов, хотя доказано, что МНК - оценки в этом случае будут асимптотически смещенными [2]. Поэтому актуальны разработка и исследование численных методов вычисления коэффициентов ЛПДМ, позволяющих повысить точность среднеквадратичного оценивания за счет устранения корреляции между результатами наблюдений и случайной помехи.

В [1] рассматривается линейно параметрическая дискретная модель, описывающая временную последовательность отсчетов ординат свободных колебаний систем с турбулентным трением

$$\lambda_0 y_{k-1} - \lambda_1 [k y_k + (k-2) y_{k-2}] + \lambda_2 (k-1) y_{k-1} = y_k + y_{k-2}, \quad (1)$$

в которой $y_k = y(\tau k)$, где τ – период дискретизации, а коэффициенты λ_j связаны с ДХ системы соотношениями:

$$\lambda_0 = 2 \cos \omega \tau, \quad \lambda_1 = \frac{\delta_0 \tau}{T}, \quad \lambda_2 = \lambda_0 \lambda_1. \quad (2)$$

В практике эксперимента результаты наблюдений $\tilde{y}_k = y_k + \varepsilon_k$, $k = \overline{1, N}$, содержат аддитивную случайную помеху ε_k . Будем считать, что она имеет нормальное распределение, нулевое математическое ожидание $M[\varepsilon] = 0$ и ковариационную матрицу вида $V[\varepsilon] = M[\varepsilon \varepsilon^T] = \sigma_\varepsilon^2 E$, где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)^T$ – вектор случайной помехи, E – единичная матрица, т.е. значения ε_k не коррелированы и имеют одинаковые дисперсии σ_ε^2 . При использовании в детерминированной дискретной модели (1) вместо y_k случайных величин $\tilde{y}_k$ получаем обобщенную регрессионную модель, которую можно представить в виде

$$f_{0k} = \lambda_0 f_{1k} + \lambda_1 f_{2k} + \lambda_2 f_{3k} + \eta_k, \quad (3)$$

где $f_{0k} = \tilde{y}_k + \tilde{y}_{k-2}$, $f_{1k} = \tilde{y}_{k-1}$, $f_{2k} = -[k \tilde{y}_k + (k-2) \tilde{y}_{k-2}]$, $f_{3k} = (k-1) \tilde{y}_{k-1}$, $\eta_k = \varepsilon_k + \varepsilon_{k-2} - \lambda_0 \varepsilon_{k-1} + \lambda_1 [k \varepsilon_k + (k-2) \varepsilon_{k-2}] - \lambda_2 (k-1) \varepsilon_{k-1}$.

Очевидно, что для случайной помехи η_k математическое ожидание $M[\eta] = 0$, однако требование некоррелированности уже не выполняется и соответствующая матрица ковариаций может быть представлена в виде $V[\eta] = M[\eta \eta^T] = \sigma_\eta^2 \Omega$, где Ω – некоторая, отличная от диагональной, матрица.

Вычисление ДХ на основе модели (1) состоит из двух этапов. На первом этапе находятся среднеквадратичные оценки коэффициентов λ_j . При использовании классической процедуры метода наименьших квадратов минимизируется функционал

$$\sum_{k=1}^N \{ \lambda_0 \tilde{y}_{k-1} - \lambda_1 [k \tilde{y}_k + (k-2) \tilde{y}_{k-2}] + \lambda_2 (k-1) \tilde{y}_{k-1} - \tilde{y}_k - \tilde{y}_{k-2} \}^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^N (f_{0k} - \lambda_0 f_{1k} + \lambda_1 f_{2k} + \lambda_2 f_{3k})^2 = \sum_{k=1}^N \eta_k^2 \Rightarrow \min.$$

На втором этапе по найденным оценкам коэффициентов $\hat{\lambda}_j$ и формулам

$$\omega = \frac{1}{\tau} \arccos \frac{\hat{\lambda}_0}{2}, \quad \delta_0 = \frac{2\pi \hat{\lambda}_1}{\omega \tau} \quad (4)$$

вычисляются динамические характеристики системы.

Так как случайная помеха η_k не удовлетворяет основным предпосылкам классического регрессионного анализа, то оценки коэффициентов $\hat{\lambda}_j$ будут асимптотически смещенными из-

за корреляции между элементами f_{ik} и η_k [2,3]. Это может существенно увеличить погрешность вычисления коэффициентов модели, а, следовательно, и ДХ системы.

Для повышения точности оценивания коэффициентов линейно параметрической дискретной модели предлагается следующий метод. Возмущение η_k можно представить в виде

$$\eta_k = (1 - \lambda_0 z^{-1} + z^{-2}) \{ (1 + k\lambda_1) \varepsilon_k \}, \quad (5)$$

где z^{-i} – оператор сдвига на i шагов назад: $z^{-i} \{y_k\} = y_{k-i}$. Пусть существует обратный оператор $(1 - \lambda_0 z^{-1} + z^{-2})^{-1}$. Тогда его можно представить в виде бесконечного ряда:

$$(1 - \lambda_0 z^{-1} + z^{-2})^{-1} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j z^{-j}.$$

Ограничиваясь в этом разложении семью первыми членами, получаем $(1 - \lambda_0 z^{-1} + z^{-2})^{-1} \approx 1 + \sum_{j=1}^6 \alpha_j z^{-j}$, где коэффициенты разложения α_i , $i = \overline{1, 6}$, определяются формулами:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \lambda_0, & \alpha_2 &= \lambda_0^2 - 1, & \alpha_3 &= \lambda_0^3 - 2\lambda_0, \\ \alpha_4 &= \lambda_0^4 - 3\lambda_0^2 + 1, & \alpha_5 &= \lambda_0^5 - 4\lambda_0^3 + 3\lambda_0, & \alpha_6 &= \lambda_0^6 - 5\lambda_0^4 + 6\lambda_0^2 - 1. \end{aligned} \quad (6)$$

С учетом этого из (5) можно получить

$$\varepsilon_k = \frac{1}{1 + k\lambda_1} (1 - \lambda_0 z^{-1} + z^{-2})^{-1} \{ \eta_k \} \approx \frac{1}{1 + k\lambda_1} \left(\eta_k + \sum_{j=1}^6 \alpha_j \eta_{k-j} \right). \quad (7)$$

Тогда, применяя к обобщенной регрессионной модели (3) оператор $\frac{1}{1 + k\lambda_1} (1 - \lambda_0 z^{-1} + z^{-2})^{-1}$, с учетом (7) получаем трансформированную линейно параметрическую дискретную модель

$$f_{4k}^* = \lambda_0 f_{1k}^* + \lambda_1 f_{2k}^* + \lambda_2 f_{3k}^* + \varepsilon_k, \quad (8)$$

$$\text{где } f_{ik}^* = \frac{1}{1 + k\lambda_1} (1 - \lambda_0 z^{-1} + z^{-2})^{-1} f_{ik} \approx \frac{1}{1 + k\lambda_1} \left(f_{ik} + \sum_{j=1}^6 \alpha_j z^{-j} \{ f_{ik} \} \right), \quad i = \overline{0, 3}.$$

Очевидно, что применение классического метода наименьших квадратов к модели (8):

$$\sum_{k=1}^N (f_{0k}^* - \lambda_0 f_{1k}^* + \lambda_1 f_{2k}^* + \lambda_2 f_{3k}^*)^2 = \sum_{k=1}^N \varepsilon_k^2 \Rightarrow \min,$$

позволяет получить наилучшие линейные оценки для коэффициентов λ_j и тем самым повысить точность вычисления ДХ.

Отметим, что для трансформации линейно параметрической дискретной модели (1) необходимо иметь предварительные оценки коэффициентов λ_0 и λ_1 . Они могут быть получены за счет применения классического МНК к модели (1). Уточненные по модели (8) оценки λ_j вновь можно использовать при трансформации исходной модели (1) и т.д. Таким образом, предлагаемый метод является итерационным.

Проведенные численно-аналитические исследования подтвердили эффективность предлагаемого метода повышения точности оценивания ДХ системы с турбулентным трением. На рис. 1 представлены кривые зависимости погрешности вычисления декремента колебаний от периода дискретизации (в относительных к периоду колебаний единицах), а на рис. 2 – кривые зависимости погрешности вычисления декремента колебаний от объема выборки. Кривые 1 соответствуют результатам применения классического МНК при вычислении коэффициентов ЛПДМ, а кривые 2 – результатам вычислений на основе разработанного алгоритма.

Р и с. 1. Зависимости погрешности вычисления декремента колебаний от периода дискретизации

Р и с. 2. Зависимости погрешности вычисления декремента колебаний от объема выборки

Очевидно, что применение предлагаемого метода позволяет существенно, в несколько десятков раз уменьшить погрешность вычисления динамических характеристик диссипативных систем с турбулентным трением.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зотеев В.Е. Разработка и исследование линейных дискретных моделей колебаний диссипативных систем // Вестник СамГТУ. Серия: Физ.-мат. науки. Вып. 7. 1999. № 7. С. 170-177.
2. Вучков И., Бояджиева Л., Солаков Е. Прикладной линейный регрессионный анализ. М.: Финансы и статистика, 1987. 362 с.
3. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980. 320 с.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Ученого совета СамГТУ

Поступила 5.09.2004 г.

УДК 621.313

П.Ю. Грачев

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ДИСКРЕТНОГО АРГУМЕНТА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ ВЕНТИЛЬНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯМИ

Рассмотрены особенности математического моделирования асинхронных машин с вентильным возбуждением и выпрямителем в цепи ротора, а также многообмоточных электрических машин и трансформаторов при питании первичных обмоток от нескольких вентильных преобразователей.

В малой энергетике и на транспорте используются электромеханические преобразователи – электродвигатели и генераторы, обмотки которых подключены, с целью управления или преобразования электроэнергии, к вентильным преобразователям – выпрямителям и инверторам, включающим диоды, тиристорные или транзисторные ключи [1,2,3]. Кроме того, в таких электротехнических автономных системах применяют электромагнитные преобразователи – трансформаторы с пульсирующим или вращающимся магнитным полем [4,5], первичные обмотки которых подключены к нескольким вентильным преобразователям с несинусоидальной, в большинстве случаев ступенчатой, формой выходного напряжения.