Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Бородин, Движение диска в режиме обкатывания подвижного цилиндра,
Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2004, выпуск 30, 206–208

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu328>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 16:48:45

УДК 531

В.С. Бородин

ДВИЖЕНИЕ ДИСКА В РЕЖИМЕ ОБКАТЫВАНИЯ ПОДВИЖНОГО ЦИЛИНДРА

Исследована задача о качении статически несбалансированного двухопорного вертикального ротора в режиме обкатывания внутренней поверхности подвижного статора. Получены уравнения движения ротора и проведен их численный анализ.

Важной проблемой расчета и конструирования вибрационных приборов для уплотнения бетонных смесей является повышение их производительности, надежности и снижение удельного веса. Решающую роль в реализации этих целей играет создание математической модели центробежных вибровозбудителей, наиболее полно учитывающей все многообразие пространственных движений, а также специфику связей, накладывающих ограничения на координаты и скорости точек системы.

Проведен анализ системы, состоящей из подвижного вертикального цилиндра радиусом R и массой M и круглого однородного диска радиусом r и массой m , обкатывающего внутреннюю поверхность подвижного цилиндра.

Введем в рассмотрение неоднородную систему координат $\xi\eta\zeta$, ось ζ которой параллельна образующей цилиндра, и поступательно перемещающуюся систему $\xi'\eta'\zeta'$ с началом в точке касания диска с цилиндром (рис.1.). С цилиндром свяжем в точке O^* систему $\xi^*\eta^*\zeta^*$, движущуюся поступательно. Соответствующие оси этих трех систем параллельны. Положение точки касания диска с цилиндром в системе $\xi^*\eta^*\zeta^*$ определим координатами γ и ζ^* . Здесь γ - угол, образованный осью вращающейся системы координат $e_1e_2e_3$ с η^* . Поступательное движение цилиндра в плоскости $\xi\eta$ зададим координатами ξ, η . В точке D расположим также начало полуподвижной системы координат xzy . Ось y лежит в плоскости диска, ось x направлена по касательной к траектории точки D в сторону ее движения. Положение диска относительно системы координат $\xi'\eta'\zeta'$ определим тремя углами Эйлера – Крылова α, β и φ [1] (рис. 2).

Р и с. 1. Схема качения ротора

Р и с. 2. Схема ориентации диска

Значения косинусов углов между осями $\xi'\eta'\zeta'$ и xzy приведены в таблице.

$Xyz \xi'\eta'\zeta'$	ξ'	η'	ζ'
x	$\cos\beta\cos\varphi$	$\cos\alpha\sin\varphi + \sin\alpha\sin\beta\cos\varphi$	$\sin\alpha\sin\varphi - \cos\alpha\sin\beta\cos\varphi$
y	$-\cos\beta\sin\varphi$	$\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\beta\sin\varphi$	$\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\beta\sin\varphi$
z	$\sin\beta$	$-\sin\alpha\cos\beta$	$\cos\alpha\cos\beta$

Таким образом, положение системы цилиндр-диск определится семью обобщенными координатами $\xi, \eta, \gamma, \zeta, \alpha, \beta$ и φ . Для построения уравнений связей, обусловленных отсутствием проскальзывания диска в точке D , спроектируем на оси x, y, z векторное равенство, определяющее абсолютную скорость диска в точке D :

$$\bar{V}_D = -r\dot{\varphi}\bar{x}_C + R\dot{\gamma}\bar{e}_1 + \dot{\xi}\bar{\xi}_0 + \dot{\eta}\bar{\eta}_0 + \dot{\zeta}^*\bar{\zeta}_0^* = 0. \quad (1)$$

Здесь $\bar{x}_0, \bar{e}_1, \bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{\zeta}_0^*$ - единичные вектора соответствующих осей. С точностью до величин второго порядка малости запишем уравнения связей:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -R\dot{\gamma}\cos\gamma + r\dot{\varphi}\cos\beta\cos\varphi, \quad \dot{\eta} = R\dot{\gamma}\sin\gamma + r\dot{\varphi}\sin\alpha\sin\beta\cos\varphi; \\ \dot{\zeta} &= -r\dot{\varphi}\cos\alpha\sin\beta\cos\varphi. \end{aligned} \quad (2)$$

Кинетическую энергию определим по формуле

$$\begin{aligned} T &= \frac{mv_D^2}{2} + m \left| \begin{matrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_C & y_C & z_C \\ v_{Dx} & v_{Dy} & v_{Dz} \end{matrix} \right| + \frac{1}{2}[(J_x + mr^2)\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + (J_z + mr^2)\omega_z^2] + \\ &+ \frac{1}{2}M(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\alpha}\cos\beta\cos\varphi + \dot{\beta}\sin\varphi, \quad \omega_y = -\dot{\alpha}\cos\beta\sin\varphi + \dot{\beta}\cos\varphi, \quad \omega_z = \dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\varphi}; \\ x_C &= 0, y_C = -r, z_C = 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$v_{Dx} = (v_\xi + \dot{x})\cos(x, \xi) + (v_\eta + \dot{x})\cos(x, \eta) + v_\zeta\cos(x, \zeta);$$

$$v_{Dy} = (v_\xi + \dot{x})\cos(y, \xi) + (v_\eta + \dot{x})\cos(y, \eta) + v_\zeta\cos(y, \zeta);$$

$$v_{Dz} = (v_\xi + \dot{x})\cos(z, \xi) + (v_\eta + \dot{x})\cos(z, \eta) + v_\zeta\cos(z, \zeta);$$

$$\xi_D = R\sin\gamma + \xi, \eta_D = R\cos\gamma + \eta, \zeta_D = \zeta^*;$$

$$v_\xi = R\dot{\gamma}\cos\gamma + \dot{\xi}, v_\eta = -R\dot{\gamma}\sin\gamma + \dot{\eta}, v_\zeta = \dot{\zeta}^* = \dot{\zeta}, J_x = J_y = \frac{mr^2}{4}, J_z = \frac{mr^2}{2}. \quad (5)$$

Структура обобщенных сил определяется выражением возможной работы

$$\delta A = P_\xi\delta\xi + P_\eta\delta\eta + P_\zeta\delta\zeta + M_x\delta\varphi_x + M_y\delta\varphi_y + M_z\delta\varphi_z, \quad (6)$$

где $\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta$ - проекция на оси ξ, η, ζ возможного перемещения точки касания D ; $\delta\varphi_x, \delta\varphi_y, \delta\varphi_z$ - возможные углы поворота, получаемые из кинематических уравнений (5).

Активным силовым фактором, учтенным в работе, является сила тяжести диска и вращающий момент двигателя $M = M_0 - k_1\dot{\varphi}$. Записанные в явной форме, обобщенные силы принимают вид:

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= mgr[\cos\alpha\cos^2\beta\cos\varphi - (\sin\alpha\sin\varphi - \cos\alpha\sin\beta\cos\varphi)\sin\beta], \\ Q_\beta &= mgr\cos\alpha\cos\beta\sin\varphi, Q_\varphi = M_0 - k_1\dot{\varphi}, Q_\gamma = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая стационарность связей и то, что число обобщенных координат в выражениях кинетической энергии, обобщенных сил и связей не превышает числа степеней свободы, целесообразно записать уравнения движения диска в форме уравнений Чаплыгина. Ограничиваясь малыми первого порядка относительно координат α, β и их производных, приходим к системе динамических уравнений движения:

$$\begin{aligned}
& (J_y + mr^2 \cos^2 \varphi) \ddot{\alpha} + 0.5mr^2 \sin 2\varphi \ddot{\beta} + (J_z + 2mr^2) \ddot{\beta} \dot{\varphi} + \\
& + r^2 [\sin^2 \varphi \cdot \ddot{\alpha} - 0.5 \sin 2\varphi \cdot \ddot{\beta}] (M + 2m) \dot{\varphi}^2 + [k_1 + J_z \dot{\beta} + \\
& + 1.5mr^2 ((1 + \cos 2\varphi) \dot{\beta} - \sin 2\varphi \cdot \dot{\alpha})] \dot{\varphi} = mgr \cos \varphi, \\
& 0.5mr^2 \sin 2\varphi \ddot{\alpha} + (J_y + mr^2 \sin^2 \varphi) \ddot{\beta} - (J_z + 1.5mr^2 (1 - \cos 2\varphi)) \ddot{\alpha} \dot{\varphi} + \\
& + MrR \cos \varphi \sin \gamma \cdot \ddot{\alpha} \dot{\varphi} + 1.5mr^2 \sin 2\varphi \cdot \ddot{\beta} \dot{\varphi} = mgr \sin \varphi, \\
& (J_z + Mr^2 + 4mr^2) \ddot{\varphi} + [k_1 + 0.5r^2 ((M + m) \dot{\beta} \dot{\alpha} + (M + 2m) \dot{\varphi}) \sin 2\varphi] \dot{\varphi} - \\
& - MrR \cos \gamma \sin \varphi \dot{\varphi} = M_0, \\
& R \ddot{\gamma} - r(\cos(\varphi + \gamma) \ddot{\varphi} + r \sin(\varphi + \gamma) \dot{\varphi}^2) = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Эта система уравнений была проинтегрирована с использованием компьютерной системы Mathematica 5. Результаты анализа представлены на рис. 3. Как следует из графических зависимостей, диск совершает пространственные колебания. При этом интенсивность колебаний из плоскости диска (относительно оси x) сравнима с колебаниями, обусловленными малым верчением диска. Очевидно, вышеперечисленные периодические движения диска могут явиться источником нежелательных произвольных колебаний вала, а следовательно, и подшипников, если включить эти элементы в конструкцию фрикционно-планетарного вибровозбудителя [2]. Поэтому основная задача инженеров – конструкторов состоит в гашении прецессионно-нутационных колебаний вибровозбудителя.

Р и с. 3. Зависимости обобщенных координат от времени
 a – зависимость α от времени; $б$ – зависимость β от времени; $в$ – зависимость собственного вращения от времени; $г$ – зависимость точки касания от времени

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ишлинский А.Ю. Классическая механика и силы инерции. М.: Наука, 1987. 319 с.
2. Павлов Г.В., Бородин В.С. Движение диска по внутренней поверхности неподвижного вертикального цилиндра // Известия РАЕН, серия МММИУ. Т. 4. 2000. №4. С. 82-92.

Поступила 26.04.2004 г.