Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Репин, Нелокальная задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005, выпуск 34, 5–9

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu331>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 06:14:44

Дифференциальные уравнения

УДК 517.956

О.А. Репин

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом при младшей производной в области, эллиптическая часть которой есть бесконечная вертикальная полуполоса, а гиперболическая – характеристический треугольник, изучена краевая задача, в которой с помощью обобщенных операторов дробного интегро-дифференцирования задается линейная комбинация, связывающая след нормальной производной на линии перехода и ее же след на характеристике уравнения.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$L(U) = U_{xx} + \operatorname{sgn} y U_{yy} + \frac{2p}{|y|} U_y = 0, \quad 0 < 2p < 1, \quad (1)$$

в области D , ограниченной полупрямыми $x=0$, $x=1$ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$, расположенными в полуплоскости $y>0$, и характеристиками $AC: x+y=0$; $BC: x-y=1$ уравнения (1),

выходящими из точек A и B и пересекающимися в точке $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Примем следующие обозначения: $D_1 = D \cap \{y > 0\}$; $D_2 = D \cap \{y < 0\}$; J – единичный интервал $0 < x < 1$ прямой $y=0$; $\theta_0(x)$ – абсцисса точки пересечения характеристики уравнения (1), выходящей из точки $(x,0) \in J$ с характеристикой AC ; $(I_{0+}^\alpha \varphi)(x)$ и $(D_{0+}^\alpha \varphi)(x)$ – операторы дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля [1]; $(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} \varphi)(x)$ – обобщенный оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле М. Сайго [2].

Для уравнения (1) изучим нелокальную краевую задачу.

Задача 1. Найти функцию $U(x, y)$ со следующими свойствами:

- 1) $L(U) \equiv 0$ в области $D = D_1 \cup D_2$;
- 2) $U(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(\bar{D} \setminus J) \cap C^2(D \setminus J)$;
- 3) $\lim_{y \rightarrow +\infty} U(x, y) = 0$ равномерно по $x \in \bar{J}$;
- 4) $U(x, +0) = U(x, -0)$ ($x \in \bar{J}$),
 $\lim_{y \rightarrow 0+0} y^{2p} U_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0-0} (-y)^{2p} U_y(x, y)$ ($x \in J$);
- 5) $U(0, y) = q_1(y)$, $U(1, y) = q_2(y)$ ($y \geq 0$);
- 6) $A_1(I_{0+}^{a, b, 2p+b-1} U[\Theta_0(t)])(x) = A_2(I_{0+}^{a+1-p, b+2p-1, p+b-1} \alpha v_-)(x) + \psi_0(x)$, ($x \in J$),

где

$$v_-(x) = \lim_{y \rightarrow 0-0} (-y)^{2p} U_y(x, y), \quad (2)$$

$q_1(y)$, $q_2(y)$, $\alpha(x)$, и $\psi_0(x)$ – такие заданные функции, что $q_1(y)$ и $q_2(y)$ – непрерывные функции в $[0, \infty)$;

$$y^p q_1(y), y^p q_2(y) \in L(0, \infty); \quad (3)$$

$$\alpha(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J),$$

$\alpha(x) > 0$ для всех $x \in \bar{J}$.

$$\psi_0(x) \in H^\lambda(\bar{J}), 0 < a + p < \lambda \leq 1; \quad (4)$$

$$\max(-p, p-1) < a < 1-p, 1-2p < b \leq 2-2p; \quad (5)$$

A_1 и A_2 - действительные положительные константы.

Отметим, что рассматриваемая задача является продолжением наших исследований, опубликованных в [3]. Существенной ее особенностью по сравнению с задачей, представленной в работе [3], является другой спектр изменения параметров операторов обобщенного дробного интегро-дифференцирования и более слабое условие на свободный член $\psi_0(x)$ в краевом условии 6).

Функциональное соотношение между $\tau(x) = U(x, 0)$ и $\nu_-(x) = \lim_{y \rightarrow 0-0} (-y)^{2p} U_y(x, y)$ из области гиперболичности. Уравнение (1) в гиперболической области D_2 имеет вид

$$U_{xx} - U_{yy} - \frac{2p}{y} U_y = 0. \quad (6)$$

Справедливо следующее утверждение [1, с. 590], [4, с. 223].

Теорема 1. Задача Коши

$$\begin{aligned} U(x, 0) &= \tau(x) \quad (x \in \bar{J}), \\ \lim_{y \rightarrow 0-0} (-y)^{2p} U_y(x, y) &= \nu_-(x) \quad (x \in J) \end{aligned} \quad (7)$$

для уравнения (6) в области D_2 при условиях $\tau \in C^2(\bar{J})$, $\nu \in C^2(J)$, $0 < 2p < 1$ корректна, а ее решение $U \in C^2(D_2)$ и выражается формулой

$$U(x, y) = -C_1 (-y)^{1-2p} \int_0^1 \nu_-(x + y(1-2t))(1-t)^{-p} t^{-p} dt + \frac{1}{B(p, p)} \int_0^1 \tau(x + y(1-2t))(1-t)^{p-1} t^{p-1} dt, \quad (8)$$

где $C_1 = [(1-2p)B(1-p, 1-p)]^{-1}$.

Однако, как отмечено в монографии [1, с. 591], при решении краевых задач для уравнений смешанного типа условия $\tau, \nu \in C^2$ приводят к трудно-проверяемым ограничениям на заданные функции. Эта проблема решается путем рассмотрения специальных классов решений. Рассмотрим класс R_1 таких обобщенных решений задачи Коши, введенный К.И. Бабенко [5, 6].

Определение 1. Функцию (8) будем называть обобщенным решением уравнения (6) из класса R_1 в области D_2 , если $0 < p < 1$ и $\tau \in H^{\alpha_1}([0, 1])$, $\alpha_1 > 1-p$; $\nu \in H^{\alpha_2}([0, 1])$, $\alpha_2 > p$, (9) где $H^\lambda([0, 1])$ - класс гильбертовских функций.

Будем искать решение задачи 1 для уравнения (1) в классе R_1 . Используя (7) и (8), выпишем $U[\Theta_0(x)]$:

$$U[\Theta_0(x)] = \gamma_1 \Gamma(p) (I_{0+}^{p, 0, p-1} \tau)(x) - \gamma_2 \Gamma(1-p) (I_{0+}^{1-p, 2p-1, p-1} \nu_-)(x), \quad (10)$$

где $\gamma_1 = \frac{\Gamma(2p)}{\Gamma^2(p)}$, $\gamma_2 = 2^{2p-1} \frac{\Gamma(1-2p)}{\Gamma^2(1-p)}$.

Подставив (10) в краевое условие 6), на основании формулы [2]

$$I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} I_{0+}^{\gamma, \delta, \eta-\beta-\gamma-\delta} \varphi = I_{0+}^{\alpha+\gamma, \beta+\delta, \eta-\gamma-\delta} \varphi \quad (\gamma > 0) \quad (11)$$

получим

$$\begin{aligned} A_1 \gamma_1 \Gamma(p) (I_{0+}^{a+p, b, p+b-1} \tau)(x) - A_1 \gamma_2 \Gamma(1-p) (I_{0+}^{a+1-p, b+2p-1, p+b-1} \nu_-)(x) = \\ = A_2 (I_{0+}^{a+1-p, b+2p-1, p+b-1} \alpha \nu_-)(x) + \psi_0(x). \end{aligned} \quad (12)$$

Применив к обеим частям (12) оператор $I_{0+}^{-(a+1-p), -(b+2p-1), a+b}$ и учитывая, что $(I_{0+}^{-\alpha, \alpha, \eta} f)(x) = (D_{0+}^\alpha f)(x)$ $\alpha > 0$, будем иметь

$$\nu_-(x) = \frac{1}{A_1 \gamma_2 \Gamma(1-p) + A_2 \alpha(x)} \left[A_1 \gamma_1 \Gamma(p) (D_{0+}^{1-2p} \tau)(x) - (I_{0+}^{-(a+1-p), -(b+2p-1), a+b} \psi_0)(x) \right]. \quad (13)$$

Имеет место утверждение.

Лемма 1. Если функция $\tau(x)$ достигает положительного максимума (отрицательного минимума) на отрезке $[0,1]$ в точке $x = \xi$, $0 < \xi < 1$, $\psi_0(x) \equiv 0$, $A_1, A_2, \alpha(x) > 0 \forall x \in \bar{J}$, то $v_-(\xi) > 0$ ($v_-(\xi) < 0$).

Доказательство леммы 1 следует из (13) и свойства строгой положительности (строгой отрицательности) производной дробного порядка $(D_{0+}^{1-2p}\tau)(x)$ в точке положительного максимума (отрицательного минимума) [4].

Для дальнейшего выразим $\tau(x)$ через $v_-(x)$.

Применив к обеим частям (12) оператор $I_{0+}^{-(a+p), -b, a+2p+b+1}$, используя формулу (11), а также равенство $(I_{0+}^{\alpha, -\alpha, \eta} f)(x) = (I_{0+}^{\alpha} f)(x)$ $\alpha > 0$ получим

$$\tau(x) = \frac{\gamma_2 \Gamma(1-p)}{\gamma_1 \Gamma(p)} (I_{0+}^{1-2p} v_-)(x) + \frac{A_2}{A_1 \gamma_1 \Gamma(p)} (I_{0+}^{1-2p} \alpha v_-)(x) + \frac{1}{A_1 \gamma_1 \Gamma(p)} (I_{0+}^{-(a+p), -b, a+b+2p-1} \psi_0)(x). \quad (14)$$

Функциональное соотношение между $\tau(x) = U(x, 0)$ и $v_+(x) = \lim_{y \rightarrow 0+0} y^{2p} U_y(x, y)$ из области эллиптичности. Решение уравнения (1) в полуполосе $0 \leq x \leq 1$, $y > 0$, удовлетворяющее условиям 3), 5) получено нами в [3] и оно имеет вид

$$U(x, y) = V_1(x, y) + V_2(x, y), \quad (15)$$

где

$$V_1(x, y) = y^{\frac{1-2p}{2}} \int_0^{\infty} [b_1(\lambda) \exp(\lambda x) + b_2(\lambda) \exp(-\lambda x)] \cdot J_{\frac{2p-1}{2}}(\lambda y) d\lambda; \quad (16)$$

$$b_1(\lambda) \exp(\lambda x) + b_2(\lambda) \exp(-\lambda x) = \frac{\lambda sh \lambda (1-x)}{sh \lambda} \int_0^{\infty} q_1(y) y^{\frac{1+2p}{2}} J_{\frac{2p-1}{2}}(\lambda y) dy + \\ + \frac{\lambda sh \lambda x}{sh \lambda} \int_0^{\infty} q_2(y) y^{\frac{1+2p}{2}} J_{\frac{2p-1}{2}}(\lambda y) dy; \quad (17)$$

$$V_2(x, y) = \frac{\Gamma(p)}{2\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2} + p\right)} \int_0^1 v_+(t) G(x, y; t) dt; \quad (18)$$

$$G(x, y; t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(y^2 + (x+t-2n)^2)^{-p} - (y^2 + (x-t-2n)^2)^{-p}].$$

Переходя к пределу при $y \rightarrow 0+0$ в (16) и (18), получим функциональное соотношение между $\tau(x) = \tau_1(x) + \tau_2(x) = U(x, 0)$ и $v_+(x)$, принесенное на линию вырождения уравнения (1) из области D_1 :

$$\tau_1(x) = V_1(x, 0) = \gamma_3 \int_0^{\infty} t^{\frac{1+p}{2}} q_1(t) dt \int_0^{\infty} \frac{sh \lambda (1-x)}{sh \lambda} \lambda^{\frac{1+p}{2}} J_{\frac{p-1}{2}}(t\lambda) d\lambda + \\ + \gamma_3 \int_0^{\infty} t^{\frac{1+p}{2}} q_2(t) dt \int_0^{\infty} \frac{sh \lambda x}{sh \lambda} \lambda^{\frac{1+p}{2}} J_{\frac{p-1}{2}}(t\lambda) d\lambda, \quad 0 < x < 1. \quad (19)$$

$$\tau_2(x) = V_2(x, 0) = -\gamma_4 \int_0^1 v_+(t) G_1(x, t) dt, \quad (20)$$

$$\text{где } \gamma_3 = 2^{\frac{1}{2}-p} \left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + p\right) \right)^{-1}, \quad \gamma_4 = \cos \pi p \Gamma(p) \Gamma\left(\frac{1}{2} - p\right) (2\sqrt{\pi})^{-1},$$

$$G_1(x, t) = |x-t|^{-2p} - (x+t)^{2p} + \sum_{n=1}^{\infty} [(2n-x+t)^{-2p} + (2n+x+t)^{-2p} - (2n-x-t)^{-2p} - (2n+x-t)^{-2p}]$$

Из соотношения (19) нетрудно усмотреть, что функция $\tau_1(x)$ имеет производные любого порядка в интервале $(0,1)$.

Производная $\tau_1^1(x)$ при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 1$ остается ограниченной, что следует из формулы [7, формула 2.12.13 (1), с. 191]:

$$\int_0^\infty x^{v+1} \frac{shax}{shbx} J_\nu(cx) dx = \frac{2}{b} \left(\frac{\pi}{b} \right)^{v+1} \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1} k^{v+1} \sin \frac{ak\pi}{b} K_\nu \left(\frac{ck\pi}{b} \right),$$

$$(\operatorname{Re} v > -1; \operatorname{Re} b > |\operatorname{Re} a| + |\operatorname{Im} c|).$$

Единственность решения задачи 1. Пусть D_h и D_{1h} - конечные области, отсекаемые прямой $y = h > 0$ соответственно от D и D_1 . $A_h(0, h)$, $B_h(1, h)$ - концы отрезка прямой $y = h$, который является границей областей D_h и D_{1h} .

Лемма 2. Пусть $U(x, y)$ - решение задачи 1 такое, что

$$\max_{D_{1h}} U(x, y) = U(x_0, 0), \quad x_0 \in J.$$

Тогда $\lim_{y \rightarrow 0+0} y^{2p} U_y(x_0, 0) < 0$.

Доказательство леммы 2 проводится по известной методике [3], [8].

Теорема 2. Обобщенное решение $U(x, y) \in R_1$ задачи 1 единственно в классе функций, представимых в области D_2 формулой (8) решения задачи Коши, если A_1 , A_2 , $\alpha(x) > 0$ на $\bar{J}$.

Доказательство. Пусть $U(x, y)$ - решение однородной задачи 1 и $\psi_0(x) \equiv 0$ на $\bar{J}$. Покажем, что $U(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}_1$. Допустим, что это не так.

Тогда существует точка $(x_1, x_2) \in D_1$ в которой $U(x_1, x_2) \neq 0$. Для определенности положим, что $U(x_1, x_2) > 0$. Тогда $\max_{D_1} U(x, y) = U(Q) > 0$, $Q \in \bar{D}_1$.

В силу внутреннего принципа экстремума для эллиптических уравнений точка Q лежит на границе области D_1 . Выберем число $h > 0$ так, чтобы на отрезке $A_h B_h$ было верным неравенство $U(x, y) < U(Q)$. Такое h существует в силу условия $\lim_{y \rightarrow +\infty} U(x, y) = 0$ равномерно по $x \in [0, 1]$.

Точка $Q \notin \overline{AA_h} \cup \overline{BB_h}$ поскольку $U(0, y) = U(1, y) = 0$, $y \geq 0$ на основании однородных граничных условий. Поэтому точка $Q \in AB$, то есть $Q \in (x_0, 0)$, $0 < x_0 < 1$. В этой точке по лемме 2

$$v_+(x) = \lim_{y \rightarrow 0+0} y^{2p} U_y(x_0, 0) < 0. \quad (21)$$

Так как $U(x, +0) = U(x, -0) = \tau(x_0)$, то $\max_J \tau(x) = \tau(x_0)$. Тогда ввиду того, что $\psi_0(x_0) \equiv 0$ по лемме 1 имеем неравенство $v_-(x_0) > 0$, что противоречит (21) в силу $v_+(x) = v_-(x)$ по свойству 4) решения задачи 1.

Следовательно, $U(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}_1$ и, в частности, $U(x, +0) = \tau_+(x) \equiv 0$ на J . Но тогда ввиду $\tau_+(x) = \tau_-(x)$ из (13) следует, что $v_-(x) \equiv 0$. Отсюда по формуле (8) получаем, что $U(x, y) \equiv 0$ и в области $\bar{D}_2$. Тем самым теорема 2 доказана.

Сведение задачи 1 к сингулярному интегральному уравнению и его решение. Учитывая условия сопряжения 4) и обозначение $v_+(x) = v_-(x) = v(x)$, получаем интегральное уравнение для $v(x)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma_2 \Gamma(1-p)}{\gamma_1 \Gamma(p)} (I_{0+}^{1-2p} v)(x) + \frac{A_2}{A_1 \gamma_1 \Gamma(p)} (I_{0+}^{1-2p} \alpha v)(x) + \gamma_4 \int_0^1 v(t) G_1(x, t) dt = \\ & = \tau_1(x) - \frac{1}{A_1 \gamma_1 \Gamma(p)} (I_{0+}^{-(a+p), -b, a+b+2p-1} \psi_0)(x). \end{aligned} \quad (22)$$

Применив к обеим частям (22) оператор D_{0+}^{1-2p} и учитывая, что [1. с. 50]

$$(D_{0+}^{1-2p} I_{0+}^{1-2p} \varphi)(x) = \varphi(x),$$

после некоторых вычислений (см. например, 9. с. 1260-1272; 10. с. 82-84) будем иметь

$$a(x)v(x) + \gamma_4 \int_0^1 v(t) K(x, t) dt = f(x), \quad (23)$$

где

$$a(x) = \Gamma(2p) \left[\frac{\gamma_2 \Gamma(1-p)}{\gamma_1 \Gamma(p)} + \frac{A_2 \alpha(x)}{\gamma_1 A_1 \Gamma(p)} \right] + \gamma_4 \pi g \pi p,$$

$$K(x, t) = \left(\frac{t}{x} \right)^{1-2p} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-t}{x} \right)^{1-2p} \left(\frac{1}{2n-t+x} - \frac{1}{2n-t-x} \right) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+t}{x} \right)^{1-2p} \left(\frac{1}{2n+t+x} - \frac{1}{2n+t-x} \right),$$

$$f(x) = \Gamma(2p) \left[\left(D_{0+}^{1-2p} \tau_1 \right)(x) - \frac{1}{\gamma_1 A_1 \Gamma(p)} \left(D_{0+}^{1-2p} \left(I_{0+}^{-(a+p), -b, a+b+2p-1} \psi_0(t) \right) \right)(x) \right].$$

Перейдем к исследованию правой части $f(x)$ уравнения (23).

Нам потребуются две леммы из работы [11].

Лемма 3. Пусть $0 < -\alpha < \lambda \leq 1$ и $\beta < \min[0, \eta + 1]$. Если $\varphi(x) \in H^{\lambda}[0, 1]$, то $(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} \varphi)(x) \in H^{\min[\lambda + \alpha, -\beta]}[0, 1]$.

Лемма 4. Пусть $0 < \alpha < \lambda \leq 1$, $\lambda - \alpha < 1$ и $\rho(x) = x^{\mu}$, где $0 \leq \mu < \lambda - \alpha + 1$. Если $\varphi(x) \in H_0^{\lambda}(\rho; [0, 1])$, то $(D_{0+}^{\alpha} \varphi)(x) \in H_0^{\lambda - \alpha}(\rho; [0, 1])$.

Введем обозначение $\psi_1(x) = \left(I_{0+}^{-(a+p), -b, a+b+2p-1} \psi_0 \right)(x)$.

Учитывая условия (4) и лемму 3, имеем

$$\psi_1(x) \in H^{\lambda_0}[0, 1], \quad \lambda_0 = \min(\lambda - a - p, b). \quad (24)$$

Принимая во внимание (24) и лемму 4, получим

$$(D_{0+}^{1-2p} \psi_1)(x) \in H_0^{\lambda_0 - 1 + 2p}(\rho; [0, 1]), \quad (25)$$

где $\rho(x) = x^{\mu}$, $0 \leq \mu < \lambda_0 + 2p$.

На основании свойств функции $\tau_1(x)$ и (25) окончательно получаем

$$f(x) \in H_0^{\lambda_0 - 1 + 2p}(\rho; [0, 1]).$$

Решение интегрального уравнения (23) проводится по методике, предложенной в [12].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть выполняются условия (3)-(5). Тогда решение задачи 1 существует и оно единственно.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 742 с.
2. Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions // Math. Rep. Kyushu. Univ. 1978. Vol. 11. № 2. P. 135-143.
3. Лернер М.Е., Ретин О.А. Краевая задача с оператором М. Сайго для уравнения смешанного типа, эллиптического в вертикальной полуполосе // Неклассические уравнения матем. физики. Новосибирск: Из-во Ин-та мат-ки СО РАН, 1998. С. 63-78.
4. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 302 с.
5. Бабенко К.И. К теории уравнений смешанного типа: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М. 1951. 196 с.
6. Бабенко К.И. О принципе максимума для уравнения Эйлера-Трикоми // Докл. АН. СССР. 1985. Т. 285. № 4. С. 777-782.
7. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 520 с.
8. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука, 1966. 321 с.
9. Лернер М.Е., Ретин О.А. Об одной задаче с двумя нелокальными краевыми условиями для уравнения смешанного типа // Сибирский матем. журнал. 1999. Т. 40. № 6. С. 1260-1276.
10. Хачев М.М. Первая краевая задача для линейных уравнений смешанного типа. Нальчик: Эльбрус, 1998. 280 с.
11. Saigo M., Kilbas A. Generalized fractional integrals and derivatives in Holder spaces // Transform Methods. Special Functions, Sofia94. P. 282-292.
12. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. Уч. пос. М.: Высш. шк., 1985. 421 с.

Поступила 26.11.2004 г.