Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Ерёмин, Композиция смешанного дробного интеграла и смешанной дробной производной Римана–Лиувилля одного порядка, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005, выпуск 34, 16–24

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu333>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 17:41:57

дробной производной по времени // Мат. моделирование и краевые задачи. Тр. тринадцатой межвуз. конференции. Часть 3. Самара: СамГТУ, 2003. С. 185–186

17. Азовский В.В., Носов В.А. Решение обобщенной задачи Трикоми для одного уравнения смешанного типа в бесконечной области // Волжский математический сборник. Куйбышев: Куйб. пед. ин-т. Вып. 15, 1973. С. 3–9.
18. Свейников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1979. 320 с.
19. Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа // Тр. мат. ин-та им. Стеклова. М.: Наука, 41. 1953. 62 с.

Поступила 24.01.2005 г.

УДК 517.95

А.С. Еремин

КОМПОЗИЦИЯ СМЕШАННОГО ДРОБНОГО ИНТЕГРАЛА И СМЕШАННОЙ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ ОДНОГО ПОРЯДКА

Исследуется вопрос композиции смешанного дробного интеграла и смешанной дробной производной в достаточно широком классе функций. Получена формула обращения смешанной дробной производной.

Введение Теория дробного исчисления посвящена исследованию и применению интегралов и производных произвольного порядка. Историю дробного исчисления следует вести еще с работ Н. Абеля и Ж. Лиувилля [1]. В последнее время интерес к дробному исчислению значительно усилился, что вызвано многочисленными приложениями в различных областях науки. В этой связи можно упомянуть монографии [2-6], работы [7-9].

Известны различные формы дробных интегралов и производных. Наиболее часто в научной литературе встречаются дробные интегралы и производные Римана-Лиувилля [1]. Операторы обобщенного дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a;b;c;z)$ рассматриваются, например, в работах [10-13]. В работах [14-16] операторы дробного интегро-дифференцирования обобщаются на случай матричного интегро-дифференцирования.

Непосредственное распространение операций дробного интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля на случай многих переменных, когда эти операторы применяются по каждой переменной или по некоторым из них, дает так называемые частные и смешанные дробные интегралы и производные. Они известны достаточно давно [1]. Так, в работе [17] при помощи двумерного преобразования Лапласа получено решение двумерного интегрального уравнения Абеля.

В настоящей работе исследуется вопрос композиции смешанного дробного интеграла и смешанной дробной производной в достаточно широком классе функций. Получена формула обращения смешанной дробной производной. Полученные результаты могут применяться в теории дифференциальных уравнений, содержащих смешанные дробные производные.

Абсолютно непрерывные функции. Важную роль в теории дробного интегро-дифференцирования играют абсолютно непрерывные функции.

Пусть $\Omega = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $-\infty \leq c < d \leq \infty$.

Определение 1 [1, с. 21]. Функция $f(x)$ называется абсолютно непрерывной на отрезке $[a, b]$, если по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для любой конечной системы попарно непересекающихся отрезков $[a_k, b_k] \in [a, b]$, $k = \overline{1, m}$, такой, что $\sum_{k=1}^m (b_k - a_k) < \delta$, справедливо неравенство $\sum_{k=1}^m |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$. Класс всех таких функций обозначается $AC([a, b])$.

Определение 2 [1, с. 21]. Через $AC^n([a, b])$, где $n = 1, 2, \dots$ обозначим класс функций $f(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ до порядка $n - 1$, причем $f^{(n-1)}(x) \in AC([a, b])$.

Определение 3 [18, с. 237]. Функция $f(x, y)$ называется абсолютно непрерывной в Ω , если по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для любой конечной системы попарно непересекающихся промежутков $\Delta_k = \{(x, y) : x_{1k} \leq x \leq x_{2k}, y_{1k} \leq y \leq y_{2k}\}$, сумма площадей которых

меньше δ , справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^n |f(x_{2k}, y_{2k}) - f(x_{1k}, y_{2k}) - f(x_{2k}, y_{1k}) + f(x_{1k}, y_{1k})| < \varepsilon, \quad (1)$$

и если, кроме того, $f(a, y) \in AC([c, d])$ и $f(x, c) \in AC([a, b])$. Класс всех таких функций обозначается $AC(\overline{\Omega})$.

Определение 4. Через $AC^{n,m}(\overline{\Omega})$, где $n=1, 2, \dots$, обозначим класс функций, непрерывно дифференцируемых на $\overline{\Omega}$ до порядка $(n-1, m-1)$, причем ее смешанная частная производная $\partial^{n+m-2} f / \partial x^{n-1} \partial y^{m-1}$ абсолютно непрерывна в $\overline{\Omega}$.

Известно [19, с. 338], что классу $AC([a, b])$ принадлежат те и только те функции $f(x)$, которые представимы в виде первообразных от суммируемых по Лебегу функций:

$$f(x) = \int_a^x \psi(x) dx + c, \quad \psi(x) \in L_1(a, b). \quad (2)$$

Лемма 1 [1, с. 46]. Классу $AC^n([a, b])$ принадлежат те и только те функции $f(x)$, которые представимы в виде

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k, \quad (3)$$

где $\varphi(x) \in L_1([a, b])$, а c_k — произвольные постоянные.

В формуле (3)

$$\varphi(t) = f^{(n)}(t), \quad c_k = f^{(k)}(a)/k!. \quad (4)$$

В последнем равенстве используется обозначение $f^{(n)}(x) = d^n f(x)/dx^n$.

Аналогичное свойство функций $f(x, y) \in AC(\overline{\Omega})$ выглядит следующим образом.

Лемма 2 [18, с. 238]. Классу $AC(\overline{\Omega})$ принадлежат те и только те функции $f(x, y)$, которые представимы в виде

$$f(x, y) = \int_a^x \int_c^y \varphi(x) dx dy + \int_a^x \psi(x) dx + \int_c^y \xi(y) dy + d, \quad (5)$$

где $\varphi(x, y) \in L_1(\Omega)$, $\psi(x) \in L_1(a, b)$, $\xi(y) \in L_1(c, d)$, а d — произвольная постоянная.

Для того чтобы обобщить последнюю лемму на случай класса $AC^{n,m}(\overline{\Omega})$, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. Пусть $f(x, y) \in AC^{n,m}(\overline{\Omega})$, тогда справедлива формула

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \frac{1}{(n-1)!(m-1)!} \int_a^x \int_c^y (x-t)^{n-1} (y-s)^{m-1} f^{(n,m)}(x, y) dx dy + \\ & + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i,0)}(a, y)}{i!} (x-a)^i + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(0,k)}(x, c)}{k!} (y-c)^k - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(i,k)}(a, c)}{i!k!} (x-a)^i (y-c)^k. \end{aligned} \quad (6)$$

В формуле (6) использовано обозначение $f^{(i,k)}(x, y) = d^{i+k} f(x, y)/dx^i dy^k$.

Доказательство. Пусть $\frac{\partial^{n+m-2} f}{\partial x^{n-1} \partial y^{m-1}} \in AC(\overline{\Omega})$. В силу леммы 2 имеем

$$\frac{\partial^{n+m-2} f}{\partial x^{n-1} \partial y^{m-1}} = \int_a^x \int_c^y \varphi(x) dx dy + \int_a^x \psi(x) dx + \int_c^y \xi(y) dy + d_0. \quad (7)$$

Интегрируя последовательно (7) $n-1$ раз по x и $m-1$ раз по y , получим

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \frac{1}{(n-1)!(m-1)!} \int_a^x \int_c^y (x-t)^{n-1} (y-s)^{m-1} \varphi(x, y) dx dy + \frac{(y-c)^{m-1}}{(n-1)!(m-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \psi(x) dx + \\ & + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!(m-1)!} \int_c^y (y-c)^{m-1} \xi(y) dy + \sum_{i=0}^{n-1} \overline{\tau}_i(y) (x-a)^i + \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{\tau}_k(x) (y-c)^k, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\overline{\tau}_i(y)$ ($i = \overline{0, n-1}$), $\tilde{\tau}_k(x)$ ($k = \overline{0, m-1}$) — произвольные функции. При интегрировании использована широко известная для n -кратного интеграла формула [1]

$$\int_a^x dx \int_a^x dx \dots \int_a^x F(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} F(t) dt, \quad (9)$$

доказательство которой легко осуществить методом математической индукции. Из доказательства станет ясно, что произвольная постоянная в формуле (7) связана с произвольными функциями формулы (8) соотношением

$$(n-1)! \bar{\tau}_{n-1}^{-(m-1)}(c) + (m-1)! \tilde{\tau}_{m-1}^{(n-1)}(a) = d_0.$$

Поскольку $f(x, y) \in AC^{n,m}(\bar{\Omega})$, то производные $\frac{\partial^{i+k} f}{\partial x^i \partial y^k}$ ($0 \leq i < n, 0 \leq k < m$) существуют и непрерывны в Ω . Вычисляя производные по x порядка $0, \dots, n-1$ функции $f(x, y)$, задаваемой формулой (8), и полагая в них $x = a$, получим равенства

$$\frac{\partial^i f(a, y)}{\partial x^i} = i! \bar{\tau}_i(y) + \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{\tau}_k^{(i)}(a) (y-c)^k, \quad i = \overline{0, n-2}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial^{n-1} f(a, y)}{\partial x^{n-1}} = \frac{1}{(m-1)!} \int_c^y (y-c)^{m-1} \xi(y) dy + (n-1)! \bar{\tau}_{n-1}(y) + \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{\tau}_k^{(n-1)}(a) (y-c)^k. \quad (11)$$

Аналогичным образом, дифференцируя (8) по y и полагая $y = c$, получим равенства

$$\frac{\partial^k f(x, c)}{\partial y^k} = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{\tau}_i^{(k)}(c) (x-a)^i + k! \tilde{\tau}_k(x), \quad k = \overline{0, m-2}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial^{m-1} f(x, c)}{\partial y^{m-1}} = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \psi(x) dx + \sum_{i=0}^{n-1} \bar{\tau}_i^{(m-1)}(c) (x-a)^i + (m-1)! \tilde{\tau}_{m-1}(x). \quad (13)$$

Выражая из формул (10) - (13) $\bar{c}_i(y)$ и $\tilde{c}_i(x)$ соответственно, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n-1} \bar{\tau}_i(y) (x-a)^i + \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{\tau}_k(x) (y-c)^k = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} \left(\frac{\partial^i f(a, y)}{\partial x^i} - \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{\tau}_k^{(i)}(a) (y-c)^k \right) + \sum_{k=0}^{m-1} (y-c)^k \left(\frac{\partial^k f(x, c)}{\partial y^k} - \sum_{i=0}^{n-1} \bar{\tau}_i^{(k)}(c) (x-a)^i \right) - \\ & - \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!(m-1)!} \int_c^y (y-c)^{m-1} \xi(y) dy - \frac{(y-c)^{m-1}}{(n-1)!(m-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \psi(x) dx = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} \frac{\partial^i f(a, y)}{\partial x^i} + \sum_{k=0}^{m-1} (y-c)^k \frac{\partial^k f(x, c)}{\partial y^k} - \\ & - \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!(m-1)!} \int_c^y (y-c)^{m-1} \xi(y) dy - \frac{(y-c)^{m-1}}{(n-1)!(m-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \psi(x) dx - \\ & - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} (x-a)^i (y-c)^k \left(\frac{\bar{\tau}_i^{(k)}(c)}{k!} + \frac{\tilde{\tau}_k^{(i)}(a)}{i!} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Вычисляя смешанные производные $\frac{\partial^{i+k} f}{\partial x^i \partial y^k}$ функции (8) в точке (a, c) , получим

$$\frac{1}{i!k!} \frac{\partial^{i+k} f(a, c)}{\partial x^i \partial y^k} = \frac{\bar{\tau}_i^{(k)}(c)}{k!} + \frac{\tilde{\tau}_k^{(i)}(a)}{i!}. \quad (15)$$

Подставляя (14), (15) в (8), получим

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{(n-1)!(m-1)!} \int_a^x \int_c^y (x-t)^{n-1} (y-s)^{m-1} \varphi(x, y) dx dy + \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \frac{\partial^i f(a, y)}{\partial x^i} (x-a)^i + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f(x, c)}{\partial y^k} (y-c)^k - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{i!k!} \frac{\partial^{i+k} f(a, c)}{\partial x^i \partial y^k} (x-a)^i (y-c)^k. \end{aligned} \quad (16)$$

Равенство (6) следует из (16) и из того факта, что $\varphi(x, y) = \frac{\partial^{m+n} f(a, c)}{\partial x^n \partial y^m}$. Лемма доказана.

Следующая лемма дает описание класса $AC^{n,m}(\bar{\Omega})$. Она обобщает лемму 1 на случай двух

переменных и лемму 2 на случай $n + m > 2$.

Лемма 4. Классу $AC^{n,m}(\overline{\Omega})$ принадлежат те и только те функции $f(x, y)$, которые представимы в виде

$$f(x, y) = \frac{1}{(n-1)!(m-1)!} \int_a^x \int_c^y (x-t)^{n-1} (y-s)^{m-1} \varphi(x, y) dx dy + \\ + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(y-c)^k}{k!(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \psi_k(x) dx + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!(m-1)!} \int_c^y (y-c)^{m-1} \xi_i(y) dy + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} d_{ik} (x-a)^i (y-c)^k, \quad (17)$$

где $\varphi(x, y) \in L_1(x, y)$, $\psi_k(x) \in L_1(a, b)$ ($k = \overline{0, m-1}$), $\xi_i(y) \in L_1(c, d)$ ($i = \overline{0, n-1}$), а d_{ik} — произвольные постоянные.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(x, y) \in AC^{n,m}(\overline{\Omega})$. Согласно лемме 3

$$f(x, y) = \frac{1}{(n-1)!(m-1)!} \int_a^x \int_c^y (x-t)^{n-1} (y-s)^{m-1} f^{(n,m)}(x, y) dx dy + \\ + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i,0)}(a, y)}{i!} (x-a)^i + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(0,k)}(x, c)}{k!} (y-c)^k - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(i,k)}(a, c)}{i!k!} (x-a)^i (y-c)^k. \quad (18)$$

Так как $f^{(n-1,m-1)}(x, y) \in AC(\overline{\Omega})$, то $f^{(n-1,m-1)}(a, y) \in AC([c, d])$, следовательно,

$f^{(n-1,0)}(a, y) \in AC^m([c, d])$, откуда $f^{(i,0)}(a, y) \in AC^m([c, d])$ ($i = \overline{0, n-1}$). Используем лемму [9, с. 46]:

$$f^{(i,0)}(a, y) = \frac{1}{(m-1)!} \int_c^y (y-c)^{m-1} \xi_i(y) dy + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(i,k)}(a, c)}{k!} (y-c)^k, \quad (19)$$

где $\xi_i(y) \in L_1(c, d)$. Тогда

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i,0)}(a, y)}{i!} (x-a)^i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!(m-1)!} \int_c^y (y-c)^{m-1} \xi_i(y) dy + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(i,k)}(a, c)}{i!k!} (x-a)^i (y-c)^k. \quad (20)$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(0,k)}(x, c)}{k!} (y-c)^k = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(y-c)^k}{k!(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \psi_k(x) dx + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(i,k)}(a, c)}{i!k!} (x-a)^i (y-c)^k, \quad (21)$$

где $\psi_k(x) \in L_1(a, b)$. Подставляя (20), (21) в (18), получим формулу (17), в которой

$$d_{ik} = \frac{1}{i!k!} f^{(i,k)}(a, c). \quad (22)$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Вычисляя непосредственно $\frac{\partial^{i+k} f}{\partial x^i \partial y^k}$ ($0 \leq i < n, 0 \leq k < m$), легко убедиться,

что все они непрерывны в $\overline{\Omega}$, и

$$\frac{\partial^{n+m-2} f}{\partial x^{n-1} \partial y^{m-1}} = \int_a^x \int_c^y \varphi(x, y) dx dy + \int_a^x \psi(x) dx + \int_c^y \xi(y) dy + (n-1)!(m-1)! d_{n-1, m-1}. \quad (23)$$

Очевидно, что $\frac{\partial^{n+m-2} f}{\partial x^{n-1} \partial y^{m-1}} \in AC(\overline{\Omega})$, откуда следует $f(x, y) \in AC^{n,m}(\overline{\Omega})$.

Теорема доказана полностью.

Заметим, что

$$\varphi(x, y) = f^{(n,m)}(x, y); \quad (24)$$

$$\psi_k(x) = f^{(n,k)}(x, c), \quad k = \overline{0, m-1}; \quad (25)$$

$$\xi_i(y) = f^{(i,m)}(a, y), \quad i = \overline{0, n-1}; \quad (26)$$

$$d_{ik} = \frac{1}{i!k!} f^{(i,k)}(a, c). \quad (27)$$

Смешанный дробный интеграл и смешанная дробная производная

Определение 5 [1, с. 341]. Пусть $f(x, y) \in L_1(\Omega)$. Интеграл

$$(I_{a+,c+}^{\alpha,\beta} f)(x, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{(a,x) \times (c,y)} \frac{f(t, s) dt ds}{(x-t)^{1-\alpha} (y-s)^{1-\beta}}, \quad (28)$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, называется смешанным дробным интегралом Римана-Лиувилля порядка (α, β) .

Дробный интеграл (28), очевидно, определен на функциях $f(x, y) \in L_1(\Omega)$, существуя почти всюду.

С помощью теоремы Фубини доказывается полугрупповое свойство.

Пусть $f(x, y) \in L_1(a, b)$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - положительные числа, тогда почти всюду в Ω справедливо равенство

$$I_{a+,c+}^{\alpha,\beta} I_{a+,c+}^{\gamma,\delta} f = I_{a+,c+}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta} f. \quad (29)$$

Можно показать, что если $\alpha > 0$, функция $f(x, y)$ определена в Ω и $f(x, y) \in L_1(\Omega)$, то

$$(I_{a+,x}^{\alpha} f)(x, y) \in L_1(c, d) \quad \forall x \in (a, b); \quad (I_{a+,y}^{\alpha} f)(x, y) \in L_1(a, b) \quad \forall y \in (c, d).$$

В последних равенствах $I_{a+,x}^{\alpha} f$, $I_{a+,y}^{\alpha} f$ - частные дробные интегралы Римана-Лиувилля по переменным x и y соответственно.

С учетом этих равенств непосредственно проверяется, что

$$(I_{a+,x}^{\alpha} I_{b+,y}^{\beta} f)(x, y) = (I_{b+,y}^{\beta} I_{a+,x}^{\alpha} f)(x, y) = (I_{a+,c+}^{\alpha,\beta} f)(x, y). \quad (30)$$

Определение 6 [1, с. 342]. Для функции $f(x, y)$, заданной на Ω , выражение

$$(D_{a+,c+}^{\alpha,\beta} f)(x, y) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(m-\beta)} \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \int_{(a,x) \times (c,y)} \frac{f(t, s) dt ds}{(x-t)^{\alpha-n+1} (y-s)^{\beta-m+1}}, \quad (31)$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, называется смешанной дробной производной Римана-Лиувилля порядка (α, β) , $n = [\alpha] + 1$, $m = [\beta] + 1$.

Если функция $f(x, y)$ обладает свойством $I_{a+,c+}^{n-\alpha,m-\beta} f \in AC^{n,m}(\overline{\Omega})$, то порядок взятия производных в (31) не имеет значения, и

$$(D_{a+,c+}^{\alpha,\beta} f)(x, y) \in L_1(\Omega).$$

Определение 7 является двумерным аналогом определения 2.4 [1, с. 50].

Композиция смешанного дробного интеграла и смешанной дробной производной одного порядка. Следуя [1, с. 50], определим следующие классы функций.

Определение 7. Через $I_{a+,c+}^{\alpha,\beta}(L_1)$ обозначим класс функций $f(x, y)$, представимых смешанным дробным интегралом порядка (α, β) от суммируемой функции: $f = I_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \varphi$, $\varphi \in L_1(\Omega)$.

Определение 8. Пусть $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$. Будем говорить, что функция $f(x, y) \in L_1(a, b)$ имеет суммируемую дробную производную $D_{a+,c+}^{\alpha,\beta} f$, если $I_{a+,c+}^{n-\alpha,m-\beta} f \in AC^{n,m}(\overline{\Omega})$.

Следующая теорема задает необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости двухмерного интегрального уравнения Абеля.

Теорема 1. Для того чтобы $f(x, y) \in I_{a+,c+}^{\alpha,\beta}(L_1)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f_{n-\alpha,m-\beta} \in AC^{n,m}(\overline{\Omega}), \quad (32)$$

где $n = [\alpha] + 1$, $m = [\beta] + 1$, и чтобы

$$f_{n-\alpha,m-\beta}^{(i,0)}(a, y) \equiv 0, \quad i = \overline{0, n-1}; \quad (33)$$

$$f_{n-\alpha,m-\beta}^{(0,k)}(x, c) \equiv 0, \quad k = \overline{0, m-1}; \quad (34)$$

$$f_{n-\alpha,m-\beta}^{(i,k)}(a, c) = 0, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad k = \overline{0, m-1}. \quad (35)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f = I_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \varphi$, $\varphi \in L_1(\Omega)$. Тогда в силу полугруппового свойства

$$f_{n-\alpha, m-\beta}(x, y) = I_{a+, c+}^{n-\alpha, m-\beta} f = I_{a+, c+}^{n, m} \varphi, \quad (36)$$

где $\varphi \in L_1(\Omega)$. Отсюда следует выполнимость условий (33)-(35). Выполнимость условия (32) вытекает из леммы 4.

Достаточность. При выполнении условия (32) можем представить $f_{n-\alpha, m-\beta}$ согласно лемме 3 в виде

$$f_{n-\alpha, m-\beta}(x, y) = \frac{1}{(n-1)!(m-1)!} \int_a^x \int_c^y (x-t)^{n-1} (y-s)^{m-1} f_{n-\alpha, m-\beta}^{(n, m)}(x, y) dx dy + \\ + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i, 0)}(a, y)}{i!} (x-a)^i + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f_{n-\alpha, m-\beta}^{(0, k)}(x, c)}{k!} (y-c)^k - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f_{n-\alpha, m-\beta}^{(i, k)}(a, c)}{i! k!} (x-a)^i (y-c)^k, \quad (37)$$

где $f_{n-\alpha, m-\beta}^{(n, m)} \in L_1(\Omega)$. С учетом условий (33) - (35) последнее равенство запишется в виде

$$f_{n-\alpha, m-\beta}(x, y) = \frac{1}{(n-1)!(m-1)!} \int_a^x \int_c^y (x-t)^{n-1} (y-s)^{m-1} f_{n-\alpha, m-\beta}^{(n, m)}(x, y) dx dy. \quad (38)$$

Используя полугрупповое свойство (29), можно записать

$$I_{a+, c+}^{n-\alpha, m-\beta} f = I_{a+, c+}^{n, m} f_{n-\alpha, m-\beta}^{(n, m)} = I_{a+, c+}^{n-\alpha, m-\beta} I_{a+, c+}^{\alpha, \beta} f_{n-\alpha, m-\beta}^{(n, m)}. \quad (39)$$

Отсюда $I_{a+, c+}^{n-\alpha, m-\beta} (f - I_{a+, c+}^{\alpha, \beta} f_{n-\alpha, m-\beta}^{(n, m)}) = 0$. Применив к этому равенству интеграл $I_{a+, c+}^{\alpha, \beta}$, получим

$$I_{a+, c+}^{n, m} (f - I_{a+, c+}^{\alpha, \beta} f_{n-\alpha, m-\beta}^{(n, m)}) dx dy = 0. \quad (40)$$

Отсюда $f = I_{a+, c+}^{\alpha, \beta} f_{n-\alpha, m-\beta}^{(n, m)}$, $f_{n-\alpha, m-\beta}^{(n, m)} \in L_1(\Omega)$. Теорема доказана.

Отметим, что теорема 1 является обобщением теоремы 2.3 [1, с. 49] на случай двух переменных. Из нее, в частности, следует, что класс функций, имеющих суммируемую дробную производную $D_{a+, c+}^{\alpha, \beta} f$ в смысле определения 8, шире класса функций $I_{a+, c+}^{\alpha, \beta}(L_1)$. А именно, классу $I_{a+, c+}^{\alpha, \beta}(L_1)$ принадлежат только те функции, имеющие суммируемую дробную производную $D_{a+, c+}^{\alpha, \beta} f$, для которых выполняются равенства (33)-(35).

Теорема 2. Пусть $\alpha > 0, \beta > 0$. Тогда равенство

$$D_{a+, c+}^{\alpha, \beta} I_{a+, c+}^{\alpha, \beta} f = f(x, y) \quad (41)$$

выполняется для любой суммируемой функции $f(x, y)$.

Доказательство. Имеем

$$D_{a+, c+}^{\alpha, \beta} I_{a+, c+}^{\alpha, \beta} f = \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} I_{a+, c+}^{n-\alpha, m-\beta} I_{a+, c+}^{\alpha, \beta} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(n-\alpha) \Gamma(m-\beta)} \times \\ \times \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \int_a^x \int_c^y \frac{dt ds}{(x-t)^\alpha (y-s)^\beta} \int_a^t \int_c^s \frac{f(u, v) du dv}{(t-u)^{n-\alpha} (s-v)^{m-\beta}}. \quad (42)$$

Меняя порядок интегрирования, получим

$$D_{a+, c+}^{\alpha, \beta} I_{a+, c+}^{\alpha, \beta} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(n-\alpha) \Gamma(m-\beta)} \times \\ \times \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \int_a^x \int_c^y f(u, v) du dv \int_u^x \int_v^y \frac{dt ds}{(t-u)^{n-\alpha} (s-v)^{m-\beta} (x-t)^\alpha (y-s)^\beta} = \\ = \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \int_a^x \int_c^y f(u, v) du dv \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(n-\alpha)} \int_u^x \frac{dt}{(t-u)^{n-\alpha} (x-t)^\alpha} \times \\ \times \frac{1}{\Gamma(\beta) \Gamma(m-\beta)} \int_v^y \frac{ds}{(s-v)^{m-\beta} (y-s)^\beta} = \\ = \frac{1}{\Gamma(n) \Gamma(m)} \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \int_a^x \int_c^y f(u, v) (x-u)^{n-1} (y-v)^{m-1} du dv = f(x, y), \quad (43)$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. Для любой функции $f(x, y) \in I_{a+, c+}^{\alpha, \beta}(L_1)$ выполняется равенство

$$I_{a+, c+}^{\alpha, \beta} D_{a+, c+}^{\alpha, \beta} f = f(x, y), \quad (44)$$

а для любой функции, имеющей суммируемую производную $D_{a+,c+}^{\alpha,\beta} f$ (в смысле определения 8), выполняется равенство

$$I_{a+,c+}^{\alpha,\beta} D_{a+,c+}^{\alpha,\beta} f = f(x,y) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-i-1}}{\Gamma(\alpha-i)} f_{n-\alpha,0}^{(n-i-1,0)}(a,y) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(y-c)^{\beta-k-1}}{\Gamma(\beta-k)} f_{0,m-\beta}^{(0,m-k-1)}(x,c) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{\alpha-i-1} (y-c)^{\beta-k-1}}{\Gamma(\alpha-i) \Gamma(\beta-k)} f_{n-\alpha,m-\beta}^{(n-i-1,m-k-1)}(a,c), \quad (45)$$

где $f_{\gamma,\delta}(x,y) = I_{a+,c+}^{\gamma,\delta} f$.

Доказательство. Пусть $f(x,y) \in I_{a+,c+}^{\alpha,\beta}(L_1)$, тогда $f(x,y) = I_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \varphi$, $\varphi(x,y) \in L_1(\Omega)$. На основании теоремы 2 имеем

$$I_{a+,c+}^{\alpha,\beta} D_{a+,c+}^{\alpha,\beta} f = I_{a+,c+}^{\alpha,\beta} D_{a+,c+}^{\alpha,\beta} I_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \varphi = I_{a+,c+}^{\alpha,\beta} \varphi = f(x,y). \quad (46)$$

Пусть теперь $I_{a+,c+}^{1-\alpha,1-\beta} f \in AC(\bar{\Omega})$. Согласно лемме 3, интеграл $f_{n-\alpha,m-\beta}(x,y) = I_{a+,c+}^{n-\alpha,m-\beta} f$ представим в виде

$$f_{n-\alpha,m-\beta}(x,y) = I_{a+,c+}^{n,m} f_{n-\alpha,m-\beta}^{(n,m)} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f_{n-\alpha,m-\beta}^{(i,0)}(a,y)}{i!} (x-a)^i + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f_{n-\alpha,m-\beta}^{(0,k)}(x,c)}{k!} (y-c)^k - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f_{n-\alpha,m-\beta}^{(i,k)}(a,c)}{i!k!} (x-a)^i (y-c)^k. \quad (47)$$

В силу полугруппового свойства выполняется равенство

$$I_{a+,c+}^{n,m} f_{n-\alpha,m-\beta}^{(n,m)} = I_{a+,c+}^{n-\alpha,m-\beta} I_{a+,c+}^{\alpha,\beta} f_{n-\alpha,m-\beta}^{(n,m)}. \quad (48)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{(x-a)^i}{i!} f_{n-\alpha,m-\beta}^{(i,0)}(a,y) &= I_{a+,c+}^{n-\alpha,m-\beta} \left(D_{a+,x}^{n-\alpha} \frac{(x-a)^i}{i!} D_{c+,y}^{m-\beta} f_{n-\alpha,m-\beta}^{(i,0)}(a,y) \right) + \frac{(x-a)^i (y-c)^{m-\beta-1}}{i! \Gamma(m-\beta)} f_{n-\alpha,1}^{(i,0)}(a,c) = \\ &= I_{a+,c+}^{n-\alpha,m-\beta} \left(\frac{(x-a)^{i-n+\alpha}}{\Gamma(1+i-n+\alpha)} f_{n-\alpha,0}^{(i,0)}(a,y) \right) + \frac{(x-a)^i (y-c)^{m-\beta-1}}{i! \Gamma(m-\beta)} f_{n-\alpha,1}^{(i,0)}(a,c). \end{aligned} \quad (49)$$

Из последнего равенства следует, что

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f_{n-\alpha,m-\beta}^{(i,0)}(a,y)}{i!} (x-a)^i = \\ &= I_{a+,c+}^{n-\alpha,m-\beta} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{i-n+\alpha}}{\Gamma(1+i-n+\alpha)} f_{n-\alpha,0}^{(i,0)}(a,y) \right) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i (y-c)^{m-\beta-1}}{i! \Gamma(m-\beta)} f_{n-\alpha,1}^{(i,0)}(a,c), \end{aligned} \quad (50)$$

откуда, переобозначая индекс суммирования, получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f_{n-\alpha,m-\beta}^{(i,0)}(a,y)}{i!} (x-a)^i = \\ &= I_{a+,c+}^{n-\alpha,m-\beta} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-i-1}}{\Gamma(\alpha-i)} f_{n-\alpha,0}^{(n-i-1,0)}(a,y) \right) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i (y-c)^{m-\beta-1}}{i! \Gamma(m-\beta)} f_{n-\alpha,1}^{(i,0)}(a,c). \end{aligned} \quad (51)$$

Аналогично получается равенство

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f_{n-\alpha,m-\beta}^{(0,k)}(x,c)}{k!} (y-c)^k = \\ &= I_{a+,c+}^{n-\alpha,m-\beta} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(y-c)^{\beta-k-1}}{\Gamma(\beta-k)} f_{0,m-\beta}^{(0,m-k-1)}(x,c) \right) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(y-c)^k (x-a)^{n-\alpha-1}}{k! \Gamma(n-\alpha)} f_{1,m-\beta}^{(0,k)}(a,c). \end{aligned} \quad (52)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f_{n-\alpha,m-\beta}^{(i,k)}(a,c)}{i!k!} (x-a)^i (y-c)^k = I_{a+,c+}^{n-\alpha,m-\beta} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} I_{a+,c+}^{n-\alpha,m-\beta} \left(\frac{(x-a)^i (y-c)^k}{i!k!} \right) f_{n-\alpha,m-\beta}^{(i,k)}(a,c) \right) = \\ &= I_{a+,c+}^{n-\alpha,m-\beta} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{\alpha-i-1} (y-c)^{\beta-k-1}}{\Gamma(\alpha-i) \Gamma(\beta-k)} f_{n-\alpha,m-\beta}^{(n-i-1,m-k-1)}(a,c) \right). \end{aligned} \quad (53)$$

С учетом равенств (48), (51)-(53) равенство (47) запишется в виде

$$\begin{aligned}
I_{a+,c+}^{n-\alpha,m-\beta} f = & I_{a+,c+}^{n-\alpha,m-\beta} I_{a+,c+}^{\alpha,\beta} D_{a+,c+}^{\alpha,\beta} f + I_{a+,c+}^{n-\alpha,m-\beta} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-i-1}}{\Gamma(\alpha-i)} f_{n-\alpha,0}^{(n-i-1,0)}(a,y) \right) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i (y-c)^{m-\beta-1}}{i! \Gamma(m-\beta)} f_{n-\alpha,1}^{(i,0)}(a,c) + \\
& + I_{a+,c+}^{n-\alpha,m-\beta} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(y-c)^{\beta-k-1}}{\Gamma(\beta-k)} f_{0,m-\beta}^{(0,m-k-1)}(x,c) \right) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(y-c)^k (x-a)^{n-\alpha-1}}{k! \Gamma(n-\alpha)} f_{1,m-\beta}^{(0,k)}(a,c) - \\
& - I_{a+,c+}^{n-\alpha,m-\beta} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{\alpha-i-1} (y-c)^{\beta-k-1}}{\Gamma(\alpha-i) \Gamma(\beta-k)} f_{n-\alpha,m-\beta}^{(n-i-1,m-k-1)}(a,c) \right). \quad (54)
\end{aligned}$$

Группируя слагаемые, получим

$$\begin{aligned}
I_{a+,c+}^{n-\alpha,m-\beta} \left(f - I_{a+,c+}^{\alpha,\beta} D_{a+,c+}^{\alpha,\beta} f - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-i-1}}{\Gamma(\alpha-i)} f_{n-\alpha,0}^{(n-i-1,0)}(a,y) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(y-c)^{\beta-k-1}}{\Gamma(\beta-k)} f_{0,m-\beta}^{(0,m-k-1)}(x,c) + \right. \\
\left. + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{\alpha-i-1} (y-c)^{\beta-k-1}}{\Gamma(\alpha-i) \Gamma(\beta-k)} f_{n-\alpha,m-\beta}^{(n-i-1,m-k-1)}(a,c) \right) = \\
= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i (y-c)^{m-\beta-1}}{i! \Gamma(m-\beta)} f_{n-\alpha,1}^{(i,0)}(a,c) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(y-c)^k (x-a)^{n-\alpha-1}}{k! \Gamma(n-\alpha)} f_{1,m-\beta}^{(0,k)}(a,c). \quad (55)
\end{aligned}$$

В правой части равенства (55) под интегралом – суммируемая функция. Применяя к обоим частям равенства (55) оператор $I_{a+,c+}^{\alpha,\beta}$, получим

$$\begin{aligned}
I_{a+,c+}^{n,m} \left(f - I_{a+,c+}^{\alpha,\beta} D_{a+,c+}^{\alpha,\beta} f - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-i-1}}{\Gamma(\alpha-i)} f_{n-\alpha,0}^{(n-i-1,0)}(a,y) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(y-c)^{\beta-k-1}}{\Gamma(\beta-k)} f_{0,m-\beta}^{(0,m-k-1)}(x,c) + \right. \\
\left. + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{\alpha-i-1} (y-c)^{\beta-k-1}}{\Gamma(\alpha-i) \Gamma(\beta-k)} f_{n-\alpha,m-\beta}^{(n-i-1,m-k-1)}(a,c) \right) = \\
= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{i+\alpha} (y-c)^{m-1}}{\Gamma(i+\alpha+1) \Gamma(m)} f_{n-\alpha,1}^{(i,0)}(a,c) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(y-c)^{k+\beta} (x-a)^{n-1}}{\Gamma(k+\beta+1) \Gamma(n)} f_{1,m-\beta}^{(0,k)}(a,c). \quad (56)
\end{aligned}$$

Под интегралом в левой части равенства стоит суммируемая функция, а правая часть равенства абсолютно непрерывна. Находя смешанную производную $\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^n \partial y^m}$ от обеих частей равенства, получим

$$\begin{aligned}
f - I_{a+,c+}^{\alpha,\beta} D_{a+,c+}^{\alpha,\beta} f - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-i-1}}{\Gamma(\alpha-i)} f_{n-\alpha,0}^{(n-i-1,0)}(a,y) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(y-c)^{\beta-k-1}}{\Gamma(\beta-k)} f_{0,m-\beta}^{(0,m-k-1)}(x,c) + \\
+ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{\alpha-i-1} (y-c)^{\beta-k-1}}{\Gamma(\alpha-i) \Gamma(\beta-k)} f_{n-\alpha,m-\beta}^{(n-i-1,m-k-1)}(a,c) = 0. \quad (57)
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Заключение. Доказанные в работе лемма 3 о представимости функции $f(x,y) \in AC^{m,n}(\bar{\Omega})$ в виде (6) и лемма 4 обобщают известные ранее леммы 1 и 2 на двумерный случай. Леммы 3,4 позволяют доказать теорему 1 (необходимое и достаточное условие представимости функции $f(x,y)$ в виде смешанного дробного интеграла от суммируемой функции) и теоремы 2,3 о композиции смешанного дробного интеграла и смешанной дробной производной. Отметим, что теоремы 2,3 обобщают результаты теоремы 2.4 [1, с. 50] на двухмерный случай.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 702 с.
2. Oldham K.B., Spanier J. The Fractional Calculus. New York-London: Academic Press, 1974. 234 p.
3. Podlubny I. Fractional Differential Equations. //Mathematics in Sciences and Engineering, Vol. 198, San-Diego: Academic Press, 1999. P. 32-39.
4. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М: Высш. шк., 1995. 301 с.
5. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик: КБНЦ РАН, 2000. 299 с.
6. Нахушева В.А. Некоторые классы дифференциальных уравнений математических моделей нелокальных физических процессов. Нальчик: КБНЦ РАН, 2002. 100 с.
7. Metzler R., Klafter J. The randomwalk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach //Phys. Reports. 2000. Vol. 339. P. 1-77.
8. Sokolov I.M., Klafter J., Blumen A. Fractional kinetics // Physics Today, November 2002. P. 48-54.
9. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Fractional differential equations: An emergent field in applied and mathe-

- mathematical sciences// Factorization, Singular Operators and Related Problems. Proceedings of the Conference in Honour of Professor Georgii Litvinchuk. Eds.: Samko, Stefan; Lebre, Anarino and Santos, Antonio. Kluwer, Dordrecht-Boston-London, 2003. P. 151-173.
10. Love E.R. Some integral equations involving hypergeometric functions// Proc. Edinburgh Math. Soc., 1967. Vol. 15. №3. P. 169-198.
 11. Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric function// Math. Rep. Kyushu Univ., 1978. Vol. 11. №2. P. 135-143.
 12. Килбас А.А., Репин О.А. Нелокальная задача для уравнения смешанного типа с частной производной Римана-Лиувилля и операторами обобщенного дробного интегрирования в краевом условии// Минск: Труды Института Математики БАН, 2004. Т. 12. №2. С. 75-81.
 13. Репин О.А. Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. Самара: Изд-во Саратовск. ун-та (Самарск. филиал), 1992. 162 с.
 14. Андреев А. А. Об одном обобщении операторов дробного интегродифференцирования и его приложениях // Интегральные уравнения и краевые задачи математической физики. Матер. Всесоюзной конф. Владивосток. 1990. С. 91.
 15. Андреев А.А., Огородников Е.Н. Матричные интегродифференциальные операторы и их применение // Вестник Самарск. гос. техн. ун-та. Сер.: физ.-мат. науки. Вып. 7. Самара: СамГТУ, 1999. С. 27-37.
 16. Еремин А. С., Андреев А. А. Краевая задача для уравнения с матричным интегродифференциальным оператором // Вестник Самарск. гос. техн. ун-та. Сер.: физ.-мат. науки. Вып. 26. Самара: СамГТУ, 2004. С. 5-11.
 17. Vasilache S. Asupra unei ecuatii integrale de tip Abel cu doua variabile // Comun. Acad. R.P. Romane, 1953. Vol. 3. №3-4. P. 109-113.
 18. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 5. М.: ОГИЗ, 1947. 584 с.
 19. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М: Наука, 1968. 496 с.
 20. Тер-Криков А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1988. 816 с.

Поступила 15.12.2004 г.

УДК 517.956

Е.Н. Огородников, Е.Ю. Арланова

НЕКОТОРЫЕ НЕЛОКАЛЬНЫЕ АНАЛОГИ ЗАДАЧИ КОШИ–ГУРСА И СУЩЕСТВЕННО НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ БИЦАДЗЕ–ЛЫКОВА В СПЕЦИАЛЬНЫХ СЛУЧАЯХ

На примере уравнения влагопереноса и системы подобных уравнений в условиях отсутствия единственности решения задачи Коши–Гурса рассмотрены простейшие нелокальные аналоги этой задачи и некоторые существенно нелокальные краевые задачи с условиями типа Бицадзе–Самарского и Бицадзе–Нахушева. Обоснована их корректность.

Введение. Уравнение

$$y^2 u_{xx} - u_{yy} + au_x = 0, \quad (1)$$

описывающее при $a > 0$ процесс переноса потока влаги в капиллярно-пористых средах выведено в 1965 г. А. В. Лыковым методами термодинамики необратимых процессов и с тех пор известно как уравнение влагопереноса [1]. Ранее в 1959 г. в монографии А. В. Бицадзе [2] это уравнение приводилось в качестве примера, для которого при $|a| \leq 1$ корректна по Адамару задача Коши

$$\lim_{y \rightarrow +0} u(x, 0) = \tau(x), \quad \lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y) = \nu(x), \quad x \in (0, 1) \quad (2)$$

с начальными данными на линии $y = 0$ параболического вырождения, хотя и нарушено известное условие Геллерстедта [3]. Регулярное в области $\Omega = \left\{ (x, y): 0 < x - \frac{y^2}{2} < x + \frac{y^2}{2} < 1 \right\}$ решение задачи (2) для уравнения (1) находится методом Римана и при $|a| < 1$ имеет вид [2, 4]:

$$u(x, y) = B(\alpha, \beta) y \int_{x - \frac{y^2}{2}}^{x + \frac{y^2}{2}} \tau(s) \left(s - x + \frac{y^2}{2} \right)^{\beta-1} \left(x + \frac{y^2}{2} - s \right)^{\alpha-1} ds +$$