Общероссийский математический портал

Е. Н. Огородников, Е. Ю. Арланова, Некоторые нелокальные аналоги задачи Коши–Гурса и существенно нелокальные краевые задачи для системы уравнений Бицадзе–Лыкова в специальных случаях, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005, выпуск 34, 24–39

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu334>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 06:20:55

- mathematical sciences// Factorization, Singular Operators and Related Problems. Proceedings of the Conference in Honour of Professor Georgii Litvinchuk. Eds.: Samko, Stefan; Lebre, Anarino and Santos, Antonio. Kluwer, Dordrecht-Boston-London, 2003. P. 151-173.
10. Love E.R. Some integral equations involving hypergeometric functions// Proc. Edinburgh Math. Soc., 1967. Vol. 15. №3. P. 169-198.
 11. Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric function// Math. Rep. Kyushu Univ., 1978. Vol. 11. №2. P. 135-143.
 12. Килбас А.А., Репин О.А. Нелокальная задача для уравнения смешанного типа с частной производной Римана-Лиувилля и операторами обобщенного дробного интегрирования в краевом условии// Минск: Труды Института Математики БАН, 2004. Т.12. №2. С. 75-81.
 13. Репин О.А. Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. Самара: Изд-во Саратовск. ун-та (Самарск. филиал), 1992. 162 с.
 14. Андреев А. А. Об одном обобщении операторов дробного интегродифференцирования и его приложениях // Интегральные уравнения и краевые задачи математической физики. Матер. Всесоюзной конф. Владивосток. 1990. С. 91.
 15. Андреев А.А., Огородников Е.Н. Матричные интегродифференциальные операторы и их применение // Вестник Самарск. гос. техн. ун-та. Сер.: физ.-мат. науки. Вып. 7. Самара: СамГТУ, 1999. С. 27-37.
 16. Еремин А. С., Андреев А. А. Краевая задача для уравнения с матричным интегродифференциальным оператором // Вестник Самарск. гос. техн. ун-та. Сер.: физ.-мат. науки. Вып. 26. Самара: СамГТУ, 2004. С. 5-11.
 17. Vasilache S. Asupra unei ecuatii integrale de tip Abel cu doua variabile // Comun. Acad. R.P. Romane, 1953. Vol. 3. №3-4. P. 109-113.
 18. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 5. М.: ОГИЗ, 1947. 584 с.
 19. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М: Наука, 1968. 496 с.
 20. Тер-Криков А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1988. 816 с.

Поступила 15.12.2004 г.

УДК 517.956

Е.Н. Огородников, Е.Ю. Арланова

НЕКОТОРЫЕ НЕЛОКАЛЬНЫЕ АНАЛОГИ ЗАДАЧИ КОШИ–ГУРСА И СУЩЕСТВЕННО НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ БИЦАДЗЕ–ЛЫКОВА В СПЕЦИАЛЬНЫХ СЛУЧАЯХ

На примере уравнения влагопереноса и системы подобных уравнений в условиях отсутствия единственности решения задачи Коши–Гурса рассмотрены простейшие нелокальные аналоги этой задачи и некоторые существенно нелокальные краевые задачи с условиями типа Бицадзе–Самарского и Бицадзе–Нахушева. Обоснована их корректность.

Введение. Уравнение

$$y^2 u_{xx} - u_{yy} + au_x = 0, \quad (1)$$

описывающее при $a > 0$ процесс переноса потока влаги в капиллярно-пористых средах выведено в 1965 г. А. В. Лыковым методами термодинамики необратимых процессов и с тех пор известно как уравнение влагопереноса [1]. Ранее в 1959 г. в монографии А. В. Бицадзе [2] это уравнение приводилось в качестве примера, для которого при $|a| \leq 1$ корректна по Адамару задача Коши

$$\lim_{y \rightarrow +0} u(x, 0) = \tau(x), \quad \lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y) = \nu(x), \quad x \in (0, 1) \quad (2)$$

с начальными данными на линии $y = 0$ параболического вырождения, хотя и нарушено известное условие Геллерстедта [3]. Регулярное в области $\Omega = \left\{ (x, y) : 0 < x - \frac{y^2}{2} < x + \frac{y^2}{2} < 1 \right\}$ решение задачи (2) для уравнения (1) находится методом Римана и при $|a| < 1$ имеет вид [2, 4]:

$$u(x, y) = B(\alpha, \beta) y \int_{x - \frac{y^2}{2}}^{x + \frac{y^2}{2}} \tau(s) \left(s - x + \frac{y^2}{2} \right)^{\beta-1} \left(x + \frac{y^2}{2} - s \right)^{\alpha-1} ds +$$

$$+ B(1-\alpha, 1-\beta) \int_{x-\frac{y^2}{2}}^{x+\frac{y^2}{2}} \nu(s) \left(s-x+\frac{y^2}{2}\right)^{-\alpha} \left(x+\frac{y^2}{2}-s\right)^{-\beta} ds, \quad (3)$$

где $\alpha = (1-a)/4$, $\beta = (1+a)/4$, $B(\alpha, \beta)$ — бета-функция [5], а заданные функции $\tau(x) \in C^2(0,1) \cap L((0,1), x^{\alpha-1}, (1-x)^{\beta-1})$, $\nu(x) \in C^2(0,1) \cap L((0,1), x^{-\beta}, (1-x)^{-\alpha})$.

В монографии А. М. Нахушева [6] уравнение (1) приведено в качестве математической модели одномерного потока $u = u(x, t)$ биомассы микробной популяции и названо уравнением Бицадзе-Лыкова при любых значениях параметра $a \in \mathbb{R}$. Там же, а ранее в работах [7–10], это уравнение при $a = \pm 1$ приводилось как пример уравнения, для которого задача Коши–Гурса (вторая задача Дарбу) с данными на одной из характеристик, ограничивающих область Ω , некорректна в смысле отсутствия единственности решения, и, следовательно, характеристики неравноправны как носители данных Дарбу.

Известно [6], что одним из инструментов устранения неравноправия характеристик является замена классических краевых условий нелокальными краевыми условиями, в которых значения искомого решения в точках, лежащих на граничных характеристиках области Ω , связаны с данными на линии вырождения. При этом, решение самой краевой задачи находится в форме решения задачи Коши, а ее корректность по Адамару является непосредственным следствием корректности последней.

Структура решения задачи Коши для вырождающихся уравнений гиперболического типа, к числу которых относится уравнение влагопереноса, такова, что в нелокальных условиях естественным образом возникают (используются) операторы дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля [11] или их различные аналоги и обобщения.

Вопросам методики постановки корректных краевых задач для линейных вырождающихся гиперболических, гиперболо-параболических и смешанного типа уравнений посвящено огромное количество работ. В частности, в связи с уравнением Бицадзе–Лыкова, помимо указанных выше, отметим монографию А. М. Нахушева [12] и работы Ф. Б. Нахушевой [13–15], С. К. Кумыковой [16–19], А. Т. Джунисова [20], О. А. Репина (см. библиографический список в монографии [21], а также работы [22–24] последующих лет) и весьма содержательные монографии В. А. Нахушевой [25] и Л. И. Сербиной [26], в которых исследованы качественно новые математические модели процессов переноса в сплошных средах с памятью; в пористых средах, обладающих фрактальной структурой; основные нелокальные дифференциальные уравнения этих моделей, описывающие, в частности, движение грунтовых вод, почвенной влаги и т.п.

Некоторые простые нелокальные аналоги задачи Коши–Гурса. Рассмотрим уравнение (1) при $a = 1$. Решение задачи Коши (2) в области Ω для этого случая имеет вид

$$u(x, y) = \tau\left(x + \frac{y^2}{2}\right) + \frac{1}{2} \int_{x-\frac{y^2}{2}}^{x+\frac{y^2}{2}} \frac{\nu(t) dt}{\sqrt{x + \frac{y^2}{2} - t}}. \quad (4)$$

Справедливо утверждение. Если заданные функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ таковы, что $\tau(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, а $\nu(x) \in C^2(0,1) \cap L\left((0,1), x^{-\frac{1}{2}}, (1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)$, то единственное решение $u(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ задачи с начальными данными (2) имеет вид (4). Такое решение называется классическим. Если же функции $\tau(x)$, $\nu(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, то формула (4) является решением задачи Коши

$$u(x, 0) = \tau(x); \quad (5)$$

$$u_y(x, y) = \nu(x), \quad (6)$$

где $x \in [0,1]$, для уравнения (1) при $a = 1$ в классе функций

$$u(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup (0,1)) \cap C^2(\Omega). \quad (7)$$

Пусть $\Theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}, \sqrt{x}\right)$ и $\Theta_1(x) = \left(\frac{1+x}{2}, \sqrt{1-x}\right)$ — аффиксы точек пересечения

характеристик уравнения (1), выходящих из произвольной точки $x \in [0,1]$, с характеристиками $\xi = x - \frac{y^2}{2} = 0$ и $\eta = x + \frac{y^2}{2} = 1$ соответственно.

Рассмотрим условия

$$u[\Theta_0(x)] = \psi(x), \quad (8)$$

$$u[\Theta_1(x)] = \varphi(x), \quad (9)$$

где $x \in [0,1]$. В работах [6-10] показано, что решение задачи Коши-Гурса для уравнения (1) при $a=1$ с данными (6) и (8) существует и единственно, в то время как решение задачи с данными (6) и (9) определяется с точностью до произвольной функции $\tau(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$ при выполнении некоторого дополнительного соотношения, связывающего заданную функцию $v(x)$ и производную $\varphi'(x)$.

В этой ситуации рассмотрим задачу с начальным условием (6) и простейшим нелокальным условием [13]

$$A_1(x)u[\Theta_1(x)] = B_1(x)u(x,0) + c_1(x), \quad (10)$$

где $A_1(x)$, $B_1(x)$, $c_1(x)$ - известные функции.

Используя формулу решения задачи Коши (4), вычислим

$$u[\Theta_1(x)] = \tau(1) + \frac{1}{2} \int_x^1 \frac{v(t)dt}{\sqrt{1-t}} = \tau(1) + \frac{1}{2} D_{x1}^{-1} (1-x)^{-\frac{1}{2}} v(x), \quad (11)$$

где $D_{ax}^{-\alpha} f$ - интегро-дифференциальный оператор Римана-Лиувилля, определяемый следующим равенством [6]

$$D_{ax}^{-\alpha} f = \begin{cases} \frac{\text{sign}(x-a)}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \alpha > 0; \\ \left(\text{sign}(x-a) \frac{d}{dx} \right)^n D_{ax}^{-(n+\alpha)} f, \alpha \leq 0, n = [\alpha] + 1, \end{cases} \quad (12)$$

$\Gamma(z)$ - гамма-функция Эйлера [5], $[\alpha]$ - целая часть числа α , $x \in (a, b)$.

Подставляя выражение (11) в равенство (10) и обозначая неизвестную функцию $u(x,0) = \tau(x)$, получим

$$\tau(x) = \frac{1}{B_1(x)} \left\{ A_1(x) \left[\tau(1) + \frac{1}{2} D_{x1}^{-1} (1-x)^{-\frac{1}{2}} v(x) \right] - c_1(x) \right\},$$

где $\tau(1) = c_1(1)[A_1(1) - B_1(1)]^{-1}$. Очевидно, при выполнении условий $A_1(x)$, $B_1(x)$, $c_1(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, $B_1(x) \neq 0$ для $x \in [0,1]$ и $A_1(1) \neq B_1(1)$ функция $\tau(x)$ будет принадлежать классу функций $C[0,1] \cap C^2(0,1)$, что обеспечивает существование единственного решения уравнения (1) при $a=1$ в форме равенства (4) в классе функций (7).

Нетрудно убедиться, что задача с аналогичными (10) нелокальным условием на другой характеристике

$$A_0(x)u[\Theta_0(x)] = B_0(x)u(x,0) + c_0(x) \quad (13)$$

при выполнении условия $A_0(x) - B_0(x) \neq 0$ для $x \in [0,1]$ не нарушает ее корректности.

Действительно, вычисляя значение

$$u[\Theta_0(x)] = \tau(x) + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{v(t)dt}{\sqrt{x-t}} = \tau(x) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} D_{0x}^{-\frac{1}{2}} v(x) \quad (14)$$

и подставляя полученное выражение в условие (13), для неизвестной функции $u(x,0) = \tau(x)$ получим равенство:

$$\tau(x) = [A_0(x) - B_0(x)]^{-1} \left[c_0(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} A_0(x) D_{0x}^{-\frac{1}{2}} v(x) \right].$$

Можно высказать следующее утверждение. Задачи с нелокальным условием вида

$$A(x)u[\Theta_i(x)] = B(x)u(x,0) + c(x), \quad i = 0, 1 \quad (15)$$

и начальным условием (6), которые можно назвать нелокальными вариантами задачи Коши-Гурса, будут поставлены корректно, если $A(x), B(x), c(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, $A(x) - B(x) \neq 0$, $B(x) \neq 0$ для всех $x \in [0,1]$.

Покажем теперь, что задачи с условиями (6) и (15) будут корректны и для уравнения (1) при $|a| < 1$.

Рассмотрим, например, условие (10) и вычислим значение $u[\Theta_1(x)]$ по формуле решения задачи Коши (3):

$$\begin{aligned} u[\Theta_1(x)] &= \frac{\sqrt{\pi(1-x)}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_x^1 \tau(s)(1-s)^{\alpha-1}(s-x)^{\beta-1} ds + \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \int_x^1 \nu(s)(1-s)^{-\beta}(s-x)^{-\alpha} ds = \\ &= \frac{\sqrt{\pi(1-x)}}{\Gamma(\alpha)} D_{x1}^{-\beta} (1-x)^{\alpha-1} \tau(x) + \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(1-\beta)} D_{x1}^{-(1-\alpha)} (1-x)^{-\beta} \nu(x). \end{aligned} \quad (16)$$

Условие (10) относительно функции $(1-x)^{\alpha-1}u(x,0) = \varphi(x)$ приводит к интегральному уравнению

$$(1-x)^{1-\alpha} B_1(x) \varphi(x) - \frac{\sqrt{\pi(1-x)}}{\Gamma(\alpha)} A_1(x) D_{x1}^{-\beta} \varphi(x) = f(x),$$

вообще говоря, третьего рода с правой частью $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(1-\beta)} A_1(x) D_{x1}^{-(1-\alpha)} (1-x)^{-\beta} \nu(x) - c_1(x)$.

Исследование и решение подобных уравнений представляет самостоятельную проблему [27,28] и мы в этой работе ее касаться не будем, отсылая читателей так же к работам Л. Г. Михайлова [29] и В. Б. Короткова [30,31]. Однако конкретизируя вид функциональных коэффициентов в условии (10), например, $B_1(x) = (1-x)^{\alpha-1}$, а $c_1(x), A_1(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$ - произвольные функции, получим уравнение Вольтерра второго рода, которое безусловно и однозначно разрешимо в требуемом для $\tau(x) = u(x,0)$ классе функций.

Вид выражения (16) подсказывает вариант нелокального условия, при котором для функции $\tau(x) = u(x,0)$ получается простое функциональное уравнение.

Рассмотрим задачу с нелокальным условием типа Бицадзе-Самарского

$$D_{x1}^{\beta} (1-x)^{-\frac{1}{2}} u[\Theta_1(x)] = B_1(x)u(x,0) + c_1(x). \quad (17)$$

Пусть для определенности $B_1(x) = (1-x)^{\alpha-1} b_1(x)$. Подставляя выражение (16) в условие (17), получим

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha)} (1-x)^{\alpha-1} \tau(x) + \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(1-\beta)} D_{x1}^{\beta} (1-x)^{-\frac{1}{2}} D_{x1}^{-(1-\alpha)} (1-x)^{-\beta} \nu(x) = (1-x)^{\alpha-1} b_1(x) \tau(x) + c_1(x).$$

Воспользуемся известным тождеством [32]

$$D_{x1}^{\alpha} (1-x)^{\alpha-\beta} D_{x1}^{-\beta} \varphi(x) = (1-x)^{-\beta} D_{x1}^{\alpha-\beta} (1-x)^{\alpha} \varphi(x), \quad (18)$$

справедливым для $\alpha \in (0,1]$, $\beta > 0$, $\alpha - \beta > -1$, причем при $\alpha < \beta$ - для функций $\varphi(x) \in L(0,1)$, и вычислим композицию операторов

$$D_{x1}^{\beta} (1-x)^{-\frac{1}{2}} D_{x1}^{-(1-\alpha)} (1-x)^{-\beta} \nu(x) = (1-x)^{\alpha-1} D_{x1}^{\frac{1}{2}} \nu(x).$$

Тогда, для функции $\tau(x)$ получаем уравнение

$$\left[b_1(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha)} \right] \tau(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(1-\beta)} D_{x1}^{\frac{1}{2}} \nu(x) - (1-x)^{1-\alpha} c_1(x),$$

из которого она однозначно определяется при условии, что $b_1(x) \neq \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha)}$ для $x \in [0,1]$. Очевидно, если функциональные коэффициенты $b_1(x)$ и $c_1(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, то функция $\tau(x)$ будет принадлежать этому же классу.

Осталось показать, что нелокальное условие (17) приемлемо и в особом случае уравнения

(1) при $a = 1$.

Действительно, тогда $\beta = \frac{1}{2}$, $\alpha = 0$. Используя выражение (11) в условии

$$D_{x1}^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}u[\Theta_1(x)] = (1-x)^{-1}b_1(x)u(x,0) + c_1(x),$$

получим выражение для $\tau(x) = u(x,0)$ в виде

$$\tau(x) = \frac{1}{b_1(x)} \left[\frac{1}{2} D_{x1}^{\frac{1}{2}} v(x) - (1-x)c_1(x) \right].$$

Требования $b_1(x) \neq 0$, $b_1(x)$, $c_1(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$ гарантируют принадлежность функции $\tau(x)$ тому же классу.

Аналогичное (17) условие, связывающее значения $u[\Theta_0(x)]$ искомой функции $u(x,y)$ на другой характеристике с ее значениями на линии вырождения

$$D_{0x}^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} u[\Theta_0(x)] = B_0(x)u(x,0) + c_0(x), \quad (19)$$

приводит к дифференциальному уравнению дробного порядка [33,34] относительно функции $\tau(x) = u(x,0)$:

$$D_{0x}^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \tau(x) - B_0(x)\tau(x) = f(x), \quad (20)$$

где $f(x) = c_0(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} D_{0x}^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} D_{0x}^{\frac{1}{2}} v(x)$. Его решение в классе $\mathbf{I}_{0x}^{\frac{1}{2}}(L_1)$ — функций, представи-

мых дробным интегралом порядка $\frac{1}{2}$, будет единственным. В самом деле, в этом случае суще-

ствует такая функция $\varphi(x) \in L_1(0,1)$, что $x^{-\frac{1}{2}} \tau(x) = D_{0x}^{-\frac{1}{2}} \varphi$ и уравнение (20), в силу тождества

$$D_{0x}^{\frac{1}{2}} D_{0x}^{-\frac{1}{2}} \varphi = \varphi(x), \quad (21)$$

справедливого для $\varphi(x) \in L(0,1)$, редуцируется к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\varphi(x) - \sqrt{x} D_{0x}^{\frac{1}{2}} \varphi(x) = f(x).$$

Однако это и означает, что решение краевой задачи с условиями (6) и (19) единственным не будет, если $\tau(x)$ ищется в классе функций $C[0,1] \cap C^2(0,1)$.

Действительно, пусть $x^{-\frac{1}{2}} \tau(x) \in \mathbf{C}_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}[0,1]$, где $\mathbf{C}_{\beta}^{\alpha}[0,1]$ — введенный в работе [35] класс

функций $\varphi(x)$, представимых в виде $\varphi(x) = x^{-\beta} \varphi_0(x)$, где $\varphi_0(x) \in C[0,1]$, а $D_{0x}^{\alpha} \varphi \in C(0,1)$, $\alpha \in (0,1)$. В этом случае справедливо тождество [32]

$$D_{0x}^{\frac{1}{2}} D_{0x}^{\frac{1}{2}} \varphi = \varphi(x) - \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(D_{0x}^{\frac{1}{2}} \varphi \right)_{x \rightarrow +0}, \quad (22)$$

вообще говоря, верное для любых функций $\varphi(x) \in L(0,1)$, если $D_{0x}^{\frac{1}{2}} \varphi$ принадлежит классу $AC[0,1]$ абсолютно непрерывных функций [11].

Применяя оператор $D_{0x}^{\frac{1}{2}}$ к левой и правой частям равенства (20) и используя тождество (22), после несложных вычислений получим интегральное уравнение второго рода:

$$\tau(x) - \sqrt{x} D_{0x}^{\frac{1}{2}} B_0(x) \tau(x) = \tau(0) + \sqrt{x} D_{0x}^{\frac{1}{2}} f(x),$$

решение которого определяется с точностью до произвольной константы $\tau(0)$.

В связи с возникающей здесь проблемой единственности сделаем следующее замечание.

Если вместо условия (19) с дробной производной использовать аналогичное условие в интегральной форме

$$A_0(x)u[\Theta_0(x)] = D_{0x}^{-\frac{1}{2}} B_0(x)u(x,0) + c_0(x), \quad (23)$$

то при $A_0(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ для определения неизвестной функции $u(x,0) = \tau(x)$ сразу получим интегральное уравнение второго рода

$$\tau(x) - \sqrt{x} D_{0x}^{-\frac{1}{2}} B_0(x) \tau(x) = \sqrt{x} \left[c_0(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} D_{0x}^{-\frac{1}{2}} \nu(x) \right],$$

которое однозначно разрешимо в требуемых классах функций. С другой стороны, нелокальное условие (19) является следствием условия (23) при $A_0(x) = x^{-\frac{1}{2}}$. Обратное же – не верно.

Некоторые существенно нелокальные краевые задачи для уравнения (1) при $a = 1$. Рассмотрим здесь задачи с двумя нелокальными условиями типа Бицадзе—Самарского

$$\begin{cases} A_0(x)u[\Theta_0(x)] = B_0(x)u(x,0) + C_0(x) \lim_{y \rightarrow +0} u_y(x,y) + c_0(x); \\ A_1(x)u[\Theta_1(x)] = B_1(x)u(x,0) + C_1(x) \lim_{y \rightarrow +0} u_y(x,y) + c_1(x), \end{cases} \quad (24)$$

где $A_i(x)$, $B_i(x)$, $C_i(x)$ могут быть функциями от x , некоторыми операторами, определенными на множестве функций из класса гладкости искомого решения, а $c_i(x)$ – известные функции, $i = 0,1$.

Нетрудно показать существование единственного решения краевой задачи (24) для уравнения (1) в некоторых специальных случаях.

Задача 1. Найти регулярное в области Ω решение задачи (24) для уравнения (1) при $a = 1$, $A_0(x) = B_0(x)$.

Подставляя найденные в (11) и (14) значения в равенства (24) и обозначая $u(x,0) = \tau(x)$, $\lim_{y \rightarrow +0} u_y(x,y) = \nu(x)$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_0(x)\nu(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} A_0(x) D_{0x}^{-\frac{1}{2}} \nu(x) = -c_0(x); \\ B_1 \tau(x) = A_1(x) \left[\tau(1) + \frac{1}{2} D_{x1}^{-1} (1-x)^{-\frac{1}{2}} \nu(x) \right] - C_1(x)\nu(x) - c_1(x). \end{cases} \quad (25)$$

Выделим те случаи, когда решения этой системы уравнений могут быть найдены в замкнутой форме.

Сразу заметим, что если $A_0(x) \neq 0$ для $x \in [0,1]$, то первое уравнение системы (19) может оказаться интегральным уравнением третьего рода:

$$\omega(x)\nu(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} D_{0x}^{-\frac{1}{2}} \nu(x) = f(x), \quad (26)$$

где $\omega(x) = C_0(x)/A_0(x)$, $f(x) = -c_0(x)/A_0(x)$.

Если $C_0(x) \neq 0$ для $x \in [0,1]$, то вместо (26) получим интегральное уравнение второго рода:

$$\nu(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lambda(x) D_{0x}^{-\frac{1}{2}} \nu(x) = f(x), \quad (27)$$

где $\lambda(x) = \frac{A_0(x)}{C_0(x)}$, $f(x) = -\frac{c_0(x)}{C_0(x)}$. Нетрудно найти его решение методом Пикара [36] в требуемых классах функций.

После того как функция $\nu(x)$ определена, $\tau(x)$ немедленно находится из второго уравнения системы (25) при условиях $A_1(1) \neq B_1(1)$, а $B_1(x) \neq 0$ для $x \in [0,1]$:

$$\tau(x) = \frac{1}{B_1(x)} \left\{ A_1(x) \left[\frac{C_1(1)\nu(1) + c_1(1)}{A_1(1) - B_1(1)} + \frac{1}{2} D_{x1}^{-1} (1-x)^{-\frac{1}{2}} \nu(x) \right] - C_1(x)\nu(x) - c_1(x) \right\}. \quad (28)$$

Справедлива теорема.

Теорема 1. Пусть $A_0(x) = B_0(x)$, $A_0(x)$, $C_0(x)$, $A_1(x)$, $B_1(x)$, $C_1(x)$, $c_0(x)$, $c_1(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, причем $B_1(x) \neq 0$, $x \in [0,1]$ и $A_1(1) \neq B_1(1)$. Тогда единственное решение $u(x,y)$ в классе функций (7) задачи с условиями (24) существует и определяется формулой (4) решения задачи Коши, где $\nu(x)$ – решение интегрального уравнения (27), а $\tau(x)$ – определена в формуле (28).

Заметим, что в одном частном случае, когда $A_0(x) = \lambda C_0(x)$, уравнение является интегральным уравнением Абеля второго рода [11],

$$\nu(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lambda D_{0x}^{-\frac{1}{2}} \nu(x) = f(x). \quad (29)$$

Его решение может быть выписано в терминах функции типа Миттаг—Леффлера [37, 38]

$$E_{\alpha,\beta}(z) \equiv E_{\alpha}(z;\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha, \beta > 0),$$

для которой в работе принято обозначение $e_{\alpha}^{\beta}(z)$, согласованное с обозначением функций

$$e_{\alpha,\mu}^{\beta,\delta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta) \Gamma(\delta - \mu k)} \quad \text{типа Райта [39].}$$

Отметим, что решение интегрального уравнения с дробным интегралом $D_{0x}^{-\alpha}$ при $\alpha = \frac{1}{2}$ было известно еще Лиувиллю [40] и выражалось в элементарных функциях. В общем случае при $\alpha \in (0,1]$ резольвента подобного интегрального уравнения порождает интегральный оператор, который можно рассматривать как одно из обобщений оператора дробного интегрирования Римана-Лиувилля [41]

$$E_{ax;\lambda}^{-\alpha,\sigma} f = \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} e_{\sigma}^{\alpha} [\lambda(x-t)^{\sigma}] f(t) dt, \quad x > a, \quad (30)$$

где λ, α, σ – вообще говоря, могут быть комплексными параметрами: $\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \sigma > 0$. Действительно, $E_{ax;0}^{-\alpha,\sigma} f = D_{ax}^{-\alpha} f$.

Таким образом, из уравнения (29) для неизвестной функции $\nu(x)$ в терминах оператора (30) получим представление

$$\nu(x) = f(x) + \lambda_1 E_{0x;\lambda_1}^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} f(x),$$

где $\lambda_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lambda$.

Как было отмечено выше, наличие дробных производных и (или) интегралов в нелокальных условиях позволяет привести пример краевой задачи, решение которой сводится к решению системы функциональных уравнений.

Задача 2. Для уравнения (1) при $a = 1$ в области Ω найти регулярное решение задачи

$$\begin{cases} D_{0x}^{\frac{1}{2}} u[\Theta_0(x)] = D_{0x}^{\frac{1}{2}} u(x,0) + C_0(x) \lim_{y \rightarrow +0} u_y(x,y) + c_0(x), \\ \sqrt{1-x} \frac{d}{dx} u[\Theta_1(x)] = B_1(x) u(x,0) + C_1(x) \lim_{y \rightarrow +0} u_y(x,y) + c_1(x). \end{cases} \quad (31)$$

Подставляя найденные в (11) и (14) значения в равенства (31) и обозначая $u(x,0) = \tau(x)$, $\lim_{y \rightarrow +0} u_y(x,y) = \nu(x)$, после несложных преобразований получим выражение для $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\nu(x) = \frac{c_0(x)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} - C_0(x)}; \quad (32)$$

$$\tau(x) = \frac{1}{B_1(x)} \left[\frac{C_1(x) + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} - C_0(x)} c_0(x) - c_1(x) \right]. \quad (33)$$

Справедливо утверждение.

Теорема 2. Пусть $B_1(x)$, $C_1(x)$, $c_0(x)$, $c_1(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, причем $C_0(x) \neq \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $B_1(x) \neq 0$, $x \in [0,1]$. Тогда решение задачи с условиями (31) в классе функций (7) может быть найдено в виде (4) решения задачи Коши, где $\tau(x)$ и $\nu(x)$ определяются равенствами (32) и (33).

В последние годы в нелокальных краевых условиях интенсивно используются различные модификации и обобщения интегро-дифференциального оператора Римана-Лиувилля, именно, – операторы Эрдейи-Кобера, операторы Сайго и др. Отметим здесь работы М. Сайго, А.А. Килбаса, О.А. Репина [42-44] и их учеников [24, 25, 45-48]. В работах [49, 50] в нелокальных условиях для систем вырождающихся гиперболических уравнений используются обобщения вышеперечисленных операторов на матричный порядок.

Рассмотрим следующий вариант задачи 2, содержащий в нелокальном условии оператор $E_{ax;\lambda}^{-\alpha,\sigma}$.

Задача 3. Для уравнения (1) при $a = 1$ в области Ω найти регулярное решение задачи

$$\begin{cases} E_{0x;\lambda}^{\frac{1}{2}-\alpha,\alpha} u[\Theta_0(x)] = B_0(x)u(x,0) - \lim_{y \rightarrow +0} u_y(x,y) + c_0(x); \\ 2\sqrt{1-x} \frac{d}{dx} u[\Theta_1(x)] = B_1(x)u(x,0) - \lim_{y \rightarrow +0} u_y(x,y) + c_1(x). \end{cases} \quad (34)$$

Приведем некоторые свойства оператора $E_{ax;\lambda}^{-\alpha,\sigma}$ [51].

Теорема 3. Пусть $f(x) \in L(a,b)$, $\alpha, \beta, \sigma > 0$, $\lambda \in C$. Тогда

$$E_{ax;\lambda}^{-\alpha,\sigma} E_{ax;\lambda}^{-\beta,\sigma} f = E_{ax;\lambda}^{-\beta,\sigma} E_{ax;\lambda}^{-\alpha,\sigma} f. \quad (35)$$

Доказательство. С учетом определения (30) запишем левую часть равенства (35):

$$E_{ax;\lambda}^{-\alpha,\sigma} E_{ax;\lambda}^{-\beta,\sigma} f = \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} e_\sigma^\alpha [\lambda(x-t)^\sigma] \int_a^t (t-s)^{\beta-1} e_\sigma^\beta [\lambda(x-t)^\sigma] f(s) ds dt. \text{ Меняя порядок инте-}$$

грирования и выполняя замену переменных $t = s + (x-s)z$ во внутреннем интеграле, получим

$$\begin{aligned} & \int_a^x f(s) ds \int_s^x (x-t)^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} e_\sigma^\alpha [\lambda(x-t)^\sigma] e_\sigma^\beta [\lambda(t-s)^\sigma] dt = \\ & = \int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds \int_0^1 (1-z)^{\alpha-1} z^{\beta-1} e_\sigma^\alpha [\lambda(x-s)^\sigma (1-z)^\sigma] e_\sigma^\beta [\lambda(x-s)^\sigma z^\sigma] dz. \end{aligned} \quad (36)$$

Для правой части равенства (35)

$$\begin{aligned} E_{ax;\lambda}^{-\beta,\sigma} E_{ax;\lambda}^{-\alpha,\sigma} f &= \int_a^x (x-t)^{\beta-1} e_\sigma^\beta [\lambda(x-t)^\sigma] \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} e_\sigma^\alpha [\lambda(t-s)^\sigma] f(s) ds dt = \\ &= \int_a^x f(s) ds \int_s^x (x-t)^{\beta-1} (t-s)^{\alpha-1} e_\sigma^\beta [\lambda(x-t)^\sigma] e_\sigma^\alpha [\lambda(t-s)^\sigma] dt \end{aligned}$$

после замены переменных $t = x - (x-s)z$ получаем выражение, совпадающее с (36).

Замечание. Теорема 3, по существу, констатирует коммутативность интегральных операторов (30). Выражение, возникающее во внутреннем интеграле (35), можно упростить, пользуясь представлением функции Миттаг-Леффлера в виде ряда.

$$\int_0^1 z^{\alpha-1} e_\sigma^\alpha [\lambda(x-s)^\sigma z^\sigma] (1-z)^{\beta-1} e_\sigma^\beta [\lambda(x-s)^\sigma (1-z)^\sigma] dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{m+n} (x-s)^{\sigma(n+m)}}{\Gamma(\alpha+n\sigma)\Gamma(\beta+m\sigma)} \int_0^1 z^{n\sigma+\alpha-1} (1-z)^{m\sigma+\beta-1} dz = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+m} (x-s)^{\sigma(n+m)} B(n\sigma+\alpha, m\sigma+\beta)}{\Gamma(\alpha+n\sigma)\Gamma(\beta+m\sigma)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+m} (x-s)^{\sigma(n+m)}}{\Gamma(\alpha+\beta+(n+m)\sigma)}, \quad (37)
\end{aligned}$$

где использована возможность интегрирования под знаком суммы, определение бета-функции $B(p, q)$ и ее свойства. Очевидно, выражению (37) можно придать следующий вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k (x-s)^{k\sigma}}{\Gamma(\alpha+\beta+k\sigma)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\lambda^k (x-s)^{k\sigma}}{\Gamma(\alpha+\beta+k\sigma)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k[\lambda(x-s)^{\sigma}]^k}{\Gamma(k\sigma+\alpha+\beta)}.$$

Теорема 4. Пусть $f(x) \in L(a, b)$; $\alpha, \beta, \gamma, \sigma > 0$, $\lambda \in C$. Тогда

$$(E_{ax;\lambda}^{-\alpha,\sigma} E_{ax;\lambda}^{-\beta,\sigma}) E_{ax;\lambda}^{-\gamma,\sigma} f = E_{ax;\lambda}^{-\alpha,\sigma} (E_{ax;\lambda}^{-\beta,\sigma} E_{ax;\lambda}^{-\gamma,\sigma}) f.$$

Утверждение теоремы очевидно. Выкладки опускаем ввиду громоздкого вида композиции трех операторов.

Как обычно, тождественный оператор на множестве функций $f(x) \in L(a, b)$ будем обозначать I .

Задача построения оператора, обратного к $E_{ax;\lambda}^{-\alpha,\sigma}$, сводится к необходимости обращения интегрального уравнения Вольтерра первого рода $E_{ax;\lambda}^{-\alpha,\sigma} f = \varphi(x)$.

Лемма. Пусть $f(x) \in L(a, b)$; $\alpha > 0, \lambda \in C$. Тогда справедливо тождество

$$E_{ax;\lambda}^{-\alpha,\alpha} f = (I - \lambda D_{ax}^{-\alpha})^{-1} D_{ax}^{-\alpha} f. \quad (38)$$

Доказательство. Решение интегрального уравнения Абеля второго рода $\varphi(x) - \lambda D_{ax}^{-\alpha} \varphi = f(x)$ имеет вид $\varphi(x) = f(x) + \lambda E_{ax;\lambda}^{-\alpha,\alpha} f$. Подставляя это решение в исходное интегральное уравнение, получим тождество

$$\lambda E_{ax;\lambda}^{-\alpha,\alpha} f = \lambda D_{ax}^{-\alpha} [f(x) + \lambda E_{ax;\lambda}^{-\alpha,\alpha} f],$$

откуда $(I - \lambda D_{ax}^{-\alpha}) E_{ax;\lambda}^{-\alpha,\alpha} f = D_{ax}^{-\alpha} f$, $E_{ax;\lambda}^{-\alpha,\alpha} f = (I - \lambda D_{ax}^{-\alpha})^{-1} D_{ax}^{-\alpha} f(x)$.

Существование оператора $(I - \lambda D_{ax}^{-\alpha})^{-1}$ гарантировано разрешимостью уравнения Вольтерра второго рода с ядром Абеля [37], что и доказывает лемму.

Теорема 5. Пусть $u(x) \in AC^n[a, b]$ [11]. Тогда обратный оператор

$$(E_{ax;\lambda}^{-\alpha,\alpha})^{-1} u(x) = (D_{ax}^{\alpha} - \lambda I) u(x). \quad (39)$$

Доказательство. Записывая уравнение $E_{ax;\lambda}^{-\alpha,\alpha} f = u(x)$ с помощью формулы (38) и обращая операторы, получим $f(x) = D_{ax}^{\alpha} (I - \lambda D_{ax}^{-\alpha}) u$, откуда $f(x) = (D_{ax}^{\alpha} - \lambda I) u(x)$.

Формальная проверка показывает, что оператор $(E_{ax;\lambda}^{-\alpha,\alpha})^{-1} f$ является левым обратным к оператору $E_{ax;\lambda}^{-\alpha,\alpha} f$ на функциях $f(x) \in L(a, b)$.

Действительно, с учетом формул (38) и (39) $(E_{ax;\lambda}^{-\alpha,\alpha})^{-1} E_{ax;\lambda}^{-\alpha,\alpha} = (D_{ax}^{\alpha} - \lambda I) (I - \lambda D_{ax}^{-\alpha})^{-1} \times$
 $\times D_{ax}^{-\alpha} f = D_{ax}^{\alpha} (I - \lambda D_{ax}^{-\alpha}) (I - \lambda D_{ax}^{-\alpha})^{-1} D_{ax}^{-\alpha} f = D_{ax}^{\alpha} D_{ax}^{-\alpha} f = f(x)$.

С другой стороны, $(E_{ax;\lambda}^{-\alpha,\alpha}) (E_{ax;\lambda}^{-\alpha,\alpha})^{-1} f = f(x)$ лишь для функций, представимых левосторонним дробным интегралом порядка α от суммируемой функции. Действительно, если $f(x) \in I_{ax}^{\alpha}(L_p)$, то $D_{ax}^{-\alpha} D_{ax}^{\alpha} f = f(x)$ и тогда

$$\begin{aligned}
(I - \lambda D_{ax}^{-\alpha})^{-1} D_{ax}^{-\alpha} (D_{ax}^{\alpha} - \lambda I) f(x) &= (I - \lambda D_{ax}^{-\alpha})^{-1} (D_{ax}^{-\alpha} D_{ax}^{\alpha} f - \lambda D_{ax}^{-\alpha} f) = \\
&= (I - \lambda D_{ax}^{-\alpha})^{-1} (I - \lambda D_{ax}^{-\alpha}) f(x) = f(x).
\end{aligned}$$

Отметим еще некоторые композиционные тождества оператора $E_{ax;\lambda}^{-\alpha,\sigma}$ с дробными

интегралами и производными Римана-Лиувилля [52].

1. Пусть $f(x) \in L(a, b)$; $\alpha, \beta, \sigma > 0, \lambda \in C$. Тогда

$$D_{ax}^{-\alpha} E_{ax;\lambda}^{-\beta,\sigma} f = E_{ax;\lambda}^{-\beta,\sigma} D_{ax}^{-\alpha} f = E_{ax;\lambda}^{-(\alpha+\beta),\sigma} f. \quad (40)$$

2. В условиях пункта 1 при $\gamma > 0$

$$D_{ax}^{-\alpha} E_{ax;\lambda}^{-\beta,\sigma} D_{ax}^{-\gamma} f = E_{ax;\lambda}^{-(\alpha+\beta+\gamma),\sigma} f. \quad (41)$$

3. $D_{ax}^{\alpha} E_{ax;\lambda}^{-\alpha,\sigma} f = \frac{d}{dx} E_{ax;\lambda}^{-1,\alpha} f$ выполняется для любых $f(x) \in L(a, b)$; $\alpha, \sigma > 0, \lambda \in C$.

Вернемся к задаче 3.

Из второго уравнения системы (34) сразу определяется функция

$$\tau(x) = -\frac{c_1(x)}{B_1(x)}, \quad (42)$$

подставляя которую в первое уравнение этой системы и используя некоторые свойства оператора $E_{ax;\lambda}^{-\alpha,\sigma}$, для функции $v(x)$ получим следующее интегральное уравнение:

$$v(x) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} E_{0x;\lambda}^{-\alpha,\alpha} v(x) = f(x),$$

где $f(x) = E_{0x;\lambda}^{\frac{1}{2}-\alpha,\alpha} \frac{c_1(x)}{B_1(x)} - \frac{B_0(x)}{B_1(x)} c_1(x) + c_0(x)$ — известная функция.

Его решение при $\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ имеет вид [38]:

$$v(x) = f(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} D_{0x}^{-\alpha} f(x). \quad (43)$$

Теорема 6. Пусть $\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, функции $B_0(x)$, $B_1(x)$, $c_0(x)$, $c_1(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, причем $B_1(x) \neq 0$, $x \in [0,1]$. Тогда единственное решение задачи с условиями (34) в классе функций (7) существует в форме решения задачи Коши (4), где $\tau(x)$ и $v(x)$ определяются равенствами (42) и (43).

Существенно нелокальные краевые задачи для одной системы уравнений влагопереноса в специальном случае. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0; \\ y^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (44)$$

где $\mathbf{u}(x, y) = (u_1; u_2)^T$ — вектор искомых функций, в области Ω , ограниченной отрезком $[0,1]$ линии ее параболического вырождения $y = 0$ и характеристиками $\xi = x - \frac{y^2}{2} = 0$ и $\eta = x + \frac{y^2}{2} = 1$.

Систему уравнений (44) можно записать в векторной форме:

$$y^2 \mathbf{u}_{xx} - \mathbf{u}_{yy} + A \mathbf{u}_x = 0, \quad (45)$$

где матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и является простейшим примером инволютивной матрицы [53].

Известно [54, 55], что для системы уравнений (45) с произвольной матрицей A , спектр которой $\Lambda(A) \in [-1, 1]$, корректна по Адамару задача Коши:

$$\mathbf{u}(x, 0) = \boldsymbol{\tau}(x); \quad (46)$$

$$\mathbf{u}_y(x, y) = \mathbf{v}(x), \quad (47)$$

и ее решение может быть найдено методом Римана [56, 57] в классе функций $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup (0, 1)) \cap C^2(\Omega)$, если вектор-функции $\boldsymbol{\tau}(x)$, $\mathbf{v}(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$. В нашем случае оно имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y) = & \frac{E + A}{2} \left[\boldsymbol{\tau} \left(x + \frac{y^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \int_{x - \frac{y^2}{2}}^{x + \frac{y^2}{2}} \frac{\mathbf{v}(s) ds}{\sqrt{x + \frac{y^2}{2} - s}} \right] + \\ & + \frac{E - A}{2} \left[\boldsymbol{\tau} \left(x - \frac{y^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \int_{x - \frac{y^2}{2}}^{x + \frac{y^2}{2}} \frac{\mathbf{v}(s) ds}{\sqrt{s - x + \frac{y^2}{2}}} \right]. \end{aligned} \quad (48)$$

Известно также, что если матрица A инволютивна, то задачи Коши–Гурса (вторые задачи Дарбу) для системы уравнений (45) поставлены некорректно в смысле отсутствия единственности решения, какая бы из двух характеристик, ограничивающих область Ω , ни была носителем данных Дарбу.

Первый пример такой системы, названной системой дифференциальных уравнений Бицадзе–Лыкова с инволютивной матрицей A специального вида, приведен в работе [58]. Далее в работе [59] для системы уравнений (45) с такой же матрицей A , а затем в [60, 61] и других работах этих же авторов (см. библиографический список в [61], а также в [52]) для системы уравнений с дифференциальным оператором более общего вида $y^{2m} \mathbf{u}_{xx} - \mathbf{u}_{yy} + mAy^{m-1} \mathbf{u}_x$ и произвольной инволютивной матрицей второго порядка рассматривались различные нелокальные аналоги задачи Коши–Гурса.

Рассмотрим в качестве примера простейший нелокальный аналог задачи Коши–Гурса для системы уравнений (44) с условием типа Бицадзе–Самарского:

$$A_i(x) \mathbf{u}[\Theta_i(x)] = B_i(x) \mathbf{u}(x, 0) + \mathbf{c}_i(x), \quad i = 0, 1, \quad (49)$$

где $A_i(x)$, $B_i(x)$ — известные функциональные $[2 \times 2]$ -матрицы; $\mathbf{c}_i(x)$ — заданные вектор-функции, а точки $\Theta_i(x)$ ($i = 0, 1$) определены выше.

Пусть требуется найти регулярное в области Ω решение системы уравнений (44), удовлетворяющее начальному условию (47) и условию (49) при $i = 0$.

Вычисляя значение функции $u(x, y)$ в точке $\Theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}; \sqrt{x} \right)$ по формуле (48) и обозначая вектор $\mathbf{u}(x, 0) = \boldsymbol{\tau}(x)$, из условия (49) получаем уравнение

$$\frac{1}{2} A(x) (E + A) \left[\boldsymbol{\tau}(x) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} D_{0x}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{v}(x) \right] + \frac{1}{2} A(x) (E - A) \left[\boldsymbol{\tau}(0) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} D_{0x}^{-1} x^{-\frac{1}{2}} \mathbf{v}(x) \right] = B_0(x) \boldsymbol{\tau}(x) + \mathbf{c}_0(x),$$

из которого вначале определяем вектор

$$\boldsymbol{\tau}(0) = [A_0(0) - B_0(0)]^{-1} \mathbf{c}_0(0),$$

а затем и неизвестную в решении задачи Коши (48) вектор-функцию

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}(x) = & [A_0(x)(E + A) - 2B_0(x)]^{-1} \left\{ 2\mathbf{c}_0(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} A_0(x)(E + A) D_{0x}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{v}(x) - \right. \\ & \left. - A_0(x)(E - A) \left[\boldsymbol{\tau}(0) + \frac{1}{2} D_{0x}^{-1} x^{-\frac{1}{2}} \mathbf{v}(x) \right] \right\}. \end{aligned}$$

В предположении существования обратных матриц для $A_0(0) - B_0(0)$ и $A(x)(E + A) - 2B(x)$ для всех $x \in [0, 1]$ вектор $\boldsymbol{\tau}(x)$ будет принадлежать классу функций $C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$, если $A_0(x)$, $B_0(x)$, $\mathbf{c}_0(x)$ и $\mathbf{v}(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$, а единственное решение (48) краевой задачи $\mathbf{u}(x, y)$ — классу функций (7).

Аналогично решается задача с условием (49) ($i=1$), связывающим значения вектор-функции $\mathbf{u}(x, y)$ на другой характеристике с ее значениями $\mathbf{u}(x, 0)$ на линии вырождения.

В указанной выше работе [61] был рассмотрен другой нелокальный вариант задачи Коши–Гурса с условием Бицадзе–Нахушева

$$A(x)\mathbf{u}[\Theta_0(x)] + B(x)\mathbf{u}[\Theta_1(x)] = H(x)\mathbf{u}(x, 0) + \mathbf{c}(x), \quad (50)$$

где по-прежнему $A(x)$, $B(x)$, $H(x)$ – известные функциональные $[2 \times 2]$ -матрицы; $\mathbf{c}(x) = (c_1(x); c_2(x))^T$ – заданная вектор-функция, $x \in [0, 1]$. Приведена теорема об условиях однозначной разрешимости этой задачи в требуемых классах функций в терминах обратимости некоторых числовых и функциональных матриц.

Отметим, что частным случаем задачи с условием (50) является вариант задачи Коши–Гурса, в которой на каждой характеристике задается лишь одна определенная компонента искомого вектора $\mathbf{u}(x, y)$.

Задача (Коши–Гурса). Найти регулярное в Ω решение системы уравнений (44) с начальными данными (47) и условиями

$$u_1[\Theta_0(x)] = \varphi(x), \quad u_2[\Theta_1(x)] = \psi(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (51)$$

Решение этой задачи для системы уравнений (44) в работе [60] не приводилось, а окончательные выражения для компонент вектора $\boldsymbol{\tau}(x)$ опубликованы в неполном и искаженном виде. Поэтому приведем здесь решение задачи полностью.

Вычислим по формуле (48) значения вектор-функции

$$\mathbf{u}[\Theta_0(x)] = \frac{1}{2}(E + A) \left[\boldsymbol{\tau}(x) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} D_{0x}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{v}(x) \right] + \frac{1}{2}(E - A) \left[\boldsymbol{\tau}(0) + \frac{1}{2} D_{0x}^{-1} x^{-\frac{1}{2}} \mathbf{v}(x) \right], \quad (52)$$

$$\mathbf{u}[\Theta_1(x)] = \frac{1}{2}(E + A) \left[\boldsymbol{\tau}(1) + \frac{1}{2} D_{x1}^{-1} (1-x)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{v}(x) \right] + \frac{1}{2}(E - A) \left[\boldsymbol{\tau}(x) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} D_{x1}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{v}(x) \right] \quad (53)$$

и с учетом вида матриц $E + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $E - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ выделим первую компоненту вектора $\mathbf{u}[\Theta_0(x)]$ и вторую – вектора $\mathbf{u}[\Theta_1(x)]$. Используя условие (51), для определения неизвестных функций $\tau_1(x)$ и $\tau_2(x)$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} \tau_1(x) + \tau_2(x) = 2\varphi(x) - \tau_1(0) + \tau_2(0) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} D_{0x}^{-\frac{1}{2}} (v_1(x) + v_2(x)) - \frac{1}{2} D_{0x}^{-1} x^{-\frac{1}{2}} (v_1(x) - v_2(x)); \\ -\tau_1(x) + \tau_2(x) = 2\psi(x) - \tau_1(1) - \tau_2(1) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} D_{x1}^{-\frac{1}{2}} (v_1(x) - v_2(x)) - \frac{1}{2} D_{x1}^{-1} (1-x)^{-\frac{1}{2}} (v_1(x) + v_2(x)), \end{cases} \quad (54)$$

однозначная разрешимость которой гарантируется существованием обратной матрицы

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$. Однако правые части системы уравнений (54) содержат пока неизвестные

постоянные $\tau_1(1)$ и $\tau_2(0)$, в то время как по непрерывности в силу условий (51) $u_1[\Theta_0(0)] = \tau_1(0) = \varphi(0)$, а $u_2[\Theta_1(1)] = \tau_2(1) = \psi(1)$.

По формулам (52) и (53) вычислим дополнительно значения $\mathbf{u}[\Theta_0(1)]$ и $\mathbf{u}[\Theta_1(0)]$. Тогда для определения величин $\tau_1(1)$ и $\tau_2(0)$ получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \tau_1(1) + \tau_2(0) = 2\varphi(1) - \varphi(0) - \psi(1) - \frac{1}{2} D_{01}^{-1} (1-x)^{-\frac{1}{2}} (v_1(x) + v_2(x)) - \frac{1}{2} D_{01}^{-1} x^{-\frac{1}{2}} (v_1(x) - v_2(x)); \\ \tau_1(1) + \tau_2(0) = 2\psi(0) - \psi(1) + \varphi(0) - \frac{1}{2} D_{01}^{-1} (1-x)^{-\frac{1}{2}} (v_1(x) + v_2(x)) + \frac{1}{2} D_{01}^{-1} x^{-\frac{1}{2}} (v_1(x) - v_2(x)), \end{cases}$$

однозначная разрешимость которой также очевидна, и

$$\tau_1(1) = \varphi(1) + \psi(0) - \psi(1) - \frac{1}{2} D_{01}^{-1} (1-x)^{-\frac{1}{2}} (v_1(x) + v_2(x));$$

$$\tau_2(0) = \psi(0) + \varphi(0) - \varphi(1) + \frac{1}{2} D_{01}^{-1} x^{-\frac{1}{2}} (v_1(x) - v_2(x)).$$

Окончательно из системы уравнений (54) после несложных вычислений получим

$$\begin{aligned}\tau_1(x) = \varphi(x) - \psi(x) + \psi(0) - \frac{1}{4} D_{0x}^{-1} \frac{v_1 + v_2}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{4} D_{x1}^{-1} \frac{v_1 - v_2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{\pi}}{4} D_{0x}^{-\frac{1}{2}} (v_1 + v_2) - \\ - \frac{\sqrt{\pi}}{4} D_{x1}^{-\frac{1}{2}} (v_1 - v_2); \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned}\tau_2(x) = \varphi(x) - \varphi(1) + \psi(x) + \frac{1}{4} D_{0x}^{-1} \frac{v_1 + v_2}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{4} D_{x1}^{-1} \frac{v_1 - v_2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{\pi}}{4} D_{0x}^{-\frac{1}{2}} (v_1 + v_2) + \\ + \frac{\sqrt{\pi}}{4} D_{x1}^{-\frac{1}{2}} (v_1 - v_2). \end{aligned} \quad (56)$$

Полученный результат отражает теорема.

Теорема 7. Пусть вектор-функции $v(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$. Тогда единственное в области Ω решение системы уравнений (44) в классе функций (7) с начальными данными (47) и условиями на характеристиках (51) определяется по формуле решения задачи Коши (48), в которой компоненты вектора $\tau(x) = (\tau_1; \tau_2)^T$, в свою очередь, заданы формулами (55) и (56).

Развивая идею постановки нелокальных условий как средства устранения неединственности решения задач Коши–Гурса, в работе [61] для системы уравнений типа Бицадзе–Лыкова с произвольной инволютивной матрицей был приведен контрпример по-компонентного аналога задачи Коши–Гурса с условиями

$$\begin{aligned}u_1[\Theta_0(x)] &= a_2 u_2(x, 0) + c_1(x); \\ u_2[\Theta_1(x)] &= a_1 u_1(x, 0) + c_2(x), \end{aligned} \quad (57)$$

где $a_1, a_2 \in R$ – заданные числовые параметры; $c_1(x)$ и $c_2(x)$ – известные функции, $x \in [0,1]$. Было показано, что при $a_1 = a_2 = 1$ решение задачи с условиями (47) и (57) определяется с точностью до произвольных констант, т.е. неединственно. Однако эта задача не была до конца исследована. В частности, оставался открытым вопрос, при каких значениях параметров a_1 и a_2 , кроме $a_1 = a_2 = 1$, наблюдается эффект неединственности, а в каком случае задача с условиями (57) корректна.

Дадим здесь ответ на эти вопросы.

Повторяя, по существу, решение предыдущей задачи и подставляя компоненты $u_1[\Theta_0(x)]$ и $u_2[\Theta_1(x)]$ векторов (52) и (54) в условия (57), для определения неизвестных функций $\tau_1(x)$ и $\tau_2(x)$ получаем такую систему функциональных уравнений:

$$\begin{cases} \tau_1(x) + (1 - 2a_2)\tau_2(x) = 2c_1(x) - \frac{1}{2} D_{0x}^{-1} \frac{v_1 - v_2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} D_{0x}^{-\frac{1}{2}} (v_1 + v_2) - \tau_1(0) + \tau_2(0); \\ -(1 + 2a_1)\tau_1(x) + \tau_2(x) = 2c_2(x) - \frac{1}{2} D_{x1}^{-1} \frac{v_1 + v_2}{\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} D_{x1}^{-\frac{1}{2}} (v_1 - v_2) - \tau_1(1) - \tau_2(1). \end{cases} \quad (58)$$

Необходимым условием ее однозначной разрешимости является требование $\Delta = 2(1 + a_1 - a_2 - 2a_1a_2) \neq 0$. Однако это условие еще не является достаточным: в задаче остаются неопределенными $\tau_1(0)$, $\tau_1(1)$, $\tau_2(0)$ и $\tau_2(1)$.

Вычисляя значения $u_1[\Theta_0(0)]$, $u_1[\Theta_0(1)]$, $u_2[\Theta_1(0)]$ и $u_2[\Theta_1(1)]$ по формулам (52) и (53) и используя условия (57) для определения перечисленных выше констант, получили систему линейных уравнений с главным определителем

$$\Delta_0 = 2a_1^2a_2^2 - a_1^2a_2 + a_1a_2^2 - 3a_1a_2 + a_1 - a_2 + 1.$$

Замечаем, что

$$\Delta_0 = (2a_1a_2 - a_1 + a_2 - 1)(a_1a_2 - 1) = \frac{1}{2} \Delta(1 - a_1a_2), \quad (59)$$

где Δ – главный определитель системы функциональных уравнений (58).

Нетрудно указать многообразие значений параметров a_1 и a_2 и изобразить его на параметрической плоскости, в каждой точке которого происходит нарушение единственности решения краевой задачи с условиями (57).

Таким образом, условие $\Delta_0 = (2a_1a_2 - a_1 + a_2 - 1)(a_1a_2 - 1) = 0$, равносильное двум условиям $a_2 = \frac{1}{a_1}$ или $a_2 = \frac{a_1 + 1}{2a_1 + 1}$, является достаточным условием некорректности задачи с условиями (57).

Теорема 8. Пусть функции $v(x), c_1(x), c_2(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$. Тогда единственное в области Ω решение системы уравнений (44) в классе функций (7) с начальными данными (47) и нелокальными условиями (57) при $\Delta_0 = (2a_1a_2 - a_1 + a_2 - 1)(a_1a_2 - 1) \neq 0$ определяется по формуле решения задачи Коши (48), в которой константы вектора $\tau(x) = (\tau_1; \tau_2)^T$ находятся из системы функциональных уравнений (58).

В заключение работы приведем пример существенно нелокальной краевой задачи для системы уравнений (44) с условиями типа Бицадзе–Самарского:

$$\begin{aligned} A(x)u[\Theta_0(x)] &= H_0(x)u(x,0) + K_0(x) \lim_{y \rightarrow +0} u(x,y) + c_0(x); \\ B(x)u[\Theta_1(x)] &= H_1(x)u(x,0) + K_1(x) \lim_{y \rightarrow +0} u(x,y) + c_1(x). \end{aligned} \quad (60)$$

Нетрудно показать, что при условии обратимости матриц $A(x)(E + A) - 2H_0(x)$ и $B(x)(E - A) - 2H_1(x)$ для всех $x \in [0,1]$ из системы уравнений легко исключить неизвестный в решении задачи Коши (48) вектор $\tau(x)$ и, тем самым, система уравнений (44) редуцируется относительно $v(x)$ к системе интегральных уравнений типа обобщенных уравнений Абеля, решение которой представляется весьма затруднительным.

Приведем наиболее простой пример краевой задачи с условиями вида (60), однозначную разрешимость которой можно показать в замкнутой форме.

Задача. Найти решение $u(x,y)$ системы уравнений (44) в классе функций (7) с условиями (60), где

$$\begin{aligned} A(x) &= A_0(x)(E + A) + 2B_0(x)(E - A)\sqrt{x} \frac{d}{dx}; \\ B(x) &= 2A_1(x)(E + A)\sqrt{1-x} \frac{d}{dx} + B_1(x)(E - A), \end{aligned} \quad (61)$$

а матрицы $H_0 = H_1 = K_0 = E$ и $K_1 = -E$.

Пусть в равенствах (61) $A_0(x) = B_0(x) = A_1(x) = B_1(x) = E$. Тогда для вектора $v(x)$ получим интегральное уравнение второго рода

$$-2v(x) + (E + A) \frac{\sqrt{\pi}}{2} D_{0x}^{-\frac{1}{2}} v(x) - (E - A) \frac{\sqrt{\pi}}{2} D_{x1}^{-\frac{1}{2}} v(x) = f(x), \quad (62)$$

где $f(x) = A(c_0(x) + c_1(x))$.

Используя далее известные свойства инволютивных и идемпотентных матриц [61] из уравнения (62) нетрудно получить два интегральных уравнения Вольтерра второго рода:

$$\begin{aligned} v_1^e(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} D_{0x}^{-\frac{1}{2}} v_1^e(x) &= \frac{1}{2} f_1^e(x); \\ v_2^e(x) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} D_{x1}^{-\frac{1}{2}} v_2^e(x) &= -\frac{1}{2} f_2^e(x), \end{aligned} \quad (63)$$

где через $\varphi_i^e(x)$ обозначены (как и в работе [61]) линейные комбинации компонент вектора φ , а именно, $\varphi_1^e = \varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi_2^e = \varphi_1 - \varphi_2$.

Определяя из системы интегральных уравнений (63) линейные комбинации компонент вектора $v(x)$, находим функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$, и тем самым вектор $v(x) = (v_1; v_2)$ определен.

Наконец для вектора $\tau(x)$ из тех же условий (60) получаем выражение

$$\tau(x) = A(c_0(x) - c_1(x)) - (E + A) \frac{\sqrt{\pi}}{2} D_{0x}^{-\frac{1}{2}} v(x) - (E - A) \frac{\sqrt{\pi}}{2} D_{x1}^{-\frac{1}{2}} v(x). \quad (64)$$

Очевидно, если $c_0(x), c_1(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$ то $v(x)$ и $\tau(x)$ будут принадлежать тому же классу функций. Можно сформулировать утверждение.

Теорема 9. Пусть выполнены все условия относительно вида матриц в (60), сформулированные при постановке задачи. Пусть $c_0(x), c_1(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$. Тогда единственное решение системы уравнений (44) в классе функций (7) существует в форме решения задачи Коши (48), где векторы $\mathbf{v}(x), \mathbf{\tau}(x)$ определяются в (63) и (64)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лыков А.В. Применение методов термодинамики необратимых процессов с исследованием тепло и массообмена // Инж.-физ. журн. 1965. Т.9. №3. С.287-304.
2. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа // Итоги науки 2. М:Изд-во АН СССР, 1959. 134 с.
3. Gellerstedt S. Sur une equation lineaire aux derivees partielles de type mixte // Arkiv Mat., Astr. och Fysik, №29. В 25 A. 1937. P. 1-23.
4. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 488 с.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. В 3 т. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.
6. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк. 1995. 301 с.
7. Нахушев А.М. О задаче Дарбу для гиперболических уравнений // ДАН СССР. 1970. Т. 195. №4. С. 776-779.
8. Нахушев А.М. О задаче Дарбу для вырождающихся гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. №1. С. 49-56.
9. Кальменов Т.Ш. Критерий единственности решения задачи Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. №1. С. 178-181.
10. Нахушев А.М. Критерий единственности решения задачи Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения влагопереноса // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. №9. С. 1643-1649.
11. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
12. Нахушев А.М. Об одном классе линейных краевых задач для гиперболического и смешанного типов уравнений второго порядка. Эльбрус. Нальчик, 1992. 155 с.
13. Нахушева Ф.Б. Об одной нелокальной краевой задаче для вырождающихся гиперболических уравнений // Классические и неклассические краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными, специальные функции, интегральные уравнения и их приложения: Тез. докл. Всесоюз. научн. конф-ции., Куйбышев, 1987. С. 106.
14. Нахушева Ф.Б. Задача со смещением для уравнения парабола-гиперболического типа // Мат. моделирование и краевые задачи. Тр. восьмой межвуз. конф. Часть 3. Самара: СамГТУ, 1998. С. 82-83.
15. Нахушева Ф.Б. Задача типа Бицадзе-Самарского для смешанного парабола-гиперболического уравнения // Мат. моделирование и краевые задачи. Тр. десятой межвуз. конф. Часть 3. Самара: СамГТУ, 2000. С. 116-119.
16. Нахушева В.А. Некоторые классы дифференциальных уравнений математических моделей нелокальных физических процессов. Нальчик: КБНЦ РАН, 2002. 102 с.
17. Кумыкова С.К. Задача с нелокальными условиями на характеристиках для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. №1. С. 81-90.
18. Кумыкова С.К., Бечелова К.Х. Краевая задача со смещением для уравнения Лыкова // Дифференц. уравнения. (матем. физика): Тез. докл. участн. Куйбыш. областн. межвуз. научн. совещания-семинара. Куйбышев: Пед. ин-т, 1984. С. 65-66.
19. Кумыкова С.К. Об одной задаче с нелокальными условиями на характеристиках для уравнения влагопереноса // Нелокальные задачи для уравнений в частных производных и их приложения к моделированию и автоматизации проектирования сложных систем. Сборник научн. трудов. Нальчик: КБГУ, 1986. С. 170-172.
20. Кумыкова С.К. Задача типа задачи Бицадзе-Самарского для смешанного гипербола-параболического уравнения // Мат. моделирование и краевые задачи. Тр. десятой межвуз. конф. Часть 3. Самара: СамГТУ, 2000. С. 91-94.
21. Джунисов А.Т. Единственность решения одной краевой задачи для уравнения гиперболического типа с сильным вырождением // Нелокальные задачи и их приложения к автоматизированным системам. Сб. научн. трудов. Нальчик: КБГУ, 1989. С. 96-103.
22. Ретин О.А. Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. Самара: Изд-во Саратов. ун-та, Самар. филиал, 1992. 162 с.
23. Ретин О.А. О задаче с оператором М. Сайго на характеристиках для вырождающегося гиперболического уравнения // Мат. моделирование и краевые задачи. Тр. шестой межвуз. конф. Часть 2. Самара: СамГТУ, 1996. С. 86-87.
24. Ретин О.А., Лоцилин А.Е. Аналог задачи Нахушева-Сайго для уравнения Бицадзе-Лыкова // Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. десятой межвуз. конф. Самара: СамГТУ, 2000. С. 146-149.
25. Ретин О.А., Ефимова С.В. Нелокальная задача для параболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2002. № 16. С. 10-14.
26. Сербина Л.И. Нелокальные математические модели процессов переноса в системах с фрактальной структурой. Нальчик: КБНЦ РАН, 2002. 144 с.
27. Нахушев А.М. Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральные уравнения Вольтерра третьего рода // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, №1. С. 100-111.
28. Бжиктапов Х.Г., Карасев И.М., Лесковский И.П., Нахушев А.М. Избранные вопросы дифференциальных и интегральных уравнений. Нальчик: КБГУ, 1972. 145 с.
29. Михайлов Л.Г. Интегральные уравнения с ядром, однородным степени -1. Душанбе: Дониш, 1966. 49 с.
30. Коротков В.Б. Об интегральных уравнениях первого и третьего рода // Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1978. С. 61-68.
31. Коротков В.Б. Об общих интегральных уравнениях третьего рода // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. №6. С. 1097-1105.

32. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и их применение. М.: Физматлит, 2003, 272 с.
33. *Джрбабян М.М., Нерсеян А.Б.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Известия АН АрССР, 1968. Т. 3. №1. С. 3-29.
34. *Tazali A.Z.-A.M.* Local existence theorems for ordinary differential equations of fractional order // Lect. Notes Math. 1982. Vol. 964. P. 652-665.
35. *Чадаев В.А.* Задача Коши в локальной и нелокальной постановках для квазилинейных уравнений дробного порядка // Известия КБНЦ РАН. Нальчик: КБНЦ РАН, 2002. №1(8). С. 123-127.
36. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. М.: ИИЛ, 1960. 299 с.
37. *Hille E., Tamarkin J.D.* On the theory of linear integral equation // Ann. Math. 1930. Vol. 31. P. 479-528.
38. *Джрбабян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.
39. *Псху А.В.* Решение краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка // Докл. Адыгейской (Черкесской) Международной академии наук. 2000. Т. 5. № 1. С. 45-53.
40. *Васильева А.Б., Тихонов Н.А.* Интегральные уравнения. М.: МГУ, 1989. 156 с.
41. *Огородников Е.Н.* О некоторых краевых задачах для системы уравнений типа Бицадзе-Лыкова с инволютивной матрицей // Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. десятой межвуз. конф-ции. Часть 3. Самара: СамГТУ, 2000. С. 119-126.
42. *Kilbas A.A., Repin O.A., Saigo M.* Solution in closed form of boundary value problem for degenerate equation of hyperbolic type // Kyugpook. Mathematical Journal. 1996. Vol. 36. №2. P. 261-273.
43. *Saigo M., Repin O.A., Kilbas A.A.* On a non local boundary value problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type // International Journal of Mathemat. and Statistical. 1996. Vol. 5. №1. P. 104-117.
44. *Репин О.А.* Смешанная задача для нагруженного уравнения Геллерстедта с оператором Сайго в краевом условии // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2000. № 9. С. 13-18.
45. *Гайсина Л.Р.* Аналог задачи Бицадзе-Самарского для гиперболического уравнения с двумя линиями вырождения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2001. № 12. С. 24-29.
46. *Ефимов А.В.* Нелокальная задача для уравнения смешанного типа с дробной производной // Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. тринадцатой межвуз. конф. Часть 3. Самара: СамГТУ, 2003. С. 60-66.
47. *Гайсина Л.Р.* Решение краевой задачи со смещением для обобщенного волнового уравнения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2004. № 26. С. 11-15.
48. *Ефимов А.В.* О краевых задачах с операторами М.Сайго для уравнения смешанного типа с дробной производной // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2004. № 26. С. 16-20.
49. *Андреев А.А., Огородников Е.Н.* Применение матричных интегродифференциальных операторов в постановке и решении нелокальных краевых задач для систем уравнений гиперболического типа // Вест. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2001. № 12. С. 45-53.
50. *Андреев А.А., Огородников Е.Н.* Некоторые краевые задачи с условием типа Бицадзе-Самарского для системы уравнений с оператором Бицадзе-Лыкова // Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. девятой межвуз. конф-ции. Часть 3. Самара: СамГТУ, 1999. С. 3-11.
51. *Огородников Е.Н., Арланова Е.Ю.* Об одном аналоге оператора дробного интегрирования, его свойствах и применении // Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. Всероссийской научной конф-ции. Часть 3. Самара: СамГТУ, 2004. С.170-175.
52. *Огородников Е.Н.* Корректность задачи Коши-Гурса для системы вырождающихся нагруженных гиперболических уравнений в некоторых специальных случаях и ее равносильность задачам с нелокальными краевыми условиями // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2004. № 26. С. 26-38.
53. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 567 с.
54. *Андреев А.А.* Об одном классе систем дифференциальных уравнений гиперболического типа // Дифференц. уравнения. Сб. трудов матем. Кафедр пединст-ов РСФСР. Вып. 16. Рязань: РГПИ, 1980. С. 3-5.
55. *Андреев А.А., Сеницкий А.Ю.* О задаче Коши для системы вырождающихся уравнений типа Лыкова // Неклассические дифференциальные уравнения в частных производных. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1988. С. 105-107.
56. *Андреев А.А.* О методе Римана для одной системы уравнений гиперболического типа с кратными характеристиками // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1981. С. 13-16.
57. *Андреев А.А.* Построение элементарных решений и решение задачи Коши для уравнений и систем уравнений гиперболического типа: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Куйбышев, 1981. 100 с.
58. *Андреев А.А., Огородников Е.Н.* О корректности задач Дарбу и Коши-Гурса для одной вырождающейся гиперболической системы // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды восьмой межвуз. конф-ции. Часть 3. Самара: СамГТУ, 1998. С. 3-7.
59. *Огородников Е.Н.* О корректности некоторых нелокальных краевых задач для системы уравнений Бицадзе-Лыкова с инволютивной матрицей // Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. девятой межвуз. конф-ции. Часть 3. Самара: СамГТУ, 1999. С. 97-102.
60. *Огородников Е.Н.* О некоторых краевых задачах для системы уравнений типа Бицадзе-Лыкова с инволютивной матрицей // Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. десятой межвуз. конф-ции. Часть 3. Самара: СамГТУ, 2000. С. 119-127.
61. *Андреев А.А., Огородников Е.Н.* Некоторые локальные и нелокальные аналоги задачи Коши-Гурса для системы уравнений типа Бицадзе-Лыкова с инволютивной матрицей // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2002. № 16. С. 19-35.

Поступила 14.01.2005 г.