Общероссийский математический портал

А. Г. Ольхин, Сравнительный анализ различных подходов к моделированию движения больших планет, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005, выпуск 34, 46–49

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu336>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 06:34:47

5. Начальные данные элементов орбит для численного интегрирования. В качестве источника использовался каталог Марсдена издания 1999 года.

6. Графики изменения элементов орбит: q - перигелийного расстояния (в астрономических единицах), e - эксцентриситета; i - наклонения (в градусах); π - долготы перигелия (в градусах). Графики построены на основании данных, выведенных с шагом 1 год.

Расчет эволюции произведен методом Эверхарта 27 порядка с шагом интегрирования 3 дня.

Следует отметить, что негравитационные силы в данном исследовании не учитывались, поэтому на основании имеющейся информации можно строить различные уточняющие физические модели для полного согласования теоретического прохождения кометы через перигелий с наблюдаемым.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беляев Н.А., Кресак Л., Питтхис Э.М., Пушкарев А.Н. Каталог короткопериодических комет. Братислава, 1986. 398 с.
2. Everhart E. Implicit single methods for integrating orbits // Celestial mechanics. 1974. №10. P.35-55.
3. Заусаев А.Ф., Заусаев А.А., Ольхин А.Г. Оценка точности метода Эверхарта при решении уравнений движения больших планет на интервале времени 10 000 лет // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2004. № 30. С.108-113.
4. Заусаев А.Ф., Заусаев А.А., Ольхин А.Г. Применение метода Эверхарта 31 порядка для решения уравнений движения больших планет // Труды ГАИШ. Т.LXXV. Тез. докл. Всеросс. научн. конф. ВАК-2004. М.: МГУ. С.209-210.
5. Standish E.M. JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE405/LE405 // Jet Prop Lab Technical Report. IOM 312.F-048. 1998. P.1-7.
6. Newhall X.X., Standish E.M., Williams Jr. and J.G. DE 102: a numerically integrated ephemeris of the Moon and planets spanning forty-four centuries // Astron.Astrophys. 1983. № 125. P.150-167.
7. Заусаев А.А. Исследование влияния релятивистских эффектов на движение короткопериодических комет // Труды ГАИШ. Т.LXXV. Тез. докл. Всеросс. научн. конф. ВАК-2004. М.: МГУ. С.226-227.
8. Заусаев А.А. Исследование вклада релятивистских эффектов в эволюцию короткопериодических комет // Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. Всерос. научн. конф. Ч.3. Самара: СамГТУ. 2004. С.116-119.

Поступила 16.12.2004 г.

УДК 521.1

А.Г. Ольхин

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАЗЛИЧНЫХ ПОДХОДОВ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ДВИЖЕНИЯ БОЛЬШИХ ПЛАНЕТ

Проведено сравнение нескольких видов уравнений движения больших планет и на основании данных радиолокационных наблюдений сделан вывод о применимости каждого из них. Описан метод, позволяющий повысить эффективность применения модели за счет снижения количества вычислений.

В настоящее время существует множество численных теорий описания движения больших планет. Они различаются между собой методами численного интегрирования, начальными данными и математической моделью. В данной работе рассматриваются различные математические модели, при этом учитывается, что численный метод, используемый для их реализации, удовлетворяет необходимым условиям по точности в пределах рассматриваемого периода времени. Критерием успешности теории является, прежде всего, то, насколько она хорошо согласуется с опытными данными. Данные наблюдений, учитываемые при создании современных численных теорий, включают в себя многочисленные оптические, радиолокационные, лазерные и другие виды наблюдений, причем число их измеряется десятками тысяч и постоянно пополняется. Понятно, что для такого большого числа наблюдений сравнительный анализ занимает значительное время. Однако это время можно сократить, если учесть тот факт, что не все наблюдения имеют одинаковую погрешность и полноту, а также то, что существуют теории, которые уже достаточно хорошо согласуются с данными наблюдений. Наилучших результатов, по нашему мнению, можно добиться комбинированием этих двух подходов. Наименьшей погрешностью обладают данные лазерных наблюдений – ошибка не превышает нескольких метров, однако они ограничены только одним объектом – Луной. Данные оптических наблюдений

есть для всех больших планет и на больших интервалах времени, чем для остальных видов наблюдений, однако погрешность определения расстояния для них составляет порядок нескольких сотен километров. Оптимальным вариантом для сформулированных в работе целей представляются радиолокационные наблюдения, которые, хотя и ограничены только внутренними планетами, имеют вполне достаточную точность: ошибка для них не превышает нескольких километров.

Данные по радиолокационным наблюдениям были взяты с сайта nasa.gov и дополнены данными российских радиолокационных наблюдений за 1960-1970 гг. Поправка (UT1-UTC) была взята из IERS Bulletin C.

Для определения времени прохождения сигнала был использован ниже следующий алгоритм.

1. Определяется положение наблюдателя в геоцентрических координатах на момент отправления сигнала по формулам (1)

$$R_c = \frac{R}{\sqrt{\cos^2 \varphi + (1-f)^2 \sin^2 \varphi}}, \quad R_s = \frac{R(1-f)^2}{\sqrt{\cos^2 \varphi + (1-f)^2 \sin^2 \varphi}}; \quad (1)$$

$$x = (R_c + h) \cos \varphi \cos(s + \lambda), \quad y = (R_c + h) \cos \varphi \sin(s + \lambda), \quad z = (R_s + h) \sin \varphi,$$

$$s = -6.2 \cdot 10^{-6} T^3 + 0.093104 T^2 + 67310.54841 + 8640184.812866 T + 3155760000.0 T, \quad (2)$$

где φ – широта пункта наблюдения; λ – долгота; h – высота; R – радиус земли; s – звездное время; f – величина, характеризующая степень сжатия фигуры Земли.

Затем эти координаты преобразуются к системе координат ICRF путем добавления прецессии и нутации и складываются с координатами Земли [1]. Таким образом, мы имеем координаты точки излучения сигнала на начальный момент времени.

2. Вычисляется положение планеты в начальный момент времени и время, за которое сигнал достигнет поверхности планеты. При этом топология и отличие формы планеты от шарообразной не учитывается.

3. Корректируется положение планеты с учетом времени распространения сигнала до тех пор, пока разница в положениях планеты на различных итерациях не станет меньше 1 км.

4. Аналогичным образом находится время распространения отраженного сигнала, только корректируется не только положение Земли, но и изменение координат приемника за счет ее вращения.

В качестве эталона для проверки данного метода сопоставления с радиолокационными данными было использовано сопоставление с эфемеридами DE405 как наиболее точными эфемеридами на сегодняшний момент. Результаты расчетов приведен в табл. 1. С учетом того, что не было учтены влияние топологии планет, релятивистские эффекты, а также множество других факторов, влияющих на распространение сигнала, можно сделать вывод, что метод, описанный выше, работоспособен для сопоставления эфемерид с радиолокационными данными.

Таблица 1

Сопоставление данных радиолокационных наблюдений с DE405

Ошибка	Меркурий	Венера	Марс
Максимальная	30.318691	29.881983	12.185003
Средняя	10.023226	10.754232	4.522305
Дисперсия	11.962527	12.437987	5.497008

Помимо сопоставления с радиолокационными данными, критерием адекватности математической модели может служить сопоставление с эфемеридами, в свою очередь, согласованными с большим набором разнообразных наблюдений. На сегодняшний день такими эфемеридами являются DE405, которые согласованы помимо радиолокационных, и с оптическими наблюдениями внешних планет, лазерными измерениями расстояний до Луны и измерениями с космических аппаратов.

Для каждой модели, рассмотренной выше, было произведено интегрирование и получен банк данных координат планет, который затем использовался для сопоставления с наблюдениями. Интегрирование проводилось с помощью метода Эверхарта 31 порядка [2]. Значения координат и скоростей на начало интегрирования

Система координат $\xi \eta \zeta$

ростей на начало интегрирования взяты из DE405 [3]. Так как мы опираемся на данные радиолокационных наблюдений, то необходимо иметь координаты Земли, в связи с чем в уравнениях движения Земля и Луна присутствуют как отдельные тела. При этом для получения достаточной точности оказалось необходимым для взаимодействия Луны и Земли учесть эффекты фигуры по формулам

$$\begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{bmatrix} = -\frac{k^2 m}{r^2} \left\{ \sum_{n=1}^{n_1} J_n \left(\frac{a}{r} \right)^n \begin{bmatrix} (n+1)P_n(\sin\varphi) \\ 0 \\ -\cos\theta \cdot P'_n(\sin\varphi) \end{bmatrix} + \sum_{n=1}^{n_2} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=1}^n \begin{bmatrix} -(n+1)P_n^m(\sin\varphi)[C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda] \\ m\sec\varphi P_n^m(\sin\varphi)[-C_{nm}\sin m\lambda + S_{nm}\cos m\lambda] \\ \cos\varphi P_n^{m'}(\sin\varphi)[C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda] \end{bmatrix} \right\}, \quad (3)$$

где ξ – вектор, направленный из центра масс тела, эффект фигуры для которого рассчитывается к центру масс другого тела; η – вектор, лежащий в плоскости, перпендикулярной ξ и направленный на восток; ζ – вектор перпендикулярный ξ и η направленный таким образом, чтобы образовать правостороннюю систему координат; φ и λ соответственно углы между этой системой координат и системой xuz (см. рисунок).

Рассмотрим несколько видов уравнений движения.

Уравнения движения в форме Брумберга [4]:

$$\ddot{x}_i = -\frac{k^2(m_0 + m_i)}{r_i^3} x_i + \sum_{j=1}^N k^2 m_j \left(\frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} - \frac{x_j}{r_j^3} \right) + \frac{k^2 m_0}{c^2} \left[\begin{aligned} &(4-2\alpha) \frac{k^2 m_0}{r_i^4} x_i - (1+\alpha) \frac{v_i^2}{r_i^3} x_i + \\ &+ 3\alpha \frac{(x_i \cdot \dot{x}_i)^2}{r_i^5} x_i + (4-2\alpha) \frac{(x_i \cdot \dot{x}_i)}{r_i^3} \dot{x}_i \end{aligned} \right], \quad (4)$$

где r_i – расстояние от планеты i до Солнца; r_{ij} – расстояние от планеты i до планеты j ; α – параметр, характеризующий выбор системы координат (для гармонической системы координат $\alpha=0$); c – скорость света в пустоте; m – масса; x – гелиоцентрические координаты планеты. Как видно из уравнения (4) здесь учитываются только релятивистские эффекты искривления пространства массой Солнца. Результаты вычислений приведены в табл. 2. Ошибка приведена в километрах.

Т а б л и ц а 2

Сопоставление данных радиолокационных наблюдений с результатами вычислений по формулам Брумберга

Ошибка	Меркурий	Венера	Марс
Максимальная	30.337253	29.793954	18.993075
Средняя	10.414446	10.854335	4.911052
Дисперсия	12.478308	12.513094	6.141397

Уравнения движения в форме Ньюхолла [5]:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i = & \sum_{j \neq i} k^2 m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} \left\{ 1 - \frac{2(\beta + \gamma)}{c^2} \sum_{k \neq i} \frac{k^2 m_k}{r_{ik}} - \frac{2\beta - 1}{c^2} \sum_{k \neq j} \frac{k^2 m_k}{r_{jk}} + \gamma \left(\frac{v_i}{c} \right)^2 + (1 + \gamma) \left(\frac{v_j}{c} \right)^2 - \frac{2(1 + \gamma)}{c^2} \dot{x}_i \cdot \dot{x}_j - \right. \\ & - \frac{3}{2c^2} \left[\frac{(x_i - x_j) \cdot \dot{x}_j}{r_{ij}} \right]^2 + \frac{(x_j - x_i) \cdot \ddot{x}_j}{2c^2} \left. \right\} + \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{k^2 m_j}{r_{ij}^3} \left[(x_i - x_j) \cdot [(2 + 2\gamma)\dot{x}_i - (1 + 2\gamma)\dot{x}_j] (\dot{x}_i - \dot{x}_j) + \right. \\ & \left. + \frac{3 + 4\gamma}{2c^2} \sum_{j \neq i} \frac{k^2 m_j \ddot{x}_j}{r_{ij}} \right], \quad (5) \end{aligned}$$

где $\gamma = \beta = 1$. Здесь уже учитывается искривление пространства, задаваемое всеми планетами. Результаты вычислений приведены в табл. 3. Ошибка приведена в километрах.

**Сопоставление данных радиолокационных наблюдений с результатами вычислений
по формулам Ньюхолла**

Ошибка	Меркурий	Венера	Марс
Максимальная	28.902514	29.879069	18.056474
Средняя	10.532435	10.752180	4.891013
Дисперсия	12.589971	12.439405	6.109815

Сравнительно большая ошибка в определении положения Меркурия по сравнению с DE405 обусловлена, прежде всего, тем, что не учитывается эффект несферичности Солнца, а для Марса тем, что не учтено влияние пояса астероидов. В целом же уравнения (4) и (5) показали примерно одинаковые результаты, и можно сделать вывод о том, что оба уравнения применимы для моделирования движения больших планет. Однако отметим, что для Меркурия уравнения Брумберга дали чуть лучший результат, чем уравнения Ньюхолла, а для Марса и Венеры ситуация обратная. Скорее всего, это связано с тем, что в уравнениях Брумберга влияние Солнца описано точнее и поэтому для Меркурия, как самой близкой к Солнцу планеты, результаты получились лучше. Для планет, расположенных дальше от Солнца, релятивистские возмущения от других планет становятся сравнимы с Солнечными, соответственно ошибки при использовании уравнений Ньюхолла будут меньше. Если теперь рассмотреть поставленную задачу с точки зрения эффективности ее реализации, то очевидно, что для уравнений Ньюхолла вычислений потребуется намного больше. Эту ситуацию оказалось возможным исправить исходя из предположения о том, что для некоторых планет учет релятивистских эффектов может не сказаться на точности модели. Чтобы выяснить, для каких планет можно опустить учет релятивистских эффектов, было проведено интегрирование на интервале времени 100 лет и найдены максимальные значения, которые принимает релятивистская составляющая силы взаимодействия между планетами. Эти результаты приведены в табл. 4. Здесь столбцы соответствуют планетам, оказывающим влияние, строки – объекты влияния.

Т а б л и ц а 4

**Максимальная величина релятивистской составляющей силы взаимодействия
между планетами на интервале времени 100 лет**

Планеты	Солнце	Меркурий	Венера	Земля	Луна	Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун	Плутон
Солнце	0	4e-17	6e-17	3e-17	5e-19	1e-18	7e-17	3e-18	6e-20	2e-20	2e-24
Меркурий	2e-10	0	1e-15	4e-16	5e-18	2e-17	3e-15	3e-16	1e-17	5e-18	6e-22
Венера	2e-11	3e-17	0	1e-15	1e-17	2e-17	1e-15	1e-16	4e-18	2e-18	2e-22
Земля	9e-12	2e-17	4e-16	0	1e-13	4e-17	1e-15	8e-17	3e-18	1e-18	2e-22
Луна	9e-12	2e-17	4e-16	1e-11	0	4e-17	1e-15	9e-17	3e-18	1e-18	2e-22
Марс	3e-12	1e-17	4e-17	2e-16	3e-18	0	1e-15	7e-17	2e-18	1e-18	1e-22
Юпитер	7e-14	4e-18	1e-17	8e-18	2e-19	4e-19	0	6e-17	9e-19	3e-19	4e-23
Сатурн	1e-14	2e-18	6e-18	4e-18	8e-20	2e-19	7e-17	0	9e-19	2e-19	3e-23
Уран	1e-15	1e-18	3e-18	2e-18	4e-20	1e-19	3e-17	2e-18	0	4e-19	3e-23
Нептун	3e-16	6e-19	2e-18	1e-18	2e-20	7e-20	2e-17	1e-18	1e-19	0	6e-24
Плутон	3e-16	6e-19	2e-18	1e-18	2e-20	6e-20	1e-17	1e-18	8e-20	5e-20	0

Оставляя в уравнениях (5) только те учитывающие релятивистские эффекты члены, для которых в табл. 4 приведены значения, большие, чем $1\text{E-}17$, получаем результат, идентичный предыдущему, в рамках погрешности вычислений. Как видно из табл. 4, основной вклад в релятивистские эффекты производит Солнце, однако величины влияния Юпитера и некоторых внутренних планет друг на друга не настолько малы, чтобы ими можно было пренебречь.

Таким образом, можно сделать вывод, что оптимальной моделью для движения больших тел Солнечной системы являются уравнения вида (5), из которых исключены члены, имеющие малую величину на всем интервале интегрирования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Kaplan G.* Bulletin of the American Astronomical Society, 1990. Vol. 22. P. 930-931.
2. *Everhart E.* Implicit single methods for integrating orbits // Celestial mechanics. 1974. Vol.10. P. 35-55.
3. *Standish E.M.* JPL planetary and lunar ephemerides, DE405/LE405. // Interoffice Memorandum, 312. F-98-048, 1-18.
4. *Брумберг В.А.* Релятивистская небесная механика. М.: Наука, 1972.383с.
5. *Newhall X.X., Standish E.M. and Williams J.G.*: DE102: a numerically integrated ephemeris of the Moon and planets spanning forty-four centuries" // Astron. Astrophys, 1983. Vol.125. P. 150-167.

Поступила 12.01.2005 г.