Общероссийский математический портал

Л. И. Фридман, К. С. Моргачев, Решение стационарной динамической задачи для кольцевой пластины в рамках модели Тимошенко, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005, выпуск 34, 68–71

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu339>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 13:31:14

РЕШЕНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ В РАМКАХ МОДЕЛИ ТИМОШЕНКО

Получено решение стационарной динамической задачи для кольцевой пластины в рамках модели Тимошенко. Разработанный алгоритм и программы определения частот и форм собственных колебаний, реализованные с использованием средств системы компьютерной математики Mathematica, справедливы для любых сочетаний следующих граничных условий на краях пластины: свободный край, шарнирное опирание и жесткая заделка. Достоверность результатов вычисления частот подтверждается численным экспериментом – возбуждением резонансных колебаний.

Введение. Необходимость применения модели Тимошенко при динамических расчетах элементов машин и сооружений, схематизируемых кольцевыми пластинами, обоснована в [1], где приводится сравнение результатов решения динамических задач для цилиндрических тел согласно гипотезе Тимошенко и на основе методов теории упругости с результатами, полученными экспериментально.

В предлагаемой статье на основе известных зависимостей теории колебаний пластин и оболочек построен алгоритм вычисления частот и форм собственных колебаний кольцевой пластины (модель Тимошенко) для любых сочетаний общепринятых граничных условий на ее краях (свободный край, шарнирное опирание и жесткая заделка).

Для реализации решения использовались широкие возможности системы компьютерной математики Mathematica 4.1, которые позволяют освободить проектировщика от громоздких аналитических преобразований при разработке программ, усовершенствовать процесс вычислений, а также представить результаты вычислений в наглядном виде.

Для подтверждения достоверности результатов вычисления частот была построена программа численного эксперимента: фиксация резонансных колебаний при изменении частоты возбуждающей силы вблизи собственной частоты колебаний пластины (проверка на резонанс).

Основные зависимости для кольцевых пластин (модель Тимошенко). Полученные в [2] разрешающие уравнения колебаний пластины Тимошенко-Уфлянда-Миндлина инвариантны по отношению к системе координат, т.е. будут справедливы и в безразмерных полярных координатах ($\alpha_1 = r$ - полярный радиус, отнесенный к внешнему радиусу кольцевой пластины R , $\alpha_2 = \theta$ - полярный угол):

$$\Delta_1 F = \frac{2(1+\nu)}{E k \varepsilon} q, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \Psi - \frac{2}{1-\nu} (b \Psi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}) = 0, \quad (2)$$

где $F(r, \theta)$ и $\Psi(r, \theta)$ - потенциальные функции,

$$\Delta_1 = \nabla^2 \nabla^2 - (1 + \frac{2}{k(1-\nu)}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 + \frac{2}{k(1-\nu)} \frac{\partial^4}{\partial t^4} - \frac{12}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (3)$$

∇^2 - оператор Лапласа; q - внешняя нагрузка; $b = \frac{6k(1-\nu)}{\varepsilon^2}$; h и $\varepsilon = \frac{h}{R}$ - соответственно абсолютная и относительная толщины пластины; t - безразмерное время, отнесенное к $\frac{R}{c\sqrt{1-\nu^2}}$;

$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ - скорость звука в материале пластины; E , ν и ρ - соответственно модуль упругости, коэффициент Пуассона и массовая плотность материала пластины; k - коэффициент сдвига, определяемый по Миндлину в соответствии с [3] из уравнения:

$$16(1 - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} k)(1-k) - (2-k)^4 = 0. \quad (4)$$

Моменты и перерезывающие силы определяются зависимостями

$$\begin{aligned}
M_r &= \frac{D}{R} \left[\frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial r} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \mathcal{G}_r \right) \right]; \quad M_\theta = \frac{D}{R} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \mathcal{G}_r + \nu \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial r} \right]; \\
M_{r\theta} &= \frac{D}{R} \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{G}_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \mathcal{G}_\theta \right); \\
Q_r &= \frac{kEh}{2(1+\nu)} \left(\mathcal{G}_r - \frac{\partial u}{\partial r} \right); \quad Q_\theta = \frac{kEh}{2(1+\nu)} \left(\mathcal{G}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right),
\end{aligned} \tag{5}$$

где Q_r , M_r , $M_{r\theta}$ - погонная перерезывающая сила, изгибающий и крутящий моменты на линии $r = \text{const}$; Q_θ , M_θ , $M_{r\theta}$ - то же, на линии $\theta = \text{const}$; $\mathcal{G}_r, \mathcal{G}_\theta$ - проекции осредненного поворота на плоскости, образованные нормалью к срединной поверхности и касательной соответственно к линиям $r = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$; u - безразмерное перемещение, нормальное к срединной плоскости; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ - цилиндрическая жесткость.

Потенциальные функции $F(r, \theta)$ и $\Psi(r, \theta)$ связаны с u , $\mathcal{G}_r$ и $\mathcal{G}_\theta$ зависимостями

$$u = \nabla^2 F - bF - \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}; \quad \mathcal{G}_r = -b \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}; \quad \mathcal{G}_\theta = -b \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\partial \Psi}{\partial r}.$$

При отсутствии нагрузки (стационарная задача) (1) примет вид

$$\Delta_1 F = 0. \tag{7}$$

При колебаниях по j -той собственной форме потенциальные функции, перемещения, осредненные повороты, моменты и перерезывающие силы меняются во времени по гармоническому закону (т.е. в обозначениях упомянутых выше величин появится индекс j).

Оператор Δ_1 при определении функции F_j из (7) примет вид:

$$\Delta_1 = \nabla^2 \nabla^2 + \left(1 + \frac{2}{k(1-\nu)}\right) \lambda_j^2 \nabla^2 + \frac{2}{k(1-\nu)} \lambda_j^4 - \frac{12}{\varepsilon^2} \lambda_j^2 = (\nabla^2 - \alpha_{1j}^2)(\nabla^2 + \alpha_{2j}^2), \tag{8}$$

где λ_j - безразмерная частота колебаний пластины (переход к частотам в герцах осуществляется по формуле $f_j = \lambda_j \frac{c\sqrt{1-\nu^2}}{2\pi R}$);

$$\begin{aligned}
\alpha_{1j}^2 &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{k(1-\nu)}\right) \lambda_j^2 + \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 + \frac{2}{k(1-\nu)}\right)^2 \lambda_j^4 + \frac{12}{\varepsilon^2} \lambda_j^2}; \\
\alpha_{2j}^2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{k(1-\nu)}\right) \lambda_j^2 + \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 + \frac{2}{k(1-\nu)}\right)^2 \lambda_j^4 + \frac{12}{\varepsilon^2} \lambda_j^2}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Уравнения (2) и (7) при стационарных колебаниях примут вид

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \nabla^2 F_j + \left(1 + \frac{2}{k(1-\nu)}\right) \lambda_j^2 \nabla^2 F_j + \frac{2}{k(1-\nu)} \lambda_j^4 F_j - \frac{12}{\varepsilon^2} \lambda_j^2 F_j &= 0; \\
\nabla^2 \Psi_j - \frac{2}{1-\nu} (b - \lambda_j^2) \Psi_j &= 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Функция F_j может быть представлена в виде суммы двух функций:

$$F_j = F_{1j} + F_{2j}.$$

Тогда (10) принимают вид уравнений Гельмгольца

$$\nabla^2 F_{1j} - \alpha_{1j}^2 F_{1j} = 0; \quad \nabla^2 F_{2j} + \alpha_{2j}^2 F_{2j} = 0; \quad \nabla^2 \Psi_j - \beta_j^2 \Psi_j = 0, \tag{11}$$

где $\beta_j^2 = \frac{2}{1-\nu} (b - \lambda_j^2)$.

Уравнения (11) решаются методом разделения переменных. С учетом условия периодичности по угловой координате решения уравнений (11) записываются в виде

$$\begin{aligned}
F_{1j} &= (C_1 I_m(r\alpha_{1j}) + C_2 K_m(r\alpha_{1j})) \cos(m\theta); \\
F_{2j} &= (C_3 J_m(r\alpha_{2j}) + C_4 Y_m(r\alpha_{2j})) \cos(m\theta); \\
\Psi_j &= (C_5 I_m(r\beta_j) + C_6 K_m(r\beta_j)) \sin(m\theta).
\end{aligned} \tag{12}$$

Для кольцевых пластин условие периодичности по угловой координате θ упрощает собственные формы.

Индексы j и m характеризуют формы собственных колебаний кольцевой пластины: m - число узловых диаметров ($m = 0, 1, 2, \dots$), j - порядковый номер формы колебаний с фиксированным числом узловых диаметров ($m = 1, 2, 3, \dots$). По этой причине для кольцевых пластин индекс j следует заменить на двойной индекс jm ; тогда безразмерная частота примет вид λ_{jm} , а задача колебаний кольцевых пластин становится квазиодномерной.

При $\lambda_{jm}^2 > b$ величины α_{jm} и β_{jm} становятся мнимыми, а модифицированные функции Бесселя первого и второго рода, содержащие их, переходят соответственно в функции Бесселя первого и второго рода.

Граничные условия и частотное уравнение. Для кольцевой пластины, колебания которой подчиняются гипотезе Тимошенко, граничные условия записываются в виде

$$\begin{aligned} \text{свободный край} - \quad & M_{r,jm} = 0; \quad M_{r\theta,jm} = 0; \quad Q_{r,jm} = 0; \\ \text{шарнирное опирание} - \quad & M_{rjm} = 0; \quad u_{jm} = 0; \quad \vartheta_{\theta,jm} = 0; \\ \text{жесткая заделка} - \quad & u_{jm} = 0; \quad \vartheta_{r,jm} = 0; \quad \vartheta_{\theta,jm} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Для пластины, защемленной по внутреннему краю $r = r_1$ и свободной на внешнем крае $r = r_2$, должны выполняться следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} r = r_1 \quad & u_{jm} = 0; \quad \vartheta_{r,jm} = 0; \quad \vartheta_{\theta,jm} = 0; \\ r = r_2 \quad & M_{r,jm} = 0; \quad M_{r\theta,jm} = 0; \quad Q_{r,jm} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Граничные условия (14) порождают систему шести линейных однородных алгебраических уравнений относительно шести произвольных постоянных:

$$\begin{aligned} a_{11}C_{1j} + a_{12}C_{2j} + a_{13}C_{3j} + a_{14}C_{4j} + a_{15}C_{5j} + a_{16}C_{6j} &= 0; \\ a_{21}C_{1j} + a_{22}C_{2j} + a_{23}C_{3j} + a_{24}C_{4j} + a_{25}C_{5j} + a_{26}C_{6j} &= 0; \\ a_{31}C_{1j} + a_{32}C_{2j} + a_{33}C_{3j} + a_{34}C_{4j} + a_{35}C_{5j} + a_{36}C_{6j} &= 0; \\ a_{41}C_{1j} + a_{42}C_{2j} + a_{43}C_{3j} + a_{44}C_{4j} + a_{45}C_{5j} + a_{46}C_{6j} &= 0; \\ a_{51}C_{1j} + a_{52}C_{2j} + a_{53}C_{3j} + a_{54}C_{4j} + a_{55}C_{5j} + a_{56}C_{6j} &= 0; \\ a_{61}C_{1j} + a_{62}C_{2j} + a_{63}C_{3j} + a_{64}C_{4j} + a_{65}C_{5j} + a_{66}C_{6j} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Условие разрешимости системы (15) (равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при произвольных постоянных) дает частотное уравнение:

$$\varphi(\lambda_{jm}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

Частотное уравнение является трансцендентным уравнением и решается методом бисекции, при этом успех решения зависит от выбора шага: при малом шаге мала вероятность пропуска корней, но увеличивается время счёта. При увеличении шага возможны пропуски корней. Компьютерная система Mathematica 4.1 позволяет строить график функции $\varphi(\lambda_{jm})$, нули которой являются корнями частотного уравнения (16), до вычисления частот и обоснованно назначить шаг в методе бисекции. При решении уравнений (15) методом бисекции шаг не должен превышать минимального расстояния между нулями функции $\varphi(\lambda_{jm})$.

На рис. 1 представлен график функции $\varphi(\lambda_{j3})$.

Некоторые результаты вычислений. Вычисления, результаты которых приведены ниже, проводились для пластины с относительными размерами: $r_1 = 0.3$, $r_2 = 1$ и $\varepsilon = 0.8$, соответствующей граничным условиям (14). В расчетах также принималось: $\nu = 0.3$ и $k = 0.86$. Проверка выполненных расчетов осуществлялась при помощи численного эксперимента - возбужде-

ния резонансных колебаний. На рис. 2 приведен пример проверки вычисленных частот на резонанс. Проверялась частота λ_{13} ($j=1, m=3$). Колебания возбуждались осевой нагрузкой, приложенной на внешней границе пластины и заданной зависимостью

$$q = q_0 \cos(3\theta) \cos(\omega t),$$

где ω - частота возбуждения; q_0 - единичная перерезывающая сила, действующая на внешнем контуре пластины.

По мере приближения частоты возбуждения ω к собственной частоте λ_{13} резко растут все параметры, в том числе вертикальные перемещения пластины u , зависимость которых от частоты возбуждения, приведенная на рис. 2, является типичной резонансной кривой (по оси ординат на рис. 2 – $u_* = \ln|u| \operatorname{sign}(u)$). Резонансные колебания возникают только при достаточно точном вычислении частот.

Р и с. 2. Проверка вычисленных частот на резонанс

Р и с. 1. Поиск корней частотного уравнения

Р и с. 3. Относительные изгибающие моменты

По найденным частотам определяются формы колебаний: перемещения, осреднённые повороты, изгибающие и скручивающие моменты и перерезывающие силы, характеризующие напряженно-деформированное состояние рассматриваемой пластины в любой ее точке.

После подстановки вычисленной частоты в коэффициенты однородной системы (15) вычисляются произвольные постоянные C_i ($i = \overline{1,6}$) и формы колебаний. На рис. 3 приведены относительные изгибающие моменты M_r в зависимости от радиуса r пластины при $\cos(3\theta) = 1$. Вычисление относительных изгибающих и скручивающих моментов, а также перерезывающих сил позволяет определять наиболее нагруженные области элементов сооружений, схематизируемых кольцевыми пластинами.

Выводы. Разработка программ, справедливых для широкого спектра граничных условий и использующих в своем алгоритме уточнённые гипотезы теории колебаний пластин (в том числе гипотезы модели Тимошенко), способствует существенному расширению области применения последней к расчёту элементов сооружений и машин.

Построение и реализация решений в компьютерной системе Mathematica 4.1 исключает пропуски частот колебаний при вычислении частотного спектра.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кузнецов Н.Д., Фридман Л.И., Шапошников Ю.Н. Особенности низкочастотного спектра собственных колебаний цилиндрических тел // Доклады АН СССР, 1990. 312. №1. С. 55-58.
2. Фридман Л.И., Карасева О.А. Сравнение частот прямоугольных пластин, вычисленных по уточненной и классической гипотезам // Известия вузов. Строительство. 2000. №1. С. 21-26.
3. Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы. М.: Мир, 1971. 557 с.

Поступила 10.11.2004 г.