Общероссийский математический портал

А. В. Лежнёв, О расчётах параметров стационарного течения газа по трубопроводу, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005, выпуск 34, 72–81

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu340>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 14:02:03

Механика жидкости и газа

УДК 622.692.4

А. В. Лежнёв

О РАСЧЁТАХ ПАРАМЕТРОВ СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА ПО ТРУБОПРОВОДУ

Рассматриваются математические модели стационарного течения газа по прямолинейному горизонтальному трубопроводу постоянного сечения и предлагается ряд новых простых и в то же время достаточно точных формул для вычисления давления и температуры газа. Для расчётов используется минимальный объём исходных данных. Полученные результаты могут применяться при проектировании и эксплуатации различных объектов газовой промышленности и других отраслей экономики.

Введение. Одной из задач газовой динамики, представляющей определённый теоретический интерес и имеющей большую практическую значимость, является задача расчёта давления и температуры газа при его течении по трубопроводу. Для расчёта параметров течения газа по трубопроводам существует ряд методик, относящихся, как правило, к стационарным режимам и закреплённых в соответствующих нормативных документах: ГОСТ, ОСТ, ОНТП. Данным методикам расчёта присущи отдельные недостатки, в частности: 1) применение изотермических моделей течения газа, не обладающих в ряде случаев требуемой адекватностью; 2) использование для расчётов средних по длине трубопровода значений температуры, давления и перепада давления, которые, в свою очередь, определяются всем рассчитываемым режимом течения газа; 3) использование некоторых излишних усложняющих модель параметров, не являющихся постоянными и зависящих от рассчитываемых режимов течения. При проведении расчётов указанные особенности приводят к необходимости реализации сложных итерационных вычислений, не приемлемых для инженерных целей.

В настоящей работе рассматривается стационарное течение газа по прямолинейному горизонтальному трубопроводу постоянного сечения. Стационарные модели обладают достаточно высокой степенью адекватности в большинстве штатных ситуаций на промышленных объектах, при которых параметры технологических процессов с течением времени меняются достаточно медленно. Основной целью работы является получение ряда новых простых явных и, в то же время, весьма точных формул для вычисления давления и температуры газа в любой точке трубопровода по известным значениям параметров газа только в его начальной точке.

Описание модели течения газа. Свойства газа будем задавать термическим и калорическим уравнениями состояния:

$$P = \rho zRT; \quad u = C_V T, \quad (1)$$

в которых P , ρ , T , u – соответственно давление, плотность, абсолютная температура и удельная внутренняя энергия газа; z – безразмерный коэффициент сжимаемости газа; R – газовая постоянная; C_V – удельная внутренняя теплоёмкость газа при постоянном объёме. Данное уравнение состояния широко используется в теории систем добычи, подготовки и транспорта газа при описании процессов, не связанных с существенным изменением физико-химических свойств газа. Всюду в настоящей работе значения z и C_V будем считать постоянными. Данное предположение часто принимается при моделировании течения газа и может быть оправдано тем, что фактически существующая зависимость параметров z и C_V природных газов от давления и температуры в рамках реальных производственных условий транспорта газа не носит резко выраженного характера (см., например, данные из [1, 2]). В то же время, предлагаемая в статье методика допускает естественные обобщения на случай переменных z и C_V , позволяя выйти за рамки модели идеального газа и давая при этом весьма точные результаты при расчёте параметров газа и решении соответствующих обратных задач.

При описании рассматриваемых процессов течения газа примем следующие типичные предположения, в разумной степени упрощающие модель течения газа и не вносящие значительных искажений в описание общей картины течения в условиях реальных трубопроводов высокого давления (см., например, [3–5]).

1. Характер изменения параметров течения газа считается одномерным вдоль оси трубопровода. Действительно, само понятие трубопровода предполагает, что его внутренний диаметр D существенно меньше длины L ($D \ll L$) и изменение параметров газа по длине трубопровода гораздо более значимо, чем по его поперечному сечению.

2. Отсутствует учёт вязкости газа. В самом деле, вязкость газа, как и неизбежно присутствующее в любом реальном трубопроводе трение газа о его внутреннюю поверхность, являются диссипативными факторами и в целом влияют на процесс течения "в одном направлении". При этом в силу малости коэффициента вязкости газа даже при высоком давлении [1] влияние трения несоизмеримо более весомо, и учёт вязкости в уравнениях не вносит определяющего вклада в формирование картины течения. Правомочность этого и последующего предположений подтверждается численным анализом соответствующих математических моделей течения газа, проведённым, в частности, при выполнении работы [6]. Данные рассуждения обосновывают традиционный отказ от учёта вязкости при рассмотрении течения газа в трубопроводах. Отметим, что рассматриваемая ситуация принципиально отличается от случая газовых потоков вне жёстких границ (например, при атмосферных явлениях), где пренебрегать эффектами вязкости уже не представляется возможным с сохранением адекватности модели.

3. Отсутствует учёт теплопроводности газа в осевом направлении. Действительно, коэффициент теплопроводности газа исключительно мал [1], и доминирующую роль в изменении температуры газа вдоль оси трубопровода играют процессы конвективной природы и теплообмена газа с окружающей средой. С другой стороны, учёт теплопроводности газа в осевом направлении привносит в уравнение энергии слагаемое, содержащее вторую частную производную температуры по линейной координате, что повышает порядок уравнения и существенно усложняет систему.

В рамках принятых предположений наиболее полная модель течения газа по трубопроводу представляется системой трёх нелинейных дифференциальных уравнений, выражающих фундаментальные физические законы сохранения массы, импульса и энергии в замкнутых системах (см., например, [3, 4]), называемых соответственно уравнениями неразрывности, движения и энергии и имеющих вид

$$(\rho v)'_x = 0, \quad (2)$$

$$(P + \rho v^2)'_x = -\frac{\lambda}{2D} \rho v^2, \quad (3)$$

$$(\rho v(u + v^2/2 + P/\rho))'_x = -\frac{\lambda}{2D} \rho v^3 - \frac{4\alpha}{D} (T - T_*). \quad (4)$$

В приведённой записи системы давление P , плотность ρ , температура T и удельная внутренняя энергия u газа являются функциями линейной координаты $x \in (0; L)$ вдоль оси трубопровода, начало которого соответствует значению $x=0$, конец – значению $x=L$, $v = v(x) > 0$ – средняя по сечению трубопровода скорость течения газа в осевом направлении, T_* – температура окружающей трубопровод среды, принимаемая постоянной.

Отметим, что второе слагаемое под знаком производной в левой части уравнения движения (3) зачастую записывается в виде $(1 + \beta)\rho v^2$, где β – поправка Кориолиса на неравномерность распределения скоростей газа по поперечному сечению [5]. Однако для турбулентного характера течения газа, который присущ реальным трубопроводам высокого давления, эта поправка близка к нулю: $\beta \approx 0$.

Важнейшими параметрами рассматриваемой математической модели течения газа являются коэффициент гидравлического сопротивления λ и коэффициент теплопередачи α . Члены уравнений с коэффициентом λ характеризуют влияние на процесс течения трения газа о внутренние стенки трубопровода. Коэффициент λ (безразмерный) возникает в известной эмпирической формуле Дарси-Вейсбаха, выражающей поверхностную плотность касательных сил трения на стенке трубопровода в виде $\lambda \rho v^2/8$ (см. [4, 5]). Иными словами, данная формула выражает закон квадратичного сопротивления, справедливый для исключительно широкого

класса течений газа. Слагаемое $4\alpha(T - T_*)/D$ в уравнении энергии характеризует влияние на процесс течения теплообмена газа с окружающей средой, происходящего по закону Ньютона-Фурье, при котором мощность теплового потока через единицу площади поверхности трубопровода пропорциональна с коэффициентом α перепаду температур между газом и окружающей средой. В системе единиц СИ коэффициент α имеет размерность [Вт/(м²·град)]. В реальных производственных условиях коэффициенты λ и α , как правило, не подлежат непосредственному измерению; отдельные вопросы их идентификации рассматривались, в частности, в работах [7–9].

Отметим, что в отдельных как отечественных, так и зарубежных источниках по различным причинам используется некорректная запись уравнения энергии (4), в которой опускается слагаемое с коэффициентом λ , отвечающее за учёт влияния трения на тепловые процессы в трубопроводе. Избежать подобной ошибки можно, если детально проследить вывод уравнений (2)–(4), исходя из интегральных балансовых соотношений и учитывая, что сила трения, влияющая на изменение импульса порции газа, соответствующим образом влияет и на изменение энергии той же порции газа. Дальнейшие рассуждения, проводимые в настоящей работе, подтверждают корректность системы (2)–(4).

Преобразование уравнений модели. Из уравнения неразрывности (2) следует, что массовая скорость $m = \rho v$ не зависит от координаты x и является постоянной вдоль всего трубопровода. Соответственно коммерческий расход газа Q (т. е. объёмный расход, приведённый к стандартным условиям $P_\Delta = 101,325$ кПа и $T_\Delta = 293,15$ °K), наиболее широко используемый в теории и практике газовой промышленности для измерения расходов газа, также является постоянным в силу соотношения

$$Q = mSzR \frac{T_\Delta}{P_\Delta}, \quad (5)$$

где $S = \pi D^2 / 4$ – площадь поперечного сечения трубопровода.

Уравнения движения (3) и энергии (4) являются весьма сложными для непосредственного решения, поскольку они, в частности, не разрешены относительно производных давления и температуры. Как правило, уравнение движения подвергается упрощению путём отбрасывания слагаемого ρv^2 под знаком производной, представляющего скоростной напор потока газа. Конечно, при таком упрощении совершенно естественно согласованным образом упростить и уравнение энергии, т. е. отбросить слагаемое $v^2 / 2$ под знаком производной в его левой части. В условиях, характерных для реальных трубопроводов высокого давления, проведённые упрощения не приводят к существенному искажению картины течения, поскольку влияние трения на изменение скоростного напора пренебрежимо мало по сравнению с его влиянием на перепад давления. Данный вывод основан на результатах многочисленных физических и численных экспериментов. Отдельные результаты таких расчётов приведены ниже.

Таким образом, уравнения движения и энергии в упрощённом виде могут быть записаны следующим образом:

$$P'_x = -\frac{\lambda}{2D} \rho v^2, \quad (\rho v(u + P/\rho))'_x = -\frac{\lambda}{2D} \rho v^3 - \frac{4\alpha}{D} (T - T_*).$$

Используя постоянность массовой скорости m , учитывая термическое уравнение состояния газа (1) и вводя обозначение $B = \frac{zR}{D}$, преобразуем полученное уравнение движения к виду

$$P'_x = -\frac{\lambda}{2D} \frac{m^2}{\rho} = -\frac{\lambda}{2} B m^2 \frac{T}{P},$$

или, после умножения на $2P$,

$$(P^2)'_x = -\lambda B m^2 T. \quad (6)$$

Уравнение энергии с учётом уравнений состояния газа может быть преобразовано следующим образом:

$$m(C_V T + zRT)'_x = -\frac{\lambda}{2D} \frac{m^3}{\rho^2} - \frac{4\alpha}{D} (T - T_*);$$

$$C_P T'_x = -\frac{\lambda}{2D} m^2 \frac{z^2 R^2 T^2}{P^2} - \frac{4\alpha}{Dm} (T - T_*),$$

$$T'_x = -\frac{\lambda}{2} \delta B m^2 \frac{T^2}{P^2} - a(T - T_*), \quad (7)$$

где $a = \frac{4\alpha}{DC_P m}$, $C_P = C_V + zR$ – удельная теплоёмкость газа при постоянном давлении,

$\delta = \frac{zR}{C_P} = 1 - \frac{1}{\gamma}$, $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ – показатель адиабаты газа.

В качестве начальных условий для полученной системы уравнений (6), (7) примем значения давления, температуры и расхода газа в начале трубопровода:

$$P(0) = P_0, \quad T(0) = T_0, \quad Q(0) = Q_0, \quad (8)$$

при этом массовая скорость m полностью определяется значением Q_0 в соответствии с соотношением (5).

Приведём здесь ещё один аргумент в пользу корректности исходной системы (2)–(4). Упомянутая выше некорректная запись уравнения энергии (4) без слагаемого с коэффициентом λ приводит в результате проводимых упрощений к "расщеплению" системы и преобразованию этого уравнения в независимое уравнение, содержащее только температуру $T(x)$ и не содержащее давление $P(x)$. Решение такого уравнения может быть легко получено в явном виде:

$$T(x) = T_* + (T_0 - T_*)e^{-ax}.$$

Очевидно, что данная функция принимает значения в интервале от T_0 до T_* , поскольку при $a > 0$ и $x \geq 0$ справедливы неравенства $0 < e^{-ax} \leq 1$. При $T_0 > T_*$ справедливость рассматриваемого некорректного уравнения означала бы, что температура газа в трубопроводе не может опуститься ниже температуры окружающей среды T_* . Однако это противоречит хорошо известным из практики фактам, подтверждающим возможность охлаждения газа при его течении по трубопроводу или дросселировании до более низких температур, чем температура окружающей среды.

Получение основных соотношений. Основные результаты настоящей работы связаны с исследованием системы (6), (7). Конечно, данная система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений может быть решена численно с помощью известных программных средств, например, пакетов MathCAD, MatLab, Maple или соответствующих подпрограмм, входящих в состав библиотек систем программирования на основе языка Fortran, однако для этого требуется соответствующие компьютерное оснащение и математическая подготовка. Тем больший интерес и актуальность представляет вопрос о получении простых явных формул, позволяющих с высокой степенью точности провести инженерные расчёты режимов работы газопроводов в "полевых условиях" с использованием только калькулятора.

Установим предварительно следующие общие интегральные соотношения. Из уравнения движения (6) непосредственно следует соотношение

$$P(x)^2 = P_0^2 - \lambda B m^2 \int_0^x T(s) ds, \quad (9)$$

выражающее закон квадратичного трения – наиболее распространённую и апробированную модель, описывающую течение газа по горизонтальным трубопроводам высокого давления. Закон квадратичного трения показывает, что перепад квадрата давления на участке трубопровода с высокой степенью точности пропорционален квадрату расхода газа (точной пропорциональности здесь нет, поскольку температура газа также зависит от расхода). Преобразуем далее уравнение энергии (7) с учётом уравнения движения следующим образом:

$$\frac{T'_x}{T} = -\frac{\lambda}{2} \delta B m^2 \frac{T}{P^2} - a \left(1 - \frac{T_*}{T} \right) = \delta \frac{P'_x}{P} - a \left(1 - \frac{T_*}{T} \right),$$

или

$$(\ln T)'_x = \delta (\ln P)'_x - a(1 - T_*/T).$$

Интегрирование полученного соотношения от начальной точки $x = 0$ даёт равенство

$$\ln \frac{T(x)}{T_0} = \delta \ln \frac{P(x)}{P_0} - ax + aT_* \int_0^x \frac{ds}{T(s)},$$

из которого вытекает следующее основное соотношение:

$$\left(\frac{P(x)}{P_0} \right)^\delta = \frac{T(x)}{T_0} \exp \left(ax - aT_* \int_0^x \frac{ds}{T(s)} \right). \quad (10)$$

Полученная система интегральных уравнений (9), (10) эквивалентна системе дифференциальных уравнений (6), (7) с начальными условиями (8). Подчеркнём, что соотношение (10) носит весьма общий характер и остаётся справедливым для неупрощённых уравнений движения (3) и энергии (4), учитывающих скоростной напор, и для иных законов трения газа о стенки трубопровода, отличных от квадратичного.

Рассмотрим предельный случай $\alpha = 0$, соответствующий отсутствию либо пренебрежимой малости теплообмена газа с окружающей средой (например, если трубопровод теплоизолирован). При этом $a = 0$, и соотношение (10) приобретает вид

$$\left(\frac{P(x)}{P_0} \right)^\delta = \frac{T(x)}{T_0}, \quad (11)$$

полностью совпадающий с учётом термического уравнения состояния (1) с классическим адиабатическим законом термодинамики. Это является ещё одним весомым аргументом, подтверждающим корректность изучаемой модели (6), (7) течения газа. Далее, поскольку в силу (9) при любых температурных режимах давление $P(x)$ падает с ростом x , то в соответствии с (11) в отсутствие теплообмена с окружающей средой температура $T(x)$ также падает с ростом x . Таким образом, снижение температуры газа при его дросселировании является свойством, внутренне присущим идеальным и близким к ним по свойствам реальным газам.

Обратимся к исследованию общей ситуации $\alpha \neq 0$. При этом давление P и температуру T , являющихся решениями системы (6), (7) и содержащими коэффициент гидравлического сопротивления λ , будем рассматривать как функции параметра λ , т. е. $P = P(x, \lambda)$, $T = T(x, \lambda)$, причём предельный случай $\lambda = 0$ соответствует отсутствию (либо пренебрежимой малости) трения. Для сокращения записи зависимость от λ явно указывать не будем, а значения давления и температуры и их производных по λ при $\lambda = 0$ будем отмечать чертой сверху:

$$\bar{P}(x) \equiv P(x, 0), \quad \bar{T}(x) \equiv T(x, 0), \quad \partial_\lambda \bar{P}(x) \equiv \frac{\partial P(x, 0)}{\partial \lambda}, \quad \partial_\lambda \bar{T}(x) \equiv \frac{\partial T(x, 0)}{\partial \lambda}.$$

Для построения приближённого решения системы применим метод её дифференцирования по параметру λ и воспользуемся простейшими аппроксимационными формулами

$$T(x) \approx \bar{T}(x) + \lambda \cdot \partial_\lambda \bar{T}(x), \quad P(x)^2 \approx \bar{P}(x)^2 + \lambda \cdot \partial_\lambda (\bar{P}(x)^2). \quad (12)$$

Найдём выражения для фигурирующих в (12) функций $\bar{P}(x)$ и $\bar{T}(x)$. Полагая $\lambda = 0$ в системе (6), (7), получаем

$$(\bar{P}^2)'_x = 0, \quad \bar{T}'_x = -a(\bar{T} - T_*),$$

откуда сразу следует, что $\bar{P}(x) \equiv P_0$. Для определения $\bar{T}(x)$ получено обыкновенное линейное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами и начальным условием $\bar{T}(0) = T_0$, решение которого имеет вид

$$\bar{T}(x) = T_* + (T_0 - T_*)e^{-ax}. \quad (13)$$

Найдём выражения для производных $\partial_\lambda (\bar{P}(x)^2)$ и $\partial_\lambda \bar{T}(x)$. Дифференцируя по параметру λ уравнения (6), (7) и меняя порядок дифференцирования, получим:

$$(\partial_\lambda P^2)'_x = -Bm^2 T - \lambda Bm^2 \partial_\lambda T, \quad (\partial_\lambda T)'_x = -\frac{1}{2} Bm^2 \delta \frac{T^2}{P^2} - \frac{\lambda}{2} Bm^2 \delta \partial_\lambda \left(\frac{T^2}{P^2} \right) - a \partial_\lambda T.$$

Полагая в них $\lambda = 0$, получим уравнения

$$(\partial_\lambda \bar{P}^2)'_x = -Bm^2 \bar{T}, \quad (\partial_\lambda \bar{T})'_x = -\frac{1}{2} Bm^2 \delta \frac{\bar{T}^2}{\bar{P}^2} - a \partial_\lambda \bar{T}.$$

Соответствующие продифференцированные начальные условия при $\lambda = 0$ имеют вид

$$\partial_\lambda \bar{P}^2 \Big|_{x=0} = 0, \quad \partial_\lambda \bar{T} \Big|_{x=0} = 0.$$

Интегрируя уравнение для определения производной квадрата давления и вычисляя интеграл с учётом (13), получаем явное представление функции $\partial_\lambda \bar{P}(x)^2$:

$$\partial_\lambda \bar{P}(x)^2 = -Bm^2 \int_0^x \bar{T}(s) ds = -Bm^2 T_* \left(x + k \frac{1 - e^{-ax}}{a} \right),$$

где $k = T_0 / T_* - 1$. Для определения производной температуры имеем линейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, в котором коэффициент и правая часть являются уже вычисленными функциями. Решение данного уравнения с учётом нулевого начального условия может быть получено в явном виде:

$$\partial_\lambda \bar{T}(x) = -\delta Bm^2 \frac{T_*^2}{P_0^2} e^{-ax} \left(kx + k^2 \frac{1 - e^{-ax}}{2a} + \frac{e^{ax} - 1}{2a} \right).$$

С использованием полученных соотношений и представлений (12) основные формулы для вычисления давления и температуры газа в трубопроводе принимают вид

$$P(x)^2 \approx P_0^2 - \lambda Bm^2 T_* \left(x + k \frac{1 - e^{-ax}}{a} \right) \equiv P_1(x)^2, \quad (14)$$

$$T(x) \approx \bar{T}(x) - \lambda \delta Bm^2 \frac{T_*^2}{P_0^2} e^{-ax} \left(kx + k^2 \frac{1 - e^{-ax}}{2a} + \frac{e^{ax} - 1}{2a} \right) \equiv T_1(x). \quad (15)$$

Отметим следующие достоинства и новизну полученных формул.

1. Полученные формулы позволяют непосредственно вычислить значение давления $P(x)$ и температуры $T(x)$ в любой точке трубопровода на основе значений давления P_0 , температуры T_0 и расхода Q_0 газа, заданных только в начальной точке трубопровода, без использования средних значений и перепадов давления. Полученные результаты полностью согласуются с известными теоремами существования и единственности решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, в соответствии с которыми решение однозначно определяется начальными условиями. Уровень сложности полученных формул сопоставим с соответствующими типовыми формулами. При этом исключается необходимость проведения итерационных вычислений, неявно подразумеваемых в ряде методик расчётов.

2. Полученные формулы не содержат коэффициента Джоуля-Томсона, традиционно применяющегося для расчётов температуры газа при его дросселировании. Подчеркнём, что в уравнениях состояния (1) и в исследуемой модели (6), (7) данный коэффициент не фигурирует. Тем самым не представляется логичным его появление и в окончательных расчётных формулах. Важно отметить, что введение в ряде работ различных дифференциального и интегрального коэффициентов Джоуля-Томсона, а также весьма сложные формулы, предлагаемые для их вычисления, свидетельствуют о не вполне естественном характере использования данных "коэффициентов" в общепринятом виде. В этом случае внешняя простота формального определения коэффициентов Джоуля-Томсона как отношения перепада температуры к перепаду давления вступает в противоречие с более сложными внутренними свойствами газа, даже идеального.

Уточнение полученных результатов. Полученные основные формулы (14) и (15) допускают различные модификации, проводимые с целью их упрощения или уточнения. Обратимся, прежде всего, к формуле (15) для расчёта температуры и рассмотрим стоящее в скобках выражение

$$kx + k^2 \frac{1 - e^{-ax}}{2a} + \frac{e^{ax} - 1}{2a}.$$

При больших значениях координаты x порядок роста этого выражения определяется третьим слагаемым, что вытекает из асимптотического соотношения $xe^{-ax} \sim 0$ при $x \rightarrow +\infty$. Следовательно, преобразование этого слагаемого может привести к большим погрешностям аппроксимации, и подвергать его изменению не следует. Рассмотрим первые два слагаемых и изучим их поведение при малых значениях x . Поскольку $\frac{1 - e^{-ax}}{2a} \sim \frac{x}{2}$ при $x \rightarrow +0$, то имеет место приближённое равенство

$$kx + k^2 \frac{1 - e^{-ax}}{2a} \approx (k + k^2/2)x.$$

Соответственно формула (15) может быть преобразована в более простую формулу:

$$T(x) \approx \bar{T}(x) - \lambda \delta B m^2 \frac{T_*^2}{P_0^2} \left((k + k^2/2) x e^{-ax} + \frac{1 - e^{-ax}}{2a} \right) \equiv T_{11}(x).$$

Проведём далее уточнение полученных формул для расчёта температуры. В соотношениях (12), использованных для построения основных формул, при $\lambda = 0$ совпадают обе части приближённых равенств и их производные по λ , однако поведение этих выражений по параметру α не учтено. В то же время, температура $T(x)$, являясь решением системы (6), (7), зависит не только от λ , но и от α . Для учёта зависимости от этого параметра рассмотрим соотношение

$$T(x) \approx \bar{T}(x) + T(x)|_{\alpha=0} - \bar{T}(x)|_{\alpha=0} + \lambda \cdot (\partial_\lambda \bar{T}(x) - \partial_\lambda \bar{T}(x)|_{\alpha=0}),$$

в котором помимо отмеченных совпадений при $\lambda = 0$ обе части равенства совпадают и при $\alpha = 0$. Естественно ожидать, что данное выражение обеспечит более высокую точность аппроксимации температуры. Дополнительные слагаемые, имеющиеся в приведённом соотношении по сравнению с (12), равны

$$T(x)|_{\alpha=0} - \bar{T}(x)|_{\alpha=0} - \lambda \cdot \partial_\lambda \bar{T}(x)|_{\alpha=0} \equiv \Delta T(x)$$

и все относятся к адиабатическому предельному случаю при $\alpha = 0$. Проведём вычисления указанных выражений.

Положим в системе (6), (7) параметр $\alpha = 0$. Подставляя в формально не изменившееся уравнение движения (6) выражение для $T(x)$ из соотношения (11), получим уравнение

$$(P^2)'_x = -\lambda B m^2 T_0 P^\delta P_0^{-\delta}.$$

Преобразуя его к виду

$$(P^{2-\delta})'_x = -(1 - \delta/2) \lambda B m^2 T_0 P_0^{-\delta}$$

и интегрируя от начальной точки $x = 0$, получаем

$$P(x)^{2-\delta} = P_0^{2-\delta} h(x),$$

где $h(x) = 1 - (1 - \delta/2) \lambda B m^2 T_0 P_0^{-2} x$ – линейная функция координаты x . Отметим, что в рассматриваемом случае наблюдается отклонение от закона квадратичного трения. Соответствующее представление для температуры может быть получено с использованием (11):

$$T(x) = T_0 P(x)^\delta P_0^{-\delta} = T_0 h(x)^{\frac{\delta}{2-\delta}}.$$

Полученное выражение представляет собой первое слагаемое $T(x)|_{\alpha=0}$. Значение $\bar{T}(x)|_{\alpha=0}$ может быть получено принятием $\lambda = 0$ в последнем соотношении: $\bar{T}(x)|_{\alpha=0} = T_0$. Вычислим $\partial_\lambda \bar{T}(x)|_{\alpha=0}$. В силу полученного выше представления для $\partial_\lambda \bar{T}(x)$ имеем:

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \bar{T}(x)|_{\alpha=0} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \partial_\lambda \bar{T}(x) = -\delta B m^2 \frac{T_*^2}{P_0^2} \lim_{a \rightarrow 0} \left[e^{-ax} \left(kx + k^2 \frac{1 - e^{-ax}}{2a} + \frac{e^{ax} - 1}{2a} \right) \right] = \\ &= -\delta B m^2 \frac{T_*^2}{P_0^2} \left(kx + k^2 \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \right) = -\delta B m^2 \frac{T_*^2}{P_0^2} (k+1)^2 \frac{x}{2} = -\delta B m^2 \frac{T_0^2}{P_0^2} \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Delta T(x) = T_0 \left(h(x)^{\frac{\delta}{2-\delta}} - 1 + \lambda \delta B m^2 \frac{T_0}{P_0^2} \frac{x}{2} \right).$$

Соответственно новая более точная формула для расчёта температуры может быть представлена в виде

$$T(x) \approx T_1(x) + \Delta T(x) \equiv T_2(x), \quad (16)$$

или, с учётом проведённых выше упрощений функции $T_1(x)$:

$$T(x) \approx T_{11}(x) + \Delta T(x) \equiv T_{21}(x).$$

Обратимся к получению новых формул для расчёта давления. Основная формула (14) не является излишне громоздкой, и её упрощение не представляется актуальным. Поэтому проведём уточнение формулы по принципу, использованному при расчётах температуры. При этом

$$P(x)^2 \approx P_1(x)^2 + \Delta P(x)^2,$$

где

$$\Delta P(x)^2 = P(x)^2 \Big|_{\alpha=0} - \bar{P}(x)^2 \Big|_{\alpha=0} - \lambda \cdot \partial_\lambda \bar{P}(x)^2 \Big|_{\alpha=0}.$$

В силу проведённых выше вычислений

$$\begin{aligned} P(x)^2 \Big|_{\alpha=0} &= P_0^2 h(x)^{\frac{2}{2-\delta}}, \quad \bar{P}(x)^2 \Big|_{\alpha=0} = P_0^2; \\ \partial_\lambda \bar{P}(x)^2 \Big|_{\alpha=0} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \partial_\lambda \bar{P}(x)^2 = -Bm^2 T_* \lim_{a \rightarrow 0} \left[x + k \frac{1-e^{-ax}}{a} \right] = -Bm^2 T_0 x. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Delta P(x)^2 = P_0^2 h(x)^{\frac{2}{2-\delta}} - P_0^2 + \lambda Bm^2 T_0 x,$$

и далее

$$P(x)^2 \approx P_0^2 h(x)^{\frac{2}{2-\delta}} - \lambda Bm^2 (T_0 - T_*) \left(\frac{1-e^{-ax}}{a} - x \right) \equiv P_2(x)^2. \quad (17)$$

Отметим, что полученные формулы для вычисления температуры и интегральное соотношение (9) позволяют построить ряд весьма точных формул для расчёта давления. Остановимся лишь на двух формулах вида

$$P(x)^2 \approx P_0^2 - \lambda Bm^2 \int_0^x T_i(s) ds \equiv P_{2+i}(x)^2,$$

где индекс i принимает значения 1 и 2. Фигурирующие в данном равенстве интегралы элементарно вычисляются в явном виде, но их выражения здесь не приводятся по причине громоздкости.

Анализ точности полученных формул. Рассмотрим вопрос о точности полученных формул. Конечно, можно установить аналитические оценки погрешности вычисления давления и температуры, однако подобные оценки, хотя и могут быть асимптотически точными, содержат, как правило, весьма завышенные значения констант и, следовательно, сами оценки имеют низкую практическую значимость. По этой причине для исследования поставленного вопроса была проведена серия компьютерных экспериментов. Приведём ряд результатов, относящихся к моделированию режимов работы газопровода длиной $L=100$ км, внутренним диаметром $D=1,389$ м с коэффициентом гидравлического сопротивления $\lambda=0,01$ и коэффициентом теплопередачи $\alpha=3$ Вт/(м²·град) при температуре окружающей среды $T_*=10$ °C и начальных условиях $P_0=7,5$ МПа, $T_0=30$ °C, $Q_0=100$ млн. м³/сутки. При проведении расчётов рассматривался природный газ с параметрами $R=520$ Дж/(кг·град), $z=0,9$, $C_p=2700$ Дж/(кг·град), по свойствам близкий к чистому метану. В качестве базовых для сравнения принимались функции $P(x)$ и $T(x)$, представляющие решение основной системы (6), (7) с начальными условиями (8).

Для сравнения брались построенные выше функции $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ для расчёта давления и $T_1(x)$, $T_{11}(x)$, $T_2(x)$, $T_{21}(x)$ для расчёта температуры. При сопоставлении решений использовались две в определённом смысле полярные нормы: максимум и интегральное среднее модуля отклонения. Для функции $P_1(x)$ они вычислялись следующим образом:

$$\|\Delta P_1\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq L} |\Delta P_1(x)|, \quad \|\Delta P_1\|_1 = \frac{1}{L} \int_0^L |\Delta P_1(x)| dx,$$

где отклонение $\Delta P_1(x) = P_1(x) - P(x)$. Аналогичным образом проводился расчёт норм отклонений и для других функций.

Прежде всего, были рассчитаны нормы отклонений $\Delta P(x)$ и $\Delta T(x)$ от базовых функций решения исходной неупрощённой системы (2)-(4) с начальными условиями (8). Установлено, что различие между решениями двух систем пренебрежимо мало:

$$\|\Delta P\|_{\infty} = 2.7, \quad \|\Delta P\|_1 = 1.0 \text{ кПа}; \quad \|\Delta T\|_{\infty} = 0.022, \quad \|\Delta T\|_1 = 0.0075 \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Следовательно, проведённые упрощения исходной системы (2)-(4) с практической точки зрения являются вполне допустимыми и обоснованными.

Для ряда указанных выше функций рассчитанные нормы отклонений приведены в табл. 1.

Как видно из рассмотренного примера, точность полученных формул существенно различна. Отметим, что базовые функции $P(x)$ и $T(x)$ имеют следующие значения осцилляций по длине газопровода, т. е. при $0 \leq x \leq L$:

$$\text{osc}_x P(x) \equiv \max_x P(x) - \min_x P(x) = 2494 \text{ кПа}, \quad \text{osc}_x T(x) = 24.6 \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Таблица 1

Нормы отклонений при низкой степени расширения газа

Тип нормы	Давление, кПа				Температура, $^{\circ}\text{C}$			
	ΔP_1	ΔP_2	ΔP_3	ΔP_4	ΔT_1	ΔT_{11}	ΔT_2	ΔT_{21}
$\ \cdot\ _{\infty}$	83	17	15	2.3	4.74	4.73	0.92	0.93
$\ \cdot\ _1$	24	3.9	3.3	0.42	1.44	1.44	0.22	0.22

Соответственно точность простейших функций $P_1(x)$ и $T_1(x)$ в данном случае может считаться приемлемой с практической точки зрения для проведения оценочных расчётов. Отметим, что в рассмотренном примере степень расширения газа, т. е. отношение $P_0/P(L)$ значений давления на концах газопровода, рассчитанных в соответствии с системой (6), (7), равна 1.498 и лишь незначительно превышает 1.45 – номинальную степень сжатия газа на одной ступени типовых компрессорных станций. Кроме того, как показывают расчёты, различие между "родственными" функциями $T_1(x)$ и $T_{11}(x)$, $T_2(x)$ и $T_{21}(x)$ пренебрежимо малы и не превышают 0.01 $^{\circ}\text{C}$, так что далее будем рассматривать только функции $T_1(x)$ и $T_2(x)$.

Уровень точности полученных формул, как и следует ожидать, снижается с ростом расхода, длины газопровода или степени расширения газа. Рассмотрим предыдущий пример, в котором расход увеличен на 10 % до значения $Q_0 = 110$ млн. $\text{м}^3/\text{сутки}$. Для этих исходных данных степень расширения газа $P_0/P(L) = 1.731$ (увеличилась на 15.6 %), а рассчитанные нормы отклонений возросли в среднем в 1.5-2 раза и приведены в табл. 2.

Таблица 2

Нормы отклонений при повышенной степени расширения газа

Тип нормы	Давление, кПа				Температура, $^{\circ}\text{C}$	
	ΔP_1	ΔP_2	ΔP_3	ΔP_4	ΔT_1	ΔT_2
$\ \cdot\ _{\infty}$	150	28	35	4.7	8.18	1.37
$\ \cdot\ _1$	41	6.0	7.1	0.80	2.35	0.32

Полученные результаты говорят о том, что в условиях повышенной степени расширения газа простейшие функции $T_1(x)$ и $P_1(x)$ дают слишком грубые приближения, и при расчётах следует применять более точные формулы.

В рассмотренных примерах функция $T_2(x)$ даёт преимущество в точности по сравнению с функцией $T_1(x)$ в 5-7 раз. Более того, функция $T_2(x)$ с качественной точки зрения более точно повторяет профиль температуры, который может приобрести немонотонный характер при менее типичных режимах течения, например, когда начальная температура газа ниже температуры окружающей среды, $T_0 < T_*$. Данная ситуация представлена на рисунке для случая $\alpha = 5 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{град})$, $Q_0 = 85$ млн. $\text{м}^3/\text{сутки}$, $T_0 = 0 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Отметим, что в данном примере изменение температуры вдоль трубопровода мало:

$$\text{osc}_x T(x) = 0.786 \text{ }^{\circ}\text{C};$$

при этом $P_0/P(L)=1.267$, и даже простейшая функция $P_1(x)$ даёт приемлемые по точности результаты.

Заключение

1. Проводя последовательно предлагаемый принцип построения расчётных формул путём дифференцирования по параметру систем уравнений, следовало для повышения порядка точности применить дифференцирование не только по параметру λ , но и по α . Такого типа формулы действительно можно построить в явном виде, но, как показывают аналитические рассмотрения и численные расчёты, они являются настолько громоздкими, что теряют удобство практического использования, и, главное, не дают существенного повышения точности расчётов по сравнению с представленными функциями.

2. Построенные формулы не обладают полугрупповым свойством, характерным для автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и естественным для процессов течения газа в трубопроводе. Однако грубого нарушения этого свойства не наблюдается, а имеющиеся отклонения не имеют большого практического значения. Не обладают этим свойством и другие известные аналитические формулы расчётов.

3. На базе полученных приближённых формул можно построить быстрые алгоритмы численного решения рассмотренных систем дифференциальных уравнений.

График температуры $T(x)$ и её аппроксимаций $T_1(x)$ и $T_2(x)$ в немонотонном случае

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Павлович Н. В. Справочник по теплофизическим свойствам природных газов и их компонентов. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1962. 120 с.
2. Общесоюзные нормы технологического проектирования. Магистральные трубопроводы. Часть I. Газопроводы. Киев: Изд. ВНИПИТрансгаз, 1985.
3. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975. 352 с.
4. Термогидродинамика систем добычи и транспорта газа // Бондарев Э. А., Васильев В. И., Воеводин А. Ф. и др. Новосибирск: Наука, 1988. 272 с.
5. Чарный И. А. Неустойчивое движение реальной жидкости в трубах. М.: Недра, 1975. 296 с.
6. Лежнёв А. В., Цалюк В.З. Сравнение моделей течения газа в трубопроводе // Численные методы и автоматизация исследований в гидро-газодинамике, гидравлике и гидротехническом строительстве береговой зоны морей Краснодарского края и других регионов. Материалы научно-техн. конф. Сочи. 1988. С. 128-129.
7. Лежнёв А. В. Идентификация коэффициента теплопередачи газопровода // Математическое моделирование и краевые задачи // Мат. моделирование и краевые задачи. Тр. тринадцатой межвуз. конф.-ции. Часть 2. Самара: СамГТУ, 2003. С. 62-65.
8. Лежнёв А. В. Идентификация параметров математической модели газопровода // Научная мысль Кавказа. Приложение. Ростов: Изд-во СКНЦ ВШ, 2003. № 11. С. 106-112.
9. Лежнёв А. В. Идентификация параметров математической модели негоризонтального газопровода // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Техн. науки. 2004. № 20. С. 26-33.

Поступила 19.07.2004 г.