Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Прохоров, И. А. Лёзин, И. В. Солдатова, Аппроксимация законов распределения ортогональными полиномами, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005, выпуск 34, 128–136

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu346>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 05:24:35

С.А. Прохоров, И.А. Лезин, И.В. Солдатова

АППРОКСИМАЦИЯ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ПОЛИНОМАМИ

Приводится методика и алгоритмы аппроксимативного анализа законов распределения случайных процессов ортогональными полиномами Лежандра, Чебышева, Лагерра Эрмита, положенными в основу разработанной автоматизированной системы

При обработке статистического материала часто приходится решать вопрос о том, как подобрать для данного статистического ряда теоретическую кривую распределения, выражающую лишь существенные черты статистического материала. Такая задача, относящаяся к классу аппроксимативных задач, в данном случае называется задачей выравнивания (сглаживания) статистических рядов [1].

Р и с. 1. Блок-схема сглаживания статистических рядов

Авторами разработана автоматизированная система аппроксимативного анализа плотностей распределения вероятностей, являющаяся дальнейшим развитием разработанных ранее систем, используемая как при подготовке специалистов в области обработки информации и управления, так и при проведении научных исследований [2, 3].

Система включает в себя следующие подсистемы:
 задания входных воздействий;
 генерирования временных рядов с заданным законом распределения;
 первичной статистической обработки временных рядов;
 идентификации законов распределения по фазовым портретам;
 аппроксимации плотностей распределения ортогональными полиномами Лежандра, Чебышева, Лагерра, Эрмита [4];
 сплайн-интерполяции;
 работы с базой данных.

В основу работы системы положены как традиционные алгоритмы генерирования временных рядов с заданными законами распределения, первичной обработки информации, связанной с оценкой числовых характеристик, построения гистограммы, так и оригинальные алгоритмы аппроксимации плотностей распределения вероятностей классическими ортогональными полиномами.

Последовательность этапов решения задачи сглаживания представлена на рис. 1 [2].

После ввода исходных данных важным и не формализованным шагом решения этой задачи является построение гистограммы наблюдаемого статистического ряда $\{x_i\}_{i=1}^N$. Для этого необходимо выполнить нижеследующие этапы.

1. Определить диапазон изменения статистического ряда $x_{min} - x_{max}$.

2. При неизвестном законе распределения определить ширину дифференциального коридора:

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{M}, \quad (1)$$

где M - количество дифференциальных коридоров [1].

Из выражения (1) следует, что значение величины M не определено и, следовательно, исследователь должен задать её самостоятельно, ориентируясь на рекомендации специалистов. Как следует из литературных источников, значение M рекомендуется выбирать в диапазоне от 10 до 20 [1].

При известном или предполагаемом законе распределения при линейной интерполяции функции распределения величина Δx определяется выражением

$$\Delta x = \sqrt{\frac{8\delta}{|F''(x)|_{\max}}}, \quad (2)$$

где δ - погрешность аппроксимации функции распределения; $|F''(x)|_{\max}$ - максимум модуля второй производной функции распределения [2];

$$M = \text{ent} \left[\frac{x_{\max} - x_{\min}}{\Delta x} \right]. \quad (3)$$

3. Определить частоту попадания анализируемой случайной величины в j -тый дифференциальный коридор:

$$\hat{p}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{ij}, \quad (4)$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \text{ent} \left[\frac{x_i - x_{\min}}{\Delta x} \right] + l = j \wedge x_i = x_{\max}; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x_i = j \Delta x; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (5)$$

- индикатор состояния.

Следует отметить, что $\delta_{i,j+l} = 1/2$, если $x_i = j\Delta x \wedge x_i \neq x_{\max}$, т.е. в этом случае в j и $j+l$ коридоры добавляется по $1/2$.

4. Если частота попадания в какой-либо k -тый дифференциальный коридор мала ($p_j < 0,01 \div 0,02$), то для уменьшения влияния случайности его объединяют с $k+l$ коридором. Эта операция может быть применена неоднократно.

Исходя из условия нормировки

$$\sum_{j=1}^M \hat{h}_j \cdot \Delta x = 1, \quad (6)$$

вычисляем высоту столбцов:

$$\hat{h}_j = \frac{\hat{p}_j}{\Delta x}. \quad (7)$$

Далее на интервале $[x_{\min}, x_{\max}]$ строится линейная сплайн-модель. Для этого введем массив пар $\{x_j, y_j\}, j = \overline{1, M}$, где x_j - середина j -того интервала гистограммы, а $y_j = \hat{h}_j$ - соответственно высота j -того столбца. Значения сплайн-модели рассчитываются следующим образом:

$$f_{s,M}(x) = \begin{cases} y_1 + (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) \cdot (x - x_1), & x < x_1, \\ y_j + (y_{j+1} - y_j)/(x_{j+1} - x_j) \cdot (x - x_j), & x_j < x < x_{j+1}, \\ y_{M-1} + (y_M - y_{M-1})/(x_M - x_{M-1}) \cdot (x - x_{M-1}), & x > x_{M-1}. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь $f_{s,M}(x)$ - линейный сплайн, построенный на M дифференциальных коридорах, который представляет собой модель аппроксимируемой плотности вероятности.

Очевидно, что внешний вид сплайн-модели сильно зависит от количества дифференциальных коридоров, причем утверждать однозначно, при каком именно значении M сплайн-модель наилучшим образом соответствует истинной плотности вероятности, невозможно. Поэтому зачастую целесообразнее применять механизм "усреднения" модели плотности вероятности по нескольким сплайн-моделям.

С использованием (8) для расчета сплайн-модели плотности вероятности усредненная модель определяется по формуле

$$\bar{f}_{s,M}(x) = \frac{\sum_{m=M-l}^{M+l} f_{s,m}(x)}{2l+1}. \quad (9)$$

В данном случае в точке x суммируются значения $2l+1$ сплайн-моделей, построенных на одних и тех же исходных выборках для различного числа коридоров M (от $M-l$ до $M+l$), затем сумма делится на количество просуммированных значений $2l+1$, тем самым определяется среднее значение для указанного ряда сплайнов.

Следующим этапом решения задачи сглаживания является идентификация законов распределения [2]. В том случае, когда закон распределения в виде функций определенного вида с неизвестными параметрами подобрать не удастся, единственным способом является применение ортогональных разложений в том или ином базисе. Отметим, что плотность распределения вероятности может находиться в следующих диапазонах $(-\infty, \infty)$, $(-\infty, a]$, $[b, \infty)$ (см. рис. 2):

Р и с. 2. Типовые законы распределения:
а- нормальный закон; б- экспоненциальный закон

Таким образом, при построении модели плотности распределения вероятности необходимы ортогональные функции или полиномы, ортогональные как на конечном, так и на бесконечном (полубесконечном) интервалах: Лежандра, Чебышева, Лагерра, Эрмита [4].

Рассмотрим возможность аппроксимации плотности вероятности произвольного вида ортогональными полиномами. Дана функция вида $f(x)$, определенная на интервале $[L, R]$. Она может быть разложена в абсолютно сходящийся ряд вида [4]:

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \cdot \psi_k(x), \quad (10)$$

где β_k – коэффициенты Фурье, $\psi_k(x)$ – семейство базисных функций, ортогональных на определенном интервале с весом $\mu(x)$. Это семейство характеризуется интегралом:

$$\int_L^R \psi_k(x) \psi_n(x) \mu(x) dx = \begin{cases} \|\psi_n\|^2, & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases} \quad (11)$$

где $[L, R]$ – интервал, на котором выполняется условие ортогональности указанных функций.

Следует подчеркнуть, что на практике приходится ограничиваться конечным числом членов ряда (10). Это приводит к появлению методической погрешности, значение которой зависит в немалой степени от способа оценки параметров модели.

Поэтому для модели аппроксимирующей функции

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(x), \quad (12)$$

имеющей ограниченное число параметров, коэффициенты разложения, обеспечивающие минимум среднеквадратической погрешности аппроксимации:

$$\Delta = \int_L^R \left[f(x) - \sum_{k=0}^n \beta_k \cdot \psi_k(x) \right]^2 \mu(x) dx = \min, \quad (13)$$

определяются по формуле [3]

$$\beta_k = \int_L^R f(x) \psi_k(x) \mu(x) dx. \quad (14)$$

При таком способе определения коэффициентов разложения погрешность аппроксимации, с учетом свойств ортогональных полиномов, равна

$$\Delta = \int_L^R f^2(x) \mu(x) dx - \sum_{k=0}^m \beta_k^2. \quad (15)$$

Так как выбранная система ортогональных полиномов определена на конкретном интервале, а интервал существования аппроксимируемой функции $[x_{\min}, x_{\max}]$ произволен, то они могут не совпадать. Поэтому приходится вводить коэффициенты линейного переноса, и формула (14) примет вид

$$\beta_k = \frac{1}{a} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x) \psi_k((x-b)/a) \mu((x-b)/a) dx. \quad (16)$$

Примеры аппроксимации различными системами полиномов и значения коэффициентов линейного переноса a и b представлены в табл. 1.

При численном нахождении значения интеграла (16) в силу того, что на границах интервала аппроксимации трудно добиться хорошего приближения, имеет смысл предварительно преобразовать аппроксимируемую функцию так, чтобы ее значение на одном из концов интервала (или сразу на обоих) стало равно нулю. В таком случае удастся точнее посчитать коэффициенты и избежать на концах аппроксимируемой функции явления Гиббса [5].

Преобразование осуществляется по формуле

$$f^{(0)}(x) = f(x) - d \cdot x - c. \quad (17)$$

Значения коэффициентов d и c рассчитываются в зависимости от того, сколько концов функции требуется свести к нулю. Если к нулю сводится левый конец, то коэффициенты рассчитываются по следующим формулам:

$$\begin{cases} d = 0, \\ c = f(x_{\min}). \end{cases} \quad (18)$$

Если сводится только правый конец, то

$$\begin{cases} d = 0, \\ c = f(x_{\max}). \end{cases} \quad (19)$$

Для обоих концов сразу коэффициенты принимают значения:

$$\begin{cases} d = (f(x_{\max}) - f(x_{\min})) / (x_{\max} - x_{\min}), \\ c = f(x_{\min}) - d \cdot x_{\min}. \end{cases} \quad (20)$$

Далее вычисляются коэффициенты разложения для функции $f^{(0)}(x)$:

$$\beta_k^{(0)} = \frac{1}{a} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f^{(0)}(x) \psi_k((x-b)/a) \mu((x-b)/a) dx. \quad (21)$$

Полученные коэффициенты необходимо пересчитать в β_k , которые используются в выражении (12). Массивы коэффициентов отличаются друг от друга только первыми двумя элементами. Примеры расчета коэффициентов для различных ортогональных систем представлены в табл. 2.

Следующим приемом аппроксимации плотности распределения вероятностей, позволяющим уменьшить погрешность, является двухсторонняя аппроксимация. Суть этого метода заключается в том, что какая-то определенная точка $\bar{x}$ (например, точка экстремума) разбивает интервал аппроксимации функции $[x_{\min}, x_{\max}]$ на два независимых интервала $[x_{\min}, \bar{x}]$ и $[\bar{x}, x_{\max}]$. На каждом из них функцию аппроксимируют отдельно, что в ряде случаев позволяет значи-

тельно улучшить результат, уменьшив погрешность и сократив количество членов в разложении функции $\hat{f}(x)$. Тогда функция $\hat{f}(x)$ записывается с использованием единичной функции:

$$1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \quad (22)$$

Т а б л и ц а 1

Примеры расчета коэффициентов

Полиномы	Основные соотношения	Коэффициенты
Лежандра [−1;1]	$\mu(x) = 1;$ $P_k(x) = \sum_{s=0}^{k \div 2} a_s \cdot x^{k-2s},$ $a_s = (-1)^s \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot k + 1}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(2k-2s)!}{2k \cdot s! \cdot (k-s)! \cdot (k-2s)!}$	$\beta_k = \frac{1}{a} \int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x) P_k((x-b)/a) dx,$ $a = \frac{x_{max} - x_{min}}{2},$ $b = \frac{x_{max} + x_{min}}{2}$
Чебышева [−1;1]	$\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$ $T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}},$ $T_k(x) = \sum_{s=0}^{k \div 2} a_s \cdot x^{k-2s};$ $a_s = (-1)^s \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2^{k-2s-1} \cdot \frac{k(k-s-1)!}{s! \cdot (k-2s)!}$	$\beta_k = \frac{1}{a} \int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x) T_k((x-b)/a) / \sqrt{1-((x-b)/a)^2} dx$ $a = \frac{x_{max} - x_{min}}{2},$ $b = \frac{x_{max} + x_{min}}{2}$
Лагерра [0;∞)	$\mu(x) = e^{-x}$ $L_0(x) = 1,$ $L_k(x) = \sum_{s=0}^k a_s \cdot x^s;$ $a_s = (-1)^s \cdot \frac{k!}{(s!)^2 \cdot (k-s)!}$	$\beta_k = \int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x) L_k((x-b)/a) e^{-(x-b)/a} dx$ $a = 1,$ $b = x_{min}$
Эрмита (−∞;+∞)	$H_k(x) = \sum_{s=0}^{k \div 2} a_s \cdot x^{k-2s},$ $a_s = (-1)^s \cdot \sqrt{\frac{k!}{2^k \cdot \sqrt{\pi}}} \cdot \frac{2^{k-2s}}{s! \cdot (k-2s)!}$	$\beta_k = \int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x) H_k((x-b)/a) e^{-((x-b)/a)^2} dx,$ $a = 1,$ $b = (x_{max} + x_{min})/2$

Выражение (12) с учетом (22) представим в виде

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) = & \sum_{k=0}^{m_{\Pi}} \beta_{k,\Pi} \cdot \psi_{k,\Pi}((x-b_{\Pi})/a_{\Pi}) \cdot 1(\bar{x}-x) + \\ & + \sum_{i=0}^{m_{\Pi}} \beta_{k,\Pi} \cdot \psi_{k,\Pi}((x-b_{\Pi})/a_{\Pi}) \cdot 1(x-\bar{x}). \end{aligned} \quad (23)$$

Так как границы интегрирования изменились, то теперь коэффициенты рассчитываются по модифицированным формулам:

$$\beta_{k,\Pi} = \frac{1}{|a_{\Pi}|} \int_{x_{min}}^{\bar{x}} f(x) \psi_{k,\Pi}((x-b_{\Pi})/a_{\Pi}) \mu_{\Pi}((x-b_{\Pi})/a_{\Pi}) dx; \quad (24)$$

$$\beta_{k,\Pi} = \frac{1}{|a_\Pi|} \int_{\bar{x}}^{x_{\max}} f(x) \psi_{k,\Pi}((x - b_\Pi)/a_\Pi) \mu_\Pi((x - b_\Pi)/a_\Pi) dx \quad (25)$$

для левой и правой ветви соответственно.

Т а б л и ц а 2

Пересчет коэффициентов при сведении к нулю

Полиномы	Пересчет коэффициентов
Лежандра	$\beta_0 = \beta_0^{(0)} + (c + d \cdot b) \cdot \sqrt{2},$ $\beta_1 = \beta_1^{(0)} + d \cdot a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}},$ $\beta_k = \beta_k^{(0)}, k = \overline{2, \dots, m}$
Чебышева	$\beta_0 = \beta_0^{(0)} + (c + d \cdot b) \cdot \sqrt{\pi},$ $\beta_1 = \beta_1^{(0)} + d \cdot a \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}},$ $\beta_k = \beta_k^{(0)}, k = \overline{2, \dots, m}$
Лагерра	$\beta_0 = \beta_0^{(0)} + c + d \cdot (b + a),$ $\beta_1 = \beta_1^{(0)} - d \cdot c,$ $\beta_k = \beta_k^{(0)}, k = \overline{2, \dots, m}$
Эрмита	$\beta_0 = \beta_0^{(0)} + (c + d \cdot b) \cdot \sqrt[4]{\pi},$ $\beta_1 = \beta_1^{(0)} + d \cdot a \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{\pi}}{2}},$ $\beta_k = \beta_k^{(0)}, k = \overline{2, \dots, m}$

Коэффициенты линейного переноса также изменяются соответственно изменению интервалов интегрирования.

Зачастую при двусторонней аппроксимации используют операцию совмещения максимумов. Смысл данной операции состоит в том, что после вычисления коэффициентов для выражения (23) их нормируют, то есть совмещают в точке $\bar{x}$ значения аппроксимирующих выражений для обеих ветвей со значением аппроксимируемой функции. Этот подход дает возможность использовать комбинированные модели, т.е. применять для аппроксимации левой и правой ветвей различные ортогональные полиномы, соответствующие наилучшим образом области существования плотности распределения вероятностей.

Для этого требуется выполнение условий

$$\begin{cases} \hat{f}(\bar{x}) = \sum_{k=0}^{m_\Pi} \beta_{k,\Pi} \cdot \psi_{k,\Pi}((\bar{x} - b_\Pi)/a_\Pi); \\ \hat{f}(\bar{x}) = \sum_{k=0}^{m_\Pi} \beta_{k,\Pi} \cdot \psi_{k,\Pi}((\bar{x} - b_\Pi)/a_\Pi). \end{cases} \quad (26)$$

Так как при конечных значениях m_Π и m_Π условие (26) не выполняется, для его обеспечения необходимо искать аналитическое выражение для $\hat{f}(x)$ в виде

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=0}^{m_\Pi} b_{k,\Pi} \cdot \psi_{k,\Pi}((x - b_\Pi)/a_\Pi) \cdot 1(x - \bar{x}) + \sum_{k=0}^{m_\Pi} b_{k,\Pi} \cdot \psi_{k,\Pi}((x - b_\Pi)/a_\Pi) \cdot 1(\bar{x} - x). \quad (27)$$

Для того, чтобы квадратическая погрешность аппроксимации была минимальной при дополнительных условиях (26), необходимо минимизировать Δ_Π и Δ_Π по $b_{n,\Pi}$ и $b_{n,\Pi}$ соответственно:

$$\begin{cases} \Delta_{\mathcal{L}} = \int_{x_{\min}}^{\bar{x}} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{m_{\mathcal{L}}} b_{k,\mathcal{L}} \cdot \psi_{k,\mathcal{L}}((x - b_{\mathcal{L}})/a_{\mathcal{L}}) \right]^2 dx + \lambda_{\mathcal{L}} \sum_{k=0}^{m_{\mathcal{L}}} b_{k,\mathcal{L}} \cdot \psi_{k,\mathcal{L}}((x - b_{\mathcal{L}})/a_{\mathcal{L}}); \\ \Delta_{\mathcal{I}} = \int_x^{x_{\max}} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{m_{\mathcal{I}}} b_{k,\mathcal{I}} \cdot \psi_{k,\mathcal{I}}((x - b_{\mathcal{I}})/a_{\mathcal{I}}) \right]^2 dx + \lambda_{\mathcal{I}} \sum_{k=0}^{m_{\mathcal{I}}} b_{k,\mathcal{I}} \cdot \psi_{k,\mathcal{I}}((x - b_{\mathcal{I}})/a_{\mathcal{I}}). \end{cases} \quad (28)$$

Найдем частные производные $\frac{\partial \Delta_{\mathcal{L}}}{\partial b_{n,\mathcal{L}}}$, $\frac{\partial \Delta_{\mathcal{I}}}{\partial b_{n,\mathcal{I}}}$ и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta_{\mathcal{L}}}{\partial b_{n,\mathcal{L}}} = -2 \int_{x_{\min}}^{\bar{x}} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{m_{\mathcal{L}}} b_{k,\mathcal{L}} \cdot \psi_{k,\mathcal{L}}((x - b_{\mathcal{L}})/a_{\mathcal{L}}) \right] \psi_{n,\mathcal{L}}((x - b_{\mathcal{L}})/a_{\mathcal{L}}) dx + \\ + \lambda_{\mathcal{L}} \psi_{n,\mathcal{L}}((x - b_{\mathcal{L}})/a_{\mathcal{L}}) = 0; \\ \frac{\partial \Delta_{\mathcal{I}}}{\partial b_{n,\mathcal{I}}} = -2 \int_x^{x_{\max}} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{m_{\mathcal{I}}} b_{k,\mathcal{I}} \cdot \psi_{k,\mathcal{I}}((x - b_{\mathcal{I}})/a_{\mathcal{I}}) \right] \psi_{n,\mathcal{I}}((x - b_{\mathcal{I}})/a_{\mathcal{I}}) dx + \\ + \lambda_{\mathcal{I}} \psi_{n,\mathcal{I}}((x - b_{\mathcal{I}})/a_{\mathcal{I}}). \end{cases} \quad (29)$$

Выполнив промежуточные преобразования, получим

$$\begin{cases} b_{n,\mathcal{L}} = \beta_{n,\mathcal{L}} - \frac{\lambda_{\mathcal{L}}}{2} \psi_{n,\mathcal{L}}((\bar{x} - b_{\mathcal{L}})/a_{\mathcal{L}}); \\ b_{n,\mathcal{I}} = \beta_{n,\mathcal{I}} - \frac{\lambda_{\mathcal{I}}}{2} \psi_{n,\mathcal{I}}((\bar{x} - b_{\mathcal{I}})/a_{\mathcal{I}}). \end{cases} \quad (30)$$

С учетом (26) определим

$$\begin{cases} \lambda_{\mathcal{L}} = \frac{2 \left(\sum_{k=0}^{m_{\mathcal{L}}} \beta_{k,\mathcal{L}} \cdot \psi_{k,\mathcal{L}}((\bar{x} - b_{\mathcal{L}})/a_{\mathcal{L}}) - f(\bar{x}) \right)}{\sum_{k=0}^{m_{\mathcal{L}}} \psi_{k,\mathcal{L}}^2((\bar{x} - b_{\mathcal{L}})/a_{\mathcal{L}})}; \\ \lambda_{\mathcal{I}} = \frac{2 \left(\sum_{k=0}^{m_{\mathcal{I}}} \beta_{k,\mathcal{I}} \cdot \psi_{k,\mathcal{I}}((\bar{x} - b_{\mathcal{I}})/a_{\mathcal{I}}) - f(\bar{x}) \right)}{\sum_{k=0}^{m_{\mathcal{I}}} \psi_{k,\mathcal{I}}^2((\bar{x} - b_{\mathcal{I}})/a_{\mathcal{I}})}. \end{cases} \quad (31)$$

Подставив это выражение в выражение для оценки коэффициентов разложения (30), окончательно получим

$$\begin{cases} b_{n,\mathcal{L}} = \beta_{n,\mathcal{L}} + \frac{f(\bar{x}) - \sum_{k=0}^{m_{\mathcal{L}}} \beta_{k,\mathcal{L}} \cdot \psi_{k,\mathcal{L}}((\bar{x} - b_{\mathcal{L}})/a_{\mathcal{L}})}{\sum_{k=0}^{m_{\mathcal{L}}} \psi_{k,\mathcal{L}}^2((\bar{x} - b_{\mathcal{L}})/a_{\mathcal{L}})} \psi_{n,\mathcal{L}}((\bar{x} - b_{\mathcal{L}})/a_{\mathcal{L}}); \\ b_{n,\mathcal{I}} = \beta_{n,\mathcal{I}} + \frac{f(\bar{x}) - \sum_{k=0}^{m_{\mathcal{I}}} \beta_{k,\mathcal{I}} \cdot \psi_{k,\mathcal{I}}((\bar{x} - b_{\mathcal{I}})/a_{\mathcal{I}})}{\sum_{k=0}^{m_{\mathcal{I}}} \psi_{k,\mathcal{I}}^2((\bar{x} - b_{\mathcal{I}})/a_{\mathcal{I}})} \psi_{n,\mathcal{I}}((\bar{x} - b_{\mathcal{I}})/a_{\mathcal{I}}). \end{cases} \quad (32)$$

В табл. 3 приведены значения коэффициентов $b_{n,\mathcal{L}}$ и $b_{n,\mathcal{I}}$ для различных систем ортогональных полиномов.

Так как полиномы являются степенными функциями, то от представления (12) можно перейти к степенному представлению аппроксимирующей функции, пересчитав коэффициенты. В таком случае общий вид аппроксимирующей функции выглядит так:

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=0}^m \beta_{k,f} \cdot ((x - b)/a)^k, \quad x \in [x_{\min}, x_{\max}]. \quad (33)$$

В табл. 4 приведены формулы расчета коэффициентов $\beta_{k,f}$ в формуле (32) для различных систем полиномов. Применяемые в табл. 4 обозначения $a_{s,s+2m}$ – это коэффициенты a_s полинома степени $s+2m$, используемые в табл. 1.

Т а б л и ц а 3

Коэффициенты разложения при двусторонней аппроксимации

Полиномы	Коэффициенты
Лежандра	$b_{n,\Pi} = \beta_{n,\Pi} + \frac{f(\bar{x}) - \sum_{k=0}^{m_{\Pi}} \beta_{k,\Pi} \cdot P_k(1)}{\sum_{k=0}^{m_{\Pi}} P_k^2(1)} P_n(1),$ $b_{n,\Pi} = \beta_{n,\Pi} + \frac{f(\bar{x}) - \sum_{k=0}^{m_{\Pi}} \beta_{k,\Pi} \cdot P_k(-1)}{\sum_{k=0}^{m_{\Pi}} P_k^2(-1)} P_n(-1)$
Чебышева	$b_{n,\Pi} = \beta_{n,\Pi} + \frac{f(\bar{x}) - \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \beta_{0,\Pi} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{m_{\Pi}} \beta_{k,\Pi} \right)}{\frac{1 + 2 \cdot m_{\Pi}}{\pi}} T_n(1),$ $b_{n,\Pi} = \beta_{n,\Pi} + \frac{f(\bar{x}) - \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \beta_{0,\Pi} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{m_{\Pi}} (-1)^k \cdot \beta_{k,\Pi} \right)}{\frac{1 + 2 \cdot m_{\Pi}}{\pi}} T_n(-1)$
Лагерра	$b_{n,\Pi} = \beta_{n,\Pi} + \frac{f(\bar{x}) - \sum_{k=0}^{m_{\Pi}} \beta_{k,\Pi}}{m_{\Pi} + 1},$ $b_{n,\Pi} = \beta_{n,\Pi} + \frac{f(\bar{x}) - \sum_{k=0}^{m_{\Pi}} \beta_{k,\Pi}}{m_{\Pi} + 1}$

Т а б л и ц а 4

Коэффициенты степенного ряда

Полиномы	Коэффициенты
Лежандра, Чебышева, Эрмита	$\beta_{k,f} = \sum_{s=0}^{(m-k) \text{ div } 2} \beta_{k+2s} \cdot a_{s,k+2s}, k = \overline{0, \dots, m}$
Лагерра	$\beta_{k,f} = \sum_{s=k}^n \beta_s \cdot a_{k,s}, k = \overline{0, \dots, m}$

Заметим, что по полученному аналитическому выражению плотности распределения вероятностей легко находится аналитическое выражение и функции распределения:

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{\min}, \\ \int_{x_{\min}}^x \hat{f}((x-b)/a) dx, & x_{\min} < x < x_{\max}, \\ 1, & x \geq x_{\max}. \end{cases} \quad (34)$$

Коэффициенты восстановленной функции распределения $\beta_{i,F}$ определяются следующим образом:

$$\begin{cases} \beta_{i,F} = \beta_{i-1,f} \cdot a / i, i = \overline{1, n+1}; \\ \beta_{0,F} = -\sum_{i=1}^{n+1} \beta_{i,F} \cdot ((x_{\min} - b)/a)^i. \end{cases} \quad (35)$$

Соответственно выражение для функции распределения с учетом (35) запишется в виде

$$\hat{F}(x) = \sum_{i=0}^{n+1} \beta_{i,F} ((x-b)/a)^i. \quad (36)$$

На рис. 3 приведен пример реализации случайного процесса – оборотов газотурбинного двигателя при пуске. В качестве примера для выборки, приведенной на рис. 3, построена аппроксимационная аналитическая модель плотности вероятностей, график которой представлен на рис. 4.

Р и с. 3. Обороты газотурбинного двигателя при пуске

Р и с. 4. Аппроксимированная плотность вероятностей

Таким образом, в настоящей работе приведена и реализована методика построения аналитических выражений для законов распределения случайных процессов, заданных графически.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1969. 576 с.
2. *Прохоров С.А.* Аппроксимативный анализ случайных процессов / 2-е изд., перераб. и доп. Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т. 2001. 380 с.
3. *Прохоров С.А.* Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум / 2-е изд., перераб. и доп. Самара: СНЦ РАН, 2001. 380 с.
4. *Д. Джексон.* Ряды Фурье и ортогональные полиномы. М.: ГИИЛ, 1948. 260 с.
5. *Андре Анго.* Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1965. 780 с.

Поступила 19.05.2004 г.