Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Ефимова, Нелокальная задача для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005, выпуск 34, 194–196

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu356>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 16:37:04

Краткие сообщения

Дифференциальные уравнения

УДК 517.956.32

С.В.Ефимова

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ, ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ВНУТРИ ОБЛАСТИ

Поставлена и исследована новая нелокальная краевая задача для частного случая уравнения влагопереноса. Характерной её особенностью является наличие операторов дробного интегродифференцирования в краевом условии. Доказана однозначная разрешимость рассматриваемой задачи, причём её решение получено в явном виде.

Введение. Рассмотрим уравнение

$$Lu = y^2 u_{xx} - u_{yy} + u_x = 0 \quad (1)$$

в области D , являющейся объединением двух характеристических треугольников: $\Delta ABC_1 = D_1$ с вершинами $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C_1(1/2; -1)$ и $\Delta ABC_2 = D_2$ с вершинами A , B , $C_2(1/2; 1)$.

Введём следующие обозначения: $I = AB$, $\theta_0^{(1)}(x)$ и $\theta_0^{(2)}(x)$ - аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x; 0) \in I$, с характеристиками AC_1 и AC_2 соответственно; $(I_{0+}^\alpha f)(x)$, $(D_{0+}^\alpha f)(x)$ - операторы дробного интегродифференцирования в смысле Римана - Лиувилля [1, 2]; $H^\lambda[0; 1]$ ($0 < \lambda \leq 1$) - класс функций, удовлетворяющих на отрезке $[0; 1]$ условию Гёльдера порядка λ ; $H_0^\lambda[0; 1] = \{f(x) \in H^\lambda[0; 1] : f(0) = f(1) = 0\}$ ($0 < \lambda \leq 1$), $H_0^\lambda(\rho, [0; 1]) = \{f(x) : \rho(x)f(x) \in H_0^\lambda[0; 1]\}$ ($0 < \lambda \leq 1$, $\rho(x) \geq 0$).

Для уравнения (1) поставим и исследуем следующую задачу.

Задача. Найти функцию $u(x; y)$ со свойствами:

- 1) $Lu \equiv 0$ в области $D = D_1 \cup D_2$;
- 2) $u(x; y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \setminus I) \cap C^2(D \setminus I)$;
- 3) $u(x; -0) = u(x; +0)$ ($x \in \overline{I}$), $\lim_{y \rightarrow 0-} u_y(x; y) = \lim_{y \rightarrow 0+} u_y(x; y)$ ($x \in I$);
- 4) $A_1 I_{0+}^{\alpha_1} u(\theta_0^{(1)}(x)) + B_1 I_{0+}^{\alpha_1} u(x; -0) = g_1(x)$, $\forall x \in I$,
 $A_2 I_{0+}^{\alpha_2} u(\theta_0^{(2)}(x)) + B_2 I_{0+}^{\alpha_2} u(x; +0) = g_2(x)$, $\forall x \in I$,

где $g_1(x)$, $g_2(x)$ - заданные функции такие, что

$$g_i(x) \in H_0^{\lambda_i}[0; 1], i = 1, 2, \quad (2)$$

$A_1, A_2, B_1, B_2, \alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ - заданные константы такие, что

$$A_1 A_2 (A_1 + B_1)(A_2 + B_2) > 0; \quad (3)$$

$$2A_1 A_2 + A_1 B_2 + A_2 B_1 \neq 0; \quad (4)$$

$$\alpha_i > 0, i = 1, 2; \quad (5)$$

$$\alpha_i + 1/2 < \lambda_i < 1, i = 1, 2. \quad (6)$$

Единственность решения задачи. Пусть существует решение исследуемой задачи. Введём обозначения:

$$u(x; -0) = \tau_1(x), u(x; +0) = \tau_2(x), \lim_{y \rightarrow 0-} u_y(x; y) = v_1(x), \lim_{y \rightarrow 0+} u_y(x; y) = v_2(x). \quad (7)$$

Используя решение задачи Коши в областях D_1 и D_2 [3]

$$u(x; y) = \tau(x + \frac{1}{2}y^2) + \frac{y}{2} \int_0^1 v(x + (1-2t)\frac{y^2}{2}) \frac{dt}{\sqrt{t}},$$

находим

$$u(\theta_0^{(i)}(x)) = \tau_i(x) + (-1)^i \frac{\sqrt{\pi}}{2} (I_{0+}^{1/2} v_i)(x), \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

Подставив (8) в краевое условие 4) с учётом формулы [4]

$$(I_{0+}^\alpha (I_{0+}^\gamma f)(t))(x) = (I_{0+}^{\alpha+\gamma} f)(x), \quad \gamma > 0, \quad (9)$$

и обозначений (7), получим соотношения между $\tau_i(x)$ и $v_i(x)$, $i = 1, 2$, принесённых на I из областей D_1 и D_2 соответственно:

$$(A_i + B_i)(I_{0+}^{\alpha_i} \tau_i)(x) + (-1)^i \frac{\sqrt{\pi} A_i}{2} (I_{0+}^{\alpha_i+1/2} v_i)(x) = g_i(x). \quad (10)$$

Применяя к обеим частям (10) оператор $I_{0+}^{-(\alpha_i+1/2)}$ и используя свойства операторов дробного интегриродифференцирования (9), соотношение [5]

$$(I_{0+}^{-\alpha} f)(x) = (D_{0+}^\alpha f)(x), \quad \alpha > 0, \quad (11)$$

что возможно в силу (5), а также учитывая (3), имеем

$$v_i(x) = (-1)^i \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{A_i} (D_{0+}^{\alpha_i+1/2} g_i)(x) - \frac{A_i + B_i}{A_i} (D_{0+}^{1/2} \tau_i)(x) \right]. \quad (12)$$

Согласно краевому условию 3) положим

$$\tau(x) = \tau_1(x) = \tau_2(x). \quad (13)$$

Тогда при $g_1(x) = g_2(x) = 0$ равенства (12) переписутся так:

$$v_i(x) = (-1)^{i+1} \frac{2(A_i + B_i)}{\sqrt{\pi} A_i} (D_{0+}^{1/2} \tau)(x).$$

В силу принципа экстремума для гиперболических уравнений [6] положительный максимум (отрицательный минимум) функции $u(x; y)$ достигается в областях $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_2$ в точке $(x_0; 0) \in I$. Пользуясь тем, что дробные производные в точке положительного максимума строго положительны (в точке отрицательного минимума строго отрицательны) [2], и учитывая (3), получаем: $v_1(x_0)$ и $v_2(x_0)$ - разных знаков. Это противоречит условию сопряжения 3). Полученное противоречие доказывает единственность решения задачи.

Существование решения задачи. Подействуем на обе части (10) оператором $I_{0+}^{-\alpha_i}$. В силу (9), (11), (13) и условий (5), (3) придём к соотношениям

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \frac{1}{A_1 + B_1} (D_{0+}^{\alpha_1} g_1)(x) + \frac{A_1 \sqrt{\pi}}{2(A_1 + B_1)} (I_{0+}^{1/2} v_1)(x), \\ \tau(x) &= \frac{1}{A_2 + B_2} (D_{0+}^{\alpha_2} g_2)(x) - \frac{A_2 \sqrt{\pi}}{2(A_2 + B_2)} (I_{0+}^{1/2} v_2)(x), \end{aligned}$$

откуда

$$\gamma (I_{0+}^{1/2} v)(x) = -\frac{1}{A_1 + B_1} (D_{0+}^{\alpha_1} g_1)(x) + \frac{1}{A_2 + B_2} (D_{0+}^{\alpha_2} g_2)(x), \quad (14)$$

где $\gamma = \frac{A_1 \sqrt{\pi}}{2(A_1 + B_1)} + \frac{A_2 \sqrt{\pi}}{2(A_2 + B_2)}$, $v(x) = v_1(x) = v_2(x)$ (см. 3)).

Применяя к обеим частям (14) оператор $I_{0+}^{-1/2}$ и учитывая (9), (11), формулу [5] $D_{0+}^\alpha D_{0+}^\beta f = D_{0+}^{\alpha+\beta} f$ ($\alpha > 0, \beta > 0$), а также (3), (4), (5), найдём $v(x)$:

$$v(x) = -\frac{1}{\gamma(A_1 + B_1)} (D_{0+}^{\alpha_1+1/2} g_1)(x) + \frac{1}{\gamma(A_2 + B_2)} (D_{0+}^{\alpha_2+1/2} g_2)(x).$$

Исследуем гладкость $v(x)$. Для этого нам понадобится лемма [1].

Лемма. Пусть $0 < \alpha < \lambda < 1$, $\lambda - \alpha < 1$ и $\rho(x) = x^\mu$, где $0 \leq \mu < \lambda - \alpha + 1$. Если $\varphi(x) \in H_0^\lambda(\rho, [0; 1])$, то $(D_{0+}^\alpha \varphi)(x) \in H_0^{\lambda-\alpha}(\rho, [0; 1])$.

В силу (2), (5), (6) согласно лемме при $\mu = 0$:

$$(D_{0+}^{\alpha_i+1/2} g_i)(x) \in H_0^{\lambda_i-\alpha_i-1/2}[0; 1], i = 1, 2.$$

Значит, $v(x) \in H_0^{\min\{\lambda_1-\alpha_1-1/2, \lambda_2-\alpha_2-1/2\}}[0; 1]$.

Теорема. Пусть функции $g_1(x), g_2(x)$ удовлетворяют условиям (2), действительные константы $A_1, A_2, B_1, B_2, \alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ - условиям (3)-(6). Тогда задача 1)-4) для уравнения (1) имеет

единственное решение с $v(x) = -\frac{1}{\gamma(A_1 + B_1)}(D_{0+}^{\alpha_1+1/2} g_1)(x) + \frac{1}{\gamma(A_2 + B_2)}(D_{0+}^{\alpha_2+1/2} g_2)(x)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987. 668 с.
2. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2000. 299 с.
3. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
4. Kilbas A.A., Repin O.A., Saigo M. Solution in Closed Form of Boundary Value Problem for Degenerate Equation of Hyperbolic Type// Kyungpook Math. J. 1996. V. 36. №2. P. 261-273.
5. Kilbas A.A., Repin O.A., Saigo M. Nonlocal Problem for the Hyperbolic Equation with Fractional Derivatives in the Boundary Condition// Math. Japan. 2003. V. 33. №2. P. 1-8.
6. Agmon S., Nirenberg L., Protter M.N. A maximum principle for a class of hyperbolic equation and applications to mixed elliptic-hyperbolic type// Commun Pure and Appl. Math. 1953. V. 4. №4. P. 455-470.

Поступила 11.11.2004 г.

Механика деформируемого твердого тела

УДК 539.3:4

С.Л. Степанов

УЧЕТ УПРОЧНЕНИЯ ПРИ ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЕФОРМАЦИЙ ПО СХЕМЕ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ДЕФОРМАЦИЙ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЙ

Предложена модельное представление, которое в явном виде учитывает большие деформации в пластических зонах у вершины трещины при плоском напряженном состоянии по схеме жесткопластического течения.

В работах [1,2] утверждается, что решение основной задачи механики разрушения о расположении тонкой пластины с начальной трещиной «некорректно в смысле устойчивости деформаций» и дано приближенное решение, удовлетворяющее условию устойчивости. Это решение предполагает, что локальные условия разрушения механизма вблизи трещины должны соответствовать равновесной диаграмме деформирования. В упомянутых работах такая диаграмма аппроксимировалась различными видами парабол, в частности в работе [1] была дана следующая зависимость:

$$\sigma = Es(1 - \beta\varepsilon), \quad (1)$$

где σ - напряжения, действующие на продолжение линии трещины вблизи ее вершины; ε - соответствующие им деформации; $\beta = \frac{E\sigma_s}{4}$ - постоянная величина; E - модуль упругости; σ_s - предел прочности материала.

Это соотношение использовалось в [1] для определения напряжений на линии трещины в приближении Дагдейла и в предположении, что пластическая зона мала по сравнению с длиной трещины. В силу этого соответствующая краевая задача не решалась и использовалось асимптотическое решение основной задачи линейной механики разрушения.

Рассмотрим задачу о растяжении пластины с центральной трещиной в плоском напряженном состоянии. Обычно считают, что в этом случае выполняется гипотеза Дагдейла о том, что пластические области у вершин трещины занимают узкие, вытянутые вдоль линии, трещины зоны, высота которых соответствует толщине пластины h .