Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Л. Степанов, Учет упрочнения при локализации деформаций по схеме жестко-пластического течения и устойчивость деформаций в задачах механики разрушений, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005, выпуск 34, 196–198

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu357>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:16:53

В силу (2), (5), (6) согласно лемме при $\mu = 0$:

$$(D_{0+}^{\alpha_i+1/2} g_i)(x) \in H_0^{\lambda_i-\alpha_i-1/2}[0; 1], i = 1, 2.$$

Значит, $v(x) \in H_0^{\min\{\lambda_1-\alpha_1-1/2, \lambda_2-\alpha_2-1/2\}}[0; 1]$.

Теорема. Пусть функции $g_1(x), g_2(x)$ удовлетворяют условиям (2), действительные константы $A_1, A_2, B_1, B_2, \alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ - условиям (3)-(6). Тогда задача 1)-4) для уравнения (1) имеет

единственное решение с $v(x) = -\frac{1}{\gamma(A_1 + B_1)}(D_{0+}^{\alpha_1+1/2} g_1)(x) + \frac{1}{\gamma(A_2 + B_2)}(D_{0+}^{\alpha_2+1/2} g_2)(x)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987. 668 с.
2. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2000. 299 с.
3. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
4. Kilbas A.A., Repin O.A., Saigo M. Solution in Closed Form of Boundary Value Problem for Degenerate Equation of Hyperbolic Type// Kyungpook Math. J. 1996. V. 36. №2. P. 261-273.
5. Kilbas A.A., Repin O.A., Saigo M. Nonlocal Problem for the Hyperbolic Equation with Fractional Derivatives in the Boundary Condition// Math. Japan. 2003. V. 33. №2. P. 1-8.
6. Agmon S., Nirenberg L., Protter M.N. A maximum principle for a class of hyperbolic equation and applications to mixed elliptic-hyperbolic type// Commun Pure and Appl. Math. 1953. V. 4. №4. P. 455-470.

Поступила 11.11.2004 г.

Механика деформируемого твердого тела

УДК 539.3:4

С.Л. Степанов

УЧЕТ УПРОЧНЕНИЯ ПРИ ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЕФОРМАЦИЙ ПО СХЕМЕ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ДЕФОРМАЦИЙ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЙ

Предложена модельное представление, которое в явном виде учитывает большие деформации в пластических зонах у вершины трещины при плоском напряженном состоянии по схеме жесткопластического течения.

В работах [1,2] утверждается, что решение основной задачи механики разрушения о расположении тонкой пластины с начальной трещиной «некорректно в смысле устойчивости деформаций» и дано приближенное решение, удовлетворяющее условию устойчивости. Это решение предполагает, что локальные условия разрушения механизма вблизи трещины должны соответствовать равновесной диаграмме деформирования. В упомянутых работах такая диаграмма аппроксимировалась различными видами парабол, в частности в работе [1] была дана следующая зависимость:

$$\sigma = Es(1 - \beta\varepsilon), \quad (1)$$

где σ - напряжения, действующие на продолжение линии трещины вблизи ее вершины; ε - соответствующие им деформации; $\beta = \frac{E\sigma_s}{4}$ - постоянная величина; E - модуль упругости; σ_s - предел прочности материала.

Это соотношение использовалось в [1] для определения напряжений на линии трещины в приближении Дагдейла и в предположении, что пластическая зона мала по сравнению с длиной трещины. В силу этого соответствующая краевая задача не решалась и использовалось асимптотическое решение основной задачи линейной механики разрушения.

Рассмотрим задачу о растяжении пластины с центральной трещиной в плоском напряженном состоянии. Обычно считают, что в этом случае выполняется гипотеза Дагдейла о том, что пластические области у вершин трещины занимают узкие, вытянутые вдоль линии, трещины зоны, высота которых соответствует толщине пластины h .

Представим процесс деформирования материала в этих зонах как жесткопластическое течение по схеме Прагера [3]. Рассмотрение статики и кинематики этого течения с учетом изменения границы приводит к связи между напряжениями и смещениями на берегах пластических зон, которая имеет вид [4]:

$$\sigma = \sigma_s \left(1 - \frac{2V}{h} \right). \quad (2)$$

Здесь σ - напряжения, приложенные на берегах пластических зон; V - соответствующие смещения, σ_s - предел текучести материала на растяжение.

Необходимо отметить, что использование (2) в качестве граничных условий для рассматриваемой задачи приводит к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, решение которого находится в рядах Неймана.

Отношение $\frac{2V}{h}$ в (2) можно интерпретировать как деформацию материала в пластической зоне. Тогда согласно жесткопластической схеме, предельная деформация должна быть равной единице при уменьшении толщины пластины у вершин трещины до нуля. Но поскольку для конструкционных материалов такое состояние никогда не реализуется, формально отношение $\frac{2V}{h}$ представим как отношение текущей деформации ε к предельной $\varepsilon_{np} < 1$.

Для учета уточнения введем параметр $\lambda = \frac{E_{кас}}{E}$, $\lambda \leq 1$. Тогда деформации, соответствующие пределу текучести ε_s и пределу прочности ε_σ , определяются следующим образом:

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E}, \quad \varepsilon_\sigma = \varepsilon_s + \frac{\sigma_\sigma - \sigma_s}{\lambda E}. \quad (3)$$

При $\varepsilon \leq \varepsilon_s$ имеем зависимость между напряжениями и деформациями в виде закона Гука $\sigma = E\varepsilon$, при $\varepsilon > \varepsilon_s$ получается следующее выражение

$$\sigma = E \left(\frac{\sigma_s}{E} + \lambda \left(\varepsilon - \frac{\sigma_s}{E} \right) \right). \quad (4)$$

Представляя это выражение в (2), получим

$$\sigma = E \left(\frac{\sigma_s}{E} + \lambda \left(\varepsilon - \frac{\sigma_s}{E} \right) \right) \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{np}} \right). \quad (5)$$

Величина ε_{np} определяется из условия $\left. \frac{d\sigma(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_{np}} = 0$ и $\sigma(\varepsilon_{np}) = \sigma_\sigma$ в виде:

$$\varepsilon_{np} = \frac{2(2\sigma_\sigma - \sigma_s(1-\lambda))}{\lambda E}. \quad (6)$$

При $\lambda = 1$ зависимость (5) с точностью до обозначений совпадает с выражением (1) для квазихрупкого разрушения. В этом случае $\varepsilon_{np} = \frac{1}{\beta} = \frac{4\sigma_\sigma}{E}$. Отметим, что здесь этот результат получен на основании других физических предпосылок, чем зависимость (1).

При $\lambda = 0$ выражение трансформируется в зависимость (2) и, следовательно, учитывает уменьшение усилий и утонение материала в результате больших деформаций в пластических зонах у вершин трещины, что позволяет рассматривать их как зоны локального шейкообразования.

Таким образом, зависимость (5) определяет связь между напряжениями на берегах пластических зон у вершины трещины и смещениями этих берегов не только для квазихрупкого разрушения, но и в случае, когда длина пластических зон соизмерима с длиной трещины.

Решение краевой задачи, которая возникает при использовании (5) в качестве граничных условий, можно найти как сведением ее к различным интегральным уравнениям (см. выше), так и с помощью разложения по малому параметру. В настоящем сообщении в качестве такого параметра выбрано имеющее физический смысл отношение предела текучести материала к его

модулю упругости: $\Delta = \frac{\sigma_s}{E}$. Для большинства конструкционных материалов малый параметр имеет величину порядка 0,01.

Перепишем (5) в виде

$$\sigma = \sigma_s(1 - \lambda) + \left(\lambda - \frac{\sigma_s(1 - \lambda)}{E\varepsilon_{np}} \right) E\varepsilon - \frac{\lambda}{\varepsilon_{np}} E\varepsilon^2 \quad (7)$$

и, используя (6) и соотношение $\sigma_g = k\varepsilon_s$, после некоторых преобразований получим

$$\sigma = \sigma_s(1 - \lambda) + \Delta a_1 E\varepsilon - \Delta a_2 E\varepsilon^2. \quad (8)$$

Здесь $a_1 = \frac{\lambda(4k + \lambda + \lambda^2 - 2)}{\Delta(4k + 2\lambda - 2)}$, $a_2 = \frac{\lambda^2}{2\Delta^2(2k + \lambda - 1)}$ - постоянные величины, зависящие только от механических свойств материала.

Представим напряжения и деформации в пластических зонах в виде рядов по малому параметру:

$$\sigma = \sum_{i=0} \sigma_i \Delta^i; \quad \varepsilon = \sum_{i=0} \varepsilon_i \Delta^i; \quad \Delta = \frac{\sigma_s}{E}.$$

Подставляя эти разложения в (8), получим последовательность соотношений для σ_i :

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \sigma_s(1 - \lambda); \\ \sigma_1 &= E a_1 \varepsilon_0 - E a_2 \varepsilon_0^2; \\ \sigma_2 &= E a_1 \varepsilon_1 - 2 E a_2 \varepsilon_0 \varepsilon_1; \\ &\dots \end{aligned} \quad (9)$$

Каждому соотношению из (9) соответствует краевая задача, аналогичная задаче КРТ - модели, решение которой известно. Объединяя решения цепочки этих задач, получим решение поставленной краевой задачи.

Таким образом, в настоящем сообщении предложено модельное представление, которое в явном виде учитывает большие деформации в пластических зонах у вершин трещины при плоском напряженном состоянии (в том числе, и утонение материала) и удовлетворяет условию устойчивости деформаций. Поэтому его можно считать дальнейшим развитием модельных представлений механики упругопластического разрушения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Волков С.Д., Дубровина Г.И., Соковкин Ю.П. Устойчивость сопротивления материала в механике разрушения. Проблемы прочности, 1978, №6, с. 65-69.
2. Волков С.Д. Метод решения смешанной краевой задачи механики разрушения. Проблемы прочности, 1979, №11, с. 34-39.
3. Онат Е., Прагер В. Образование шейки при пластическом течении растягиваемого плоского образца. В сб.: Механика, 1955, №4 (32), с. 93-122.
4. Быковцев Г.И., Лукашев Л.Г., Степанов С.Л. Об одной модели разрушения в идеальных упругопластических средах. Проблемы прочности, 1982, №3, с. 72-78.

Поступила 29.11.2004 г.